Sante Centurioni

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi

EdiSES università

Sante **Centurioni**

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi

EdiSES
università

Sante Centurioni
Serie di Fourier - Teoria ed Esercizi

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2029 2028 2027 2026 2025

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

In copertina
Nell'idea dell'autore la copertina di questo libro non vuole essere una semplice decorazione, ma una metafora visiva dei concetti che verranno esplorati. L'immagine, un intricato ornamento dorato, rappresenta una funzione complessa e apparentemente caotica. Lo sfondo nero, il "vuoto" assoluto, simboleggia l'universo delle possibilità matematiche, da cui tutto ha origine. Le serie di Fourier sono lo strumento che ci permette di illuminare questo vuoto, scomponendo la complessità dell'ornamento (la funzione) nei suoi elementi costitutivi più semplici e armoniosi: le onde sinusoidali. Come ogni petalo, curva e linea dell'immagine si uniscono per formare un'opera d'arte completa, così le serie di Fourier dimostrano che ogni segnale, anche il più elaborato, può essere visto come la somma di componenti elementari.
In questo libro, si imparerà a fare esattamente questo: a dare ordine al disordine, a trovare l'armonia nascosta nelle funzioni e a illuminare la bellezza della matematica.

Stampato presso
Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

Per conto della
EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edises.it
ISBN 978 88 3623 240 6 assistenza.edises.it

Ai miei genitori **Giuseppe** e **Franca**
che mi hanno donato il bene più prezioso: *l'amore.*
Senza la loro vicinanza spirituale non avrei mai
raggiunto quello che sono ora.

A mia moglie **Rita**
che mi ha sostenuto donandomi la presenza di tutta
una vita.

A mia figlia **Clarissa**
che mi ha donato la felicità di un padre appagato e
orgoglioso.

..

Prefazione

Questo libro è la raccolta e la rielaborazione delle lezioni da me tenute presso l'Università Sapienza di Roma nel corso di Analisi 2. Vuole essere un trattato elementare della teoria delle serie di Fourier. E' concepito come risorsa fondamentale per studenti universitari e professionisti impegnati nelle discipline scientifiche e ingegneristiche. Il testo è stato strutturato per fornire una comprensione approfondita dei principi fondamentali, parallelamente a un'ampia sezione dedicata all'applicazione pratica tramite esercizi mirati. La prima parte del libro è dedicata all'esposizione rigorosa dei concetti teorici essenziali. Ogni capitolo è stato sviluppato con l'obiettivo di presentare la materia in modo chiaro e coerente, privilegiando la derivazione logica e l'analisi critica dei modelli. Non ci si è limitati alla mera enunciazione di formule o definizioni; al contrario, si è cercato di illuminare il "perché" dietro ogni principio, incoraggiando un approccio analitico e sistematico. L'enfasi è posta sulla solidità concettuale, elemento indispensabile per lo sviluppo di competenze risolutive robuste. La trattazione include dimostrazioni dettagliate e spiegazioni esaustive, accompagnate da esempi risolti che illustrano l'applicazione diretta dei concetti teorici. Questa sezione mira a costruire una base di conoscenza ferma, preparatoria per affrontare problematiche di crescente complessità. Il libro si presta a numerosi approfondimenti proposti per mezzo di numerose appendici. La seconda parte del volume è integralmente dedicata alla pratica. Qui si troverà una vasta collezione di esercizi, progettati per consolidare la comprensione teorica e sviluppare le capacità di problem-solving. La selezione include un'ampia gamma di tipologie, dai problemi di verifica concettuale a quelli che richiedono l'integrazione di molteplici principi. La risoluzione di questi esercizi è cruciale per la piena assimilazione del materiale. Ogni problema è un'opportunità per applicare la teoria in contesti vari, affinare il ragionamento critico e identificare le strategie risolutive più efficienti. La pratica costante con questi quesiti rafforzerà la vostra abilità nell'affrontare sfide analitiche e numeriche, trasformando la conoscenza astratta in competenza operativa e applicata. Questo libro si propone dunque come uno strumento indispensabile per chiunque desideri non solo acquisire conoscenza, ma anche sviluppare una profonda capacità di applicazione pratica nel proprio campo scientifico. L'equilibrio tra rigore teorico ed estensiva pratica rende questo lavoro una risorsa completa per un percorso formativo e professionale.

S. C.

Roma, 10 Luglio 2025

Indice Generale

3 Secondo teorema di Dirichlet: prima parte sulla sviluppabilità in serie di Fourier

3.1 Ipotesi

Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, I=$(a, b) = (-\pi, \pi)$ una funzione periodica con periodo 2π tale che :

1. $f(x)$ sia **continua e monotona a tratti** in ogni intervallo finito $I = [a, b]$;
2. $f(x)$ abbia un numero finito di **discontinuità di prima specie** in un periodo;
3. $f(x)$ sia **integrabile su un periodo**, ovvero **a variazione limitata**, cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty. \tag{37}$$

4. $f(x)$ sia **regolare** ovvero C^1 (che implica la continuità della derivata e della funzione, cosa gia contenuta nel primo punto).

3.2 Tesi

La funzione $f(x)$ è sviluppabile in una serie di Fourier della forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right), \tag{38}$$

dove i coefficienti della serie di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \tag{39}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \geq 1, \tag{40}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \geq 1. \tag{41}$$

Risulta inoltre:
a) La serie di Fourier converge puntualmente nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$, ovvero in ogni punto interno dell'intervallo.
b) Nei punti di discontinuità della funzione, la serie di Fourier converge puntualmente al valore medio tra i limiti destro e sinistro. Ad esempio, se $c \in (-\pi, \pi)$

è un punto di discontinuità, di prima specie, allora:

$$s(c) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to c^-} f(x) + \lim_{x\to c^+} f(x)\right). \tag{42}$$

c) Per $x = \pm\pi$, cioè agli estremi dell'intervallo, la serie di Fourier converge puntualmente a:

$$s(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to \pi^-} f(x) + \lim_{x\to \pi^+} f(x)\right), \tag{43}$$

e analogamente:

$$s(-\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -\pi^-} f(x) + \lim_{x\to -\pi^+} f(x)\right). \tag{44}$$

Inoltre in ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$ dove la funzione è continua, la convergenza è anche uniforme.

4 Secondo Teorema di Dirichlet: seconda parte sulla Convergenza Uniforme della serie di Fourier

4.1 Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π, definita su $[-\pi, \pi]$, che soddisfa le seguenti condizioni:

1. **Continuità**: $f(x)$ è continua su $[-\pi, \pi]$.

2. **Variazione limitata sia la funzione che la sua derivata**: La derivata generalizzata di $f(x)$ è a variazione limitata su $[-\pi, \pi]$, cioè $f(x)$ ha una variazione limitata su $[-\pi, \pi]$.

3. **Somme parziali uniformemente limitate**: Le somme parziali della serie di Fourier $S_N(x)$ associate a $f(x)$ sono uniformemente limitate, cioè esiste una costante C tale che $|S_N(x)|$
$\leq C$ per ogni N e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Tesi

Allora, la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su $\mathbb{R}$. Si fa notare che anche qui la condizione di convergenza uniforme è solo sufficiente.

4.3 Dimostrazione

Passo 1: Scrittura della Serie di Fourier e delle Somme Parziali
La serie di Fourier di $f(x)$ è data dalla somma:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{45}$$

dove i coefficienti a_n e b_n sono definiti come:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx. \tag{46}$$

Passo 2: Utilizzo del Nucleo di Dirichlet
Definiamo il nucleo di Dirichlet come:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) + i \sum_{n=1}^{N} \sin(nx). \tag{47}$$

Si può notare inoltre che essendo:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}. \tag{48}$$

Tenendo conto che $\sin(-nx) = -\sin(nx)$, si ha che la somma:

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin(kx) = 0. \tag{49}$$

Quindi, il nucleo di Dirichlet $D_n(x)$ è uguale a:

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N} \cos(nx). \tag{50}$$

Se $f(x)$ è una funzione 2π-periodica e integrabile, allora la somma parziale di ordine N della serie di Fourier può essere scritta come una convoluzione

$$S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, D_N(t)\, dt, \tag{51}$$

dove $D_N(x)$ è il nucleo di Dirichlet. Questo ci dice che la somma parziale è un'approssimazione di f ottenuta smussando f tramite $D_N(x)$. Il comportamento di $D_N(x)$ è cruciale per capire dove e come la serie di Fourier converge.

In particolare, nei punti di continuità converge a $f(x)$, nei punti di discontinuità di prima specie converge alla media dei limiti laterali. Se $D_N(x)$ non è sommabile, la somma cresce come $\log(N)$. Questo rende più difficile la convergenza. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità diventa più pronunciata man mano che ci si avvicina ad essio. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità spiega il fenomeno di Gibbs.
La somma parziale può essere scritta come una convoluzione di $f(x)$ con il nucleo di Dirichlet:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\, dy. \tag{52}$$

Passo 3: Proprietà delle Funzioni a Variazione Limitata Poiché $f(x)$ è a variazione limitata su $[-\pi, \pi]$, possiamo utilizzare il fatto che la funzione $f(x)$ è continua e a tratti monotona (segnalando che le sue derivate esistono quasi ovunque e che la variazione totale di $f(x)$ è finita). Di conseguenza, i coefficienti di Fourier a_n e b_n decrescono almeno come $\frac{1}{n}$.

Passo 4: Stima dell'Errore di Convergenza

Per dimostrare la convergenza uniforme, consideriamo la differenza tra la somma parziale $S_N(x)$ e la funzione $f(x)$:

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\, dy - f(x). \tag{53}$$

Per $D_N(x)$, possiamo stimare che:

$$\sup_x \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\, dy \right| \leq C V(f), \tag{54}$$

dove $V(f)$ è la variazione totale di $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$ e C è una costante indipendente da N.

Passo 5: Convergenza Uniforme

Poiché $f(x)$ è a variazione limitata, l'errore $|S_N(x) - f(x)|$ tende a zero uniformemente per x quando $N \to \infty$. In altre parole, il massimo errore tra la somma parziale $S_N(x)$ e la funzione $f(x)$ tende a zero man mano che N cresce:

$$\sup_x |S_N(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to \infty. \tag{55}$$

Conclusione

Poiché il massimo errore tende a zero, la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su $\mathbb{R}$, come richiesto. Pertanto, abbiamo dimostrato che la serie di Fourier di una funzione continua, a tratti monotona e regolare a tratti converge uniformemente alla funzione stessa.

Sante Centurioni

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi

EdiSES università

ISBN 978-88-3623-240-6

9 788836 232406