

Sante Centurioni

# Serie di Fourier

## Teoria ed Esercizi





Sante Centurioni

---

# Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi



Sante Centurioni  
Serie di Fourier - Teoria ed Esercizi  
Copyright © 2025, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0  
2029 2028 2027 2026 2025

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

*L'Editore*

*L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.*

#### *In copertina*

Nell'idea dell'autore la copertina di questo libro non vuole essere una semplice decorazione, ma una metafora visiva dei concetti che verranno esplorati. L'immagine, un intricato ornamento dorato, rappresenta una funzione complessa e apparentemente caotica. Lo sfondo nero, il "vuoto" assoluto, simboleggia l'universo delle possibilità matematiche, da cui tutto ha origine. Le serie di Fourier sono lo strumento che ci permette di illuminare questo vuoto, scomponendo la complessità dell'ornamento (la funzione) nei suoi elementi costitutivi più semplici e armoniosi: le onde sinusoidali. Come ogni petalo, curva e linea dell'immagine si uniscono per formare un'opera d'arte completa, così le serie di Fourier dimostrano che ogni segnale, anche il più elaborato, può essere visto come la somma di componenti elementari.

In questo libro, si imparerà a fare esattamente questo: a dare ordine al disordine, a trovare l'armonia nascosta nelle funzioni e a illuminare la bellezza della matematica.

#### *Stampato presso*

Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

#### *Per conto della*

EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

ISBN 978 88 3623 240 6

[www.edises.it](http://www.edises.it)  
[assistenza.edises.it](mailto:assistenza.edises.it)

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma [assistenza.edises.it](mailto:assistenza.edises.it)



Ai miei genitori **Giuseppe e Franca**  
che mi hanno donato il bene più prezioso: *l'amore*.  
Senza la loro vicinanza spirituale non avrei mai  
raggiunto quello che sono ora.

A mia moglie **Rita**  
che mi ha sostenuto donandomi la presenza di tutta  
una vita.

A mia figlia **Clarissa**  
che mi ha donato la felicità di un padre appagato e  
orgoglioso.

..



## Prefazione

Questo libro è la raccolta e la rielaborazione delle lezioni da me tenute presso l'Università Sapienza di Roma nel corso di Analisi 2. Vuole essere un trattato elementare della teoria delle serie di Fourier. E' concepito come risorsa fondamentale per studenti universitari e professionisti impegnati nelle discipline scientifiche e ingegneristiche. Il testo è stato strutturato per fornire una comprensione approfondita dei principi fondamentali, parallelamente a un'ampia sezione dedicata all'applicazione pratica tramite esercizi mirati. La prima parte del libro è dedicata all'esposizione rigorosa dei concetti teorici essenziali. Ogni capitolo è stato sviluppato con l'obiettivo di presentare la materia in modo chiaro e coerente, privilegiando la derivazione logica e l'analisi critica dei modelli. Non ci si è limitati alla mera enunciazione di formule o definizioni; al contrario, si è cercato di illuminare il "perché" dietro ogni principio, incoraggiando un approccio analitico e sistematico. L'enfasi è posta sulla solidità concettuale, elemento indispensabile per lo sviluppo di competenze risolutive robuste. La trattazione include dimostrazioni dettagliate e spiegazioni esaustive, accompagnate da esempi risolti che illustrano l'applicazione diretta dei concetti teorici. Questa sezione mira a costruire una base di conoscenza ferma, preparatoria per affrontare problematiche di crescente complessità. Il libro si presta a numerosi approfondimenti proposti per mezzo di numerose appendici. La seconda parte del volume è integralmente dedicata alla pratica. Qui si troverà una vasta collezione di esercizi, progettati per consolidare la comprensione teorica e sviluppare le capacità di problem-solving. La selezione include un'ampia gamma di tipologie, dai problemi di verifica concettuale a quelli che richiedono l'integrazione di molteplici principi. La risoluzione di questi esercizi è cruciale per la piena assimilazione del materiale. Ogni problema è un'opportunità per applicare la teoria in contesti vari, affinare il ragionamento critico e identificare le strategie risolutive più efficienti. La pratica costante con questi quesiti rafforzerà la vostra abilità nell'affrontare sfide analitiche e numeriche, trasformando la conoscenza astratta in competenza operativa e applicata. Questo libro si propone dunque come uno strumento indispensabile per chiunque desideri non solo acquisire conoscenza, ma anche sviluppare una profonda capacità di applicazione pratica nel proprio campo scientifico. L'equilibrio tra rigore teorico ed estensiva pratica rende questo lavoro una risorsa completa per un percorso formativo e professionale.

S. C.

Roma, 10 Luglio 2025



## Indice Generale

<b>TEORIA</b>	<b>31</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>33</b>
1.1 Generalità . . . . .	33
1.2 Osservazione sul coefficiente $a_0$ . . . . .	35
<b>2 Primo teorema di Dirichlet</b>	<b>36</b>
2.1 Ipotesi . . . . .	36
2.2 Tesi . . . . .	36
2.3 Dimostrazione . . . . .	37
2.3.1 Passo 1: Espressione della somma parziale . . . . .	37
2.3.2 Passo 2: Analisi del comportamento della somma parziale	38
2.3.3 Caso 1: $x$ è un punto di continuità . . . . .	38
2.3.4 Caso 2: $x$ è un punto di discontinuità di prima specie . .	38
2.3.5 Conclusione . . . . .	38
<b>3 Secondo teorema di Dirichlet: prima parte sulla sviluppabilità in serie di Fourier</b>	<b>39</b>
3.1 Ipotesi . . . . .	39
3.2 Tesi . . . . .	39
<b>4 Secondo Teorema di Dirichlet: seconda parte sulla Convergenza Uniforme della serie di Fourier</b>	<b>40</b>
4.1 Ipotesi . . . . .	40
4.2 Tesi . . . . .	40
4.3 Dimostrazione . . . . .	41
<b>5 Teorema di Weierstrass sulla Convergenza totale della serie di Fourier e convergenza uniforme</b>	<b>43</b>
5.1 Ipotesi . . . . .	43
5.2 Tesi . . . . .	43
5.3 Dimostrazione . . . . .	43

<b>6</b>	<b>Teorema 2 sulla convergenza totale per funzioni <math>f \in L^2(I)</math></b>	<b>44</b>
6.1	Ipotesi . . . . .	44
6.2	Tesi . . . . .	44
6.3	Dimostrazione . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Osservazione sulla convergenza della Serie di Fourier e il Primo Criterio di Dirichlet</b>	<b>46</b>
7.1	Divergenza Puntuale della Serie di Fourier per Funzioni Continue e Monotone . . . . .	47
7.2	Conclusione . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Esempio di funzione non sviluppabile in serie di Fourier</b>	<b>52</b>
8.1	Motivo per cui non è sviluppabile in serie di Fourier . . . . .	52
8.2	Condizione di sviluppabilità in serie di Fourier . . . . .	52
8.3	Esempio di funzione continua a tratti con discontinuità di prima specie . . . . .	54
<b>9</b>	<b>Riflessioni sui due criteri di Dirichlet</b>	<b>54</b>
<b>10</b>	<b>Osservazioni sulla convergenza uniforme della serie di Fourier</b>	<b>54</b>
10.1	Convergenza uniforme: Funzione triangolare . . . . .	57
<b>11</b>	<b>Teorema sulla convergenza uniforme</b>	<b>59</b>
11.1	Ipotesi . . . . .	59
11.2	Tesi . . . . .	60
<b>12</b>	<b>Teorema sulla Sommabilità Assoluta dei Coefficienti di Fourier</b>	<b>60</b>
12.1	Ipotesi . . . . .	60
12.2	Tesi . . . . .	60
12.3	Dimostrazione . . . . .	61
<b>13</b>	<b>Teorema. Coefficienti di Fourier per funzioni pari</b>	<b>63</b>
13.1	Ipotesi . . . . .	63
13.2	Tesi . . . . .	63
13.3	Dimostrazione . . . . .	64
13.4	In sintesi . . . . .	64
13.4.1	Esempio 1 . . . . .	64
13.4.2	Esempio 2 . . . . .	66
<b>14</b>	<b>Ulteriori considerazioni sulla convergenza totale di una serie di Fourier</b>	<b>69</b>
14.1	Considerazioni sulle condizioni per la convergenza totale . . . . .	69
14.2	Considerazioni sul teorema di Weierstrass e convergenza totale e uniforme . . . . .	69
14.3	Funzioni con discontinuità . . . . .	71
14.4	Esempio della funzione $f(x) =  x $ . . . . .	71
14.5	Riassunto . . . . .	71

<b>15 Esercizio</b>	<b>72</b>
15.0.1 Calcolo dei coefficienti di Fourier . . . . .	73
15.0.2 Serie di Fourier . . . . .	74
15.0.3 Convergenza nei punti di discontinuità . . . . .	75
<b>16 Ulteriori importanti considerazioni</b>	<b>76</b>
16.1 Considerazione 1, sulla integrazione e derivazione della serie di Fourier . . . . .	76
16.2 Considerazione 2, sugli integrali seno e coseno sul periodo $2L$ da $-L$ ad $L$ . . . . .	76
16.2.1 Dimostrazione . . . . .	76
16.3 Considerazione 3, sugli integrali seno-seno, coseno-coseno, seno-coseno sul periodo . . . . .	78
16.4 Considerazione 4, ulteriori considerazioni sullo sviluppo di Fourier di funzioni pari e dispari . . . . .	81
<b>17 Determinazione dei coefficienti di Fourier</b>	<b>82</b>
17.1 Calcolo di $a_0$ . . . . .	82
17.2 Calcolo di $a_n$ . . . . .	83
17.3 Calcolo di $b_n$ . . . . .	84
<b>18 Sintesi sulle condizioni di Convergenza Puntuale di una Serie di Fourier</b>	<b>85</b>
18.0.1 Periodicità della funzione . . . . .	85
18.0.2 Continuità a tratti . . . . .	85
18.0.3 Derivata continua a tratti . . . . .	85
18.1 Teorema di Dirichlet . . . . .	86
18.1.1 Risultati nei punti di continuità e discontinuità . . . . .	86
18.1.2 Decadimento dei coefficienti di Fourier . . . . .	86
<b>19 Sintesi sulle condizioni di convergenza uniforme di una serie di Fourier</b>	<b>86</b>
19.1 Continuità e periodicità della funzione . . . . .	86
19.2 Condizione di Lipschitz . . . . .	86
19.3 Continuità a tratti della derivata . . . . .	87
19.4 Decadimento rapido dei coefficienti di Fourier . . . . .	87
19.5 Convergenza assoluta implica convergenza uniforme . . . . .	87
19.6 Teorema di Dirichlet . . . . .	87
19.7 Criterio pratico . . . . .	87
<b>20 Sintesi sulle condizioni di Convergenza Totale di una Serie di Fourier</b>	<b>88</b>
20.1 Periodicità della funzione . . . . .	88
20.2 Continuità e derivata continua a tratti . . . . .	88
20.3 Condizione di Lipschitz . . . . .	88
20.4 Decadimento dei coefficienti di Fourier . . . . .	88

20.5	Criterio di convergenza totale (Test di Weierstrass) . . . . .	89
20.6	Risultati nei punti di discontinuità . . . . .	89
20.7	Nota sul criterio di Dirichlet per la convergenza uniforme . . . . .	89
20.8	2. Regolarità della funzione . . . . .	89
20.9	3. Convergenza totale . . . . .	89
20.10.4	Risultato finale . . . . .	90
20.10.1	Nota . . . . .	90
<b>21</b>	<b>Teorema sulla sommabilità quadratica dei coefficienti di Fourier</b>	<b>90</b>
21.1	Ipotesi . . . . .	90
21.2	Tesi . . . . .	91
21.3	Dimostrazione . . . . .	91
21.3.1	1. Sommabilità quadratica dei coefficienti $a_n$ : . . . . .	91
21.3.2	2. Sommabilità quadratica dei coefficienti $b_n$ : . . . . .	91
21.4	Conclusione: . . . . .	92
<b>22</b>	<b>Identità di Parseval</b>	<b>92</b>
22.1	Teorema di Parseval . . . . .	92
22.2	Ipotesi . . . . .	92
22.3	Tesi . . . . .	92
22.4	Dimostrazione . . . . .	92
<b>23</b>	<b>Serie di Fourier in forma complessa</b>	<b>93</b>
<b>24</b>	<b>Esempio</b>	<b>94</b>
24.0.1	Calcolo dei coefficienti $c_n$ . . . . .	95
24.0.2	Valutazione dei termini . . . . .	95
24.0.3	Serie di Fourier complessa della funzione $f(x) = x$ . . . . .	96
24.0.4	Relazione tra $c_n$ e $c_{-n}$ . . . . .	96
24.0.5	Serie di Fourier reale . . . . .	97
24.0.6	Risultato finale . . . . .	97
<b>25</b>	<b>Trasformazione della serie di Fourier dalla forma reale alla forma complessa</b>	<b>97</b>
25.0.1	Forma Reale della Serie di Fourier . . . . .	97
25.0.2	Utilizzare le Relazioni di Eulero . . . . .	97
25.0.3	Sostituire nelle espressioni della serie . . . . .	98
25.0.4	Raccogliere i termini simili . . . . .	98
25.0.5	Identificare i Coefficienti Complessi $C_n$ . . . . .	98
25.0.6	Unificare la Notazione e Scrivere la Serie Completa . . . . .	98
25.0.7	Conclusione . . . . .	99
<b>26</b>	<b>Trasformazione della serie di Fourier dalla forma complessa alla forma reale</b>	<b>99</b>
26.1	Separazione del termine costante . . . . .	99
26.2	Somma dei termini complessi $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ . . . . .	99



26.3	Passaggio alla forma reale . . . . .	100
26.4	Ricetta per i coefficienti . . . . .	100
26.5	Forma finale . . . . .	101
<b>27</b>	<b>Derivazione della serie di Fourier</b>	<b>102</b>
27.1	Teorema 1 di derivazione per serie di Fourier . . . . .	102
27.1.1	Ipotesi: . . . . .	102
27.1.2	Tesi: . . . . .	102
27.1.3	Dimostrazione: . . . . .	102
27.2	Teorema 2 di derivazione per serie di Fourier . . . . .	104
27.2.1	Ipotesi . . . . .	104
27.2.2	Tesi . . . . .	104
27.2.3	Dimostrazione . . . . .	104
27.3	Teorema 3 di derivazione delle Serie di Fourier termine a termine	105
27.3.1	Ipotesi: . . . . .	105
27.3.2	Tesi: . . . . .	106
27.3.3	Dimostrazione . . . . .	106
27.4	Teorema 4: Derivazione di Ordine Superiore . . . . .	107
27.4.1	Ipotesi: . . . . .	107
27.4.2	Tesi: . . . . .	107
27.4.3	Dimostrazione: . . . . .	107
27.5	Teorema 5 di derivazione delle serie di Fourier . . . . .	107
27.5.1	Ipotesi: . . . . .	107
27.5.2	Tesi: . . . . .	107
27.5.3	Dimostrazione: . . . . .	108
<b>28</b>	<b>Sintesi sei teoremi di Derivazione della Serie di Fourier</b>	<b>111</b>
28.1	Teorema di Derivabilità Puntuale . . . . .	111
28.2	Teorema di Derivabilità in $L^2$ . . . . .	111
28.3	Teorema di Derivabilità Uniforme . . . . .	111
28.4	Teorema di Derivabilità per Funzioni a Variazione Limitata . . .	112
28.5	Teorema per Funzioni Lipschitziane . . . . .	112
28.6	Teorema di Convergenza della Serie di Fourier della Derivata . .	112
<b>29</b>	<b>Integrazione di una serie di Fourier</b>	<b>113</b>
29.1	Teorema 1 di integrazione di una serie di Fourier . . . . .	113
29.1.1	Ipotesi . . . . .	113
29.1.2	Tesi . . . . .	113
29.1.3	Dimostrazione . . . . .	113
29.2	Lemma : Integrazione delle Serie di Fourier . . . . .	114
29.2.1	Ipotesi . . . . .	114
29.2.2	Tesi . . . . .	114
29.2.3	Dimostrazione . . . . .	115
29.2.4	Definizione della Funzione Integrale . . . . .	115
29.2.5	Integrazione dei Termini della Serie di Fourier . . . . .	115
29.2.6	Uniforme Convergenza della Serie . . . . .	115

29.2.7	Conclusione . . . . .	116
29.3	Teorema relativo alla primitiva di una funzione periodica . . . . .	116
29.4	Ipotesi . . . . .	116
29.5	Tesi . . . . .	116
29.6	Dimostrazione . . . . .	116
29.7	Teorema 1: Integrazione delle Serie di Fourier con Continuità . . . . .	117
29.7.1	Ipotesi . . . . .	117
29.7.2	Tesi . . . . .	117
29.7.3	Dimostrazione . . . . .	118
29.8	Corollario: per funzioni $f \in L^2$ . . . . .	118
29.9	Teorema 2: Integrazione con Derivata Integrabile . . . . .	119
29.9.1	Ipotesi . . . . .	119
29.9.2	Tesi . . . . .	119
29.9.3	Dimostrazione . . . . .	119
29.10	Teorema 4: Integrazione delle Serie di Fourier termine a termine . . . . .	120
29.10.1	Ipotesi . . . . .	120
29.10.2	Tesi . . . . .	120
29.10.3	Dimostrazione . . . . .	120
<b>30</b>	<b>Sintesi dei teoremi di integrazione delle serie di Fourier</b>	<b>120</b>
30.1	Teorema di Integrazione Termine a Termine (Funzioni $C^1$ a tratti) . . . . .	120
30.2	Teorema di Integrazione in $L^2$ . . . . .	121
30.3	Teorema di Integrazione Uniforme . . . . .	121
30.4	Teorema di Integrazione con Funzioni a Variazione Limitata . . . . .	121
30.5	Teorema di Integrazione per Funzioni Lipschitziane . . . . .	121
30.6	Teorema di Convergenza della Derivata . . . . .	122
<b>31</b>	<b>Appendice 1. Identità importante per</b>	
	$\sum_{n=0}^N \cos(ny)$	<b>125</b>
31.1	Proposizione . . . . .	125
31.1.1	Dimostrazione . . . . .	125
<b>32</b>	<b>Appendice 2. Formula integrale (Integrale di Dirichlet) per la</b>	
	<b>somma parziale della serie di Fourier</b>	<b>127</b>
32.1	Proposizione . . . . .	127
32.1.1	Passo 1: Definizione della somma parziale della serie di Fourier . . . . .	127
32.1.2	Passo 2: Somma parziale della serie esponenziale . . . . .	128
32.1.3	Passo 3: Conclusione . . . . .	129
32.2	Modo alternativo di ricavare la somma parziale non usando la forma esponenziale della serie di Fourier . . . . .	129
<b>33</b>	<b>Appendice 3, Serie di Fourier di operazioni tra funzioni</b>	<b>132</b>
33.1	Introduzione . . . . .	132
33.2	1. Somma di Funzioni . . . . .	132
33.2.1	Serie di Fourier di $g(x) + h(x)$ . . . . .	132

33.2.2	2. Prodotto di Funzioni . . . . .	133
33.2.3	3. Derivata di una Funzione . . . . .	133
33.2.4	4. Integrazione di una Funzione . . . . .	133
33.2.5	5. Traslazione Temporale . . . . .	134
33.2.6	6. Modulazione . . . . .	134
33.2.7	Esempi . . . . .	134
33.2.8	Linearità dei coefficienti di Fourier . . . . .	134
33.2.9	Conclusione . . . . .	135
<b>34</b>	<b>Appendice 4. Operatori di Fourier</b>	<b>136</b>
34.1	Definizione dell'Operatore di Fourier . . . . .	136
34.2	Operatore Inverso . . . . .	136
34.3	Operatore di Fourier come Trasformazione Lineare . . . . .	136
34.4	Rappresentazione Matriciale . . . . .	137
34.5	Conclusioni . . . . .	137
<b>35</b>	<b>Appendice 5. Rappresentazione Matriciale della Serie di Fourier</b>	<b>138</b>
35.1	Passaggi per la Rappresentazione Matriciale . . . . .	138
35.2	Coefficiente di Fourier . . . . .	138
35.3	Rappresentazione Vettoriale . . . . .	138
35.4	Matrice di Fourier . . . . .	139
35.5	Prodotto Matriciale per il Calcolo dei Coefficienti . . . . .	139
35.6	Esempio con Funzione Discretizzata . . . . .	139
35.7	Ricostruzione della Funzione . . . . .	140
35.8	Rappresentazione Matriciale . . . . .	140
35.9	Conclusioni . . . . .	140
35.10	Esercizio . . . . .	140
35.10.1	Calcolo dei Coefficienti di Fourier . . . . .	141
<b>36</b>	<b>Appendice 6, Sintesi delle Proprietà per Ricavare l'Anti-trasformazione</b>	<b>145</b>
36.1	1. Periodicità della Funzione . . . . .	145
36.2	2. Serie di Fourier . . . . .	145
36.3	3. Matrice di Fourier . . . . .	145
36.4	4. Matrice Inversa di Fourier . . . . .	146
36.5	5. Ricostruzione della Funzione . . . . .	146
36.6	6. Ortogonalità dei Coefficienti di Fourier . . . . .	146
<b>37</b>	<b>Appendice 7. Serie di Fourier di una funzione traslata</b>	<b>148</b>
37.1	Teorema di traslazione . . . . .	148
37.1.1	Serie di Fourier traslata in forma complessa . . . . .	148
37.1.2	Serie di Fourier traslata in forma reale . . . . .	148
37.1.3	Conclusione . . . . .	150
37.2	Esempio di Traslazione e Calcolo dei Coefficienti di Fourier . . . . .	150
37.2.1	Calcolo dei Coefficienti di Fourier per $f(x) = \cos(x)$ . . . . .	150
37.2.2	Traslazione della Funzione . . . . .	151
37.3	Corollario di traslazione . . . . .	152

37.4	Ipotesi . . . . .	152
37.5	Tesi . . . . .	152
37.6	Dimostrazione . . . . .	152
<b>38</b>	<b>Appendice 8. Ortogonalità di una successione di funzioni</b>	<b>154</b>
38.1	Spazi di Hilbert e completezza . . . . .	154
38.2	Esempi di successioni ortogonali . . . . .	154
38.3	Convergenza delle successioni di funzioni ortogonali . . . . .	155
<b>39</b>	<b>Appendice 9. Serie di Fourier multiple</b>	<b>157</b>
39.1	Serie di Fourier Doppie . . . . .	157
39.2	Serie di Fourier n-uple . . . . .	160
<b>40</b>	<b>Appendice 10, Generalizzazione dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione</b>	<b>165</b>
40.1	Sistemi ortogonali di funzioni . . . . .	165
40.2	Sviluppo in serie di Fourier generalizzata . . . . .	165
40.3	Calcolo dei coefficienti . . . . .	165
40.4	Esempio con i polinomi di Legendre . . . . .	166
40.5	Osservazioni . . . . .	167
<b>41</b>	<b>Appendice 11, Serie di Fourier in forma compatta</b>	<b>168</b>
41.1	Proposizione . . . . .	168
41.2	Dimostrazione . . . . .	168
<b>42</b>	<b>Appendice 12, Teorema sul minimo dello scarto quadratico</b>	<b>171</b>
42.1	Ipotesi . . . . .	171
42.2	Tesi . . . . .	171
42.3	Dimostrazione . . . . .	172
<b>43</b>	<b>Appendice 13. Esempi di convergenza della serie di Fourier per varie tipologie di funzioni</b>	<b>174</b>
43.1	Funzioni Continue su $\mathbb{R}$ . . . . .	174
43.2	Funzioni Continue a Tratti . . . . .	174
43.3	Funzioni Continue e Monotone . . . . .	175
43.4	Funzioni continue e monotone a tratti . . . . .	175
43.5	Funzioni regolari (infinitamente derivabili) . . . . .	176
43.6	Funzioni regolari a tratti . . . . .	176
43.7	Funzioni continue e regolari . . . . .	177
43.8	Funzioni continue e regolari a tratti . . . . .	177
43.9	Funzioni Sommabili ( $L^1([-\pi, \pi])$ ) . . . . .	178
43.10	Funzioni continue e a quadrato sommabile . . . . .	179
43.11	Esempi di funzioni in $L^\infty([-\pi, \pi])$ . . . . .	180
43.12	Funzioni che NON appartengono a $L^\infty$ . . . . .	181
43.13	Riassunto . . . . .	181

<b>44 Appendice 14. Teorema sulle proprietà asintotiche dei coefficienti di Fourier</b>	<b>182</b>
44.1 Ipotesi . . . . .	182
44.2 Tesi . . . . .	182
44.3 Dimostrazione . . . . .	182
<b>45 Appendice 15. Se <math>f(x) \in L^2([a, b])</math> allora è anche <math>f(x) \in L^1([a, b])</math></b>	<b>183</b>
45.1 Ipotesi . . . . .	183
45.2 Tesi . . . . .	183
45.3 Dimostrazione . . . . .	183
45.3.1 Uso della disuguaglianza di Hölder . . . . .	183
45.4 Conclusione . . . . .	184
<b>46 Appendice 16. Convergenza uniforme per funzioni con discontinuità di seconda specie</b>	<b>185</b>
<b>47 Appendice 17. Serie di Fourier in forma complessa normalizzata</b>	<b>186</b>
47.1 Definizione della Serie di Fourier in Forma Complessa . . . . .	186
47.2 Forma Normalizzata . . . . .	186
47.3 Proprietà della Base Ortonormale . . . . .	186
47.4 Condizioni di Convergenza . . . . .	187
<b>48 Appendice 18. Convergenza in media quadratica o in norma <math>L^2</math> e disuguaglianza di Bessel</b>	<b>188</b>
48.0.1 Dimostrazione della convergenza quadratica media . . . . .	189
48.1 Errore Quadratico Medio . . . . .	189
48.1.1 Aggiungeriamo e sottraiamo Somme di $c_k^2$ . . . . .	191
48.1.2 Minimizzazione e Scelta Ottimale di $c_k$ . . . . .	191
48.1.3 Disuguaglianza di Bessel . . . . .	192
<b>49 Appendice 19. Classificazione delle Funzioni e Proprietà della Serie di Fourier</b>	<b>193</b>
<b>50 Appendice 20. Riflessioni sui vari modi di esprimere le condizioni di Dirichlet</b>	<b>195</b>
50.1 Espressione classica delle condizioni di Dirichlet . . . . .	197
50.2 Espressione alternativa in termini di variazione limitata . . . . .	197
50.3 Condizione in termini di continuità e discontinuità . . . . .	198
50.4 Regolarità e convergenza della serie di Fourier . . . . .	198
50.4.1 Regolarità minima richiesta (condizioni classiche) . . . . .	198
50.4.2 Maggiore regolarità e miglioramenti nella convergenza . . . . .	199
50.4.3 Regolarità in spazi di Sobolev . . . . .	199
50.5 Conclusione . . . . .	199
<b>51 Appendice 21. Serie di Fourier e spazi di Hilbert</b>	<b>201</b>

<b>52 Appendice 22. Serie di Fourier con singolarità non di tipo salto</b>	<b>203</b>
52.1 Esclusione delle Singolarità . . . . .	203
52.1.1 Serie di Fourier su Intervalli con Esclusione di Singolarità	203
52.1.2 Effetto della Singolarità sulla Convergenza . . . . .	203
52.1.3 Risultati Tipici . . . . .	204
52.1.4 Conclusione . . . . .	204
52.2 Esempio . . . . .	205
52.2.1 Definizione della Serie di Fourier . . . . .	205
52.2.2 Esclusione della Singolarità . . . . .	205
52.2.3 Calcolo di $a_n$ . . . . .	206
52.2.4 Calcolo di $b_n$ . . . . .	207
52.2.5 Scrittura della Serie di Fourier . . . . .	207
52.3 Esempio . . . . .	207
52.3.1 Verifica delle Condizioni per la Serie di Fourier . . . . .	207
52.3.2 Analisi dell'Integrale Vicino a $x = 0$ . . . . .	208
52.3.3 Conclusione . . . . .	208
52.3.4 Osservazione . . . . .	208
<b>53 Appendice 23. Modulazione. Traslazione dei coefficienti di Fourier mediante modulazione (Teorema di modulazione spettrale)</b>	<b>209</b>
<b>54 Appendice 24. Teorema di Dini per la Serie di Fourier</b>	<b>212</b>
54.0.1 Ipotesi . . . . .	212
54.0.2 Tesi . . . . .	212
54.0.3 Dimostrazione . . . . .	212
54.0.4 Stima dell'errore . . . . .	213
54.0.5 Conclusione . . . . .	213
<b>55 Appendice 25. Teorema di Riesz-Fischer: Versione Complessa</b>	<b>214</b>
55.1 Teorema di Riesz-Fischer . . . . .	214
55.1.1 Ipotesi . . . . .	214
55.1.2 Tesi . . . . .	214
55.1.3 Parte inversa.Ipotesi . . . . .	214
55.1.4 Parte inversa.Tesi . . . . .	215
55.1.5 Dimostrazione (Versione Complessa) . . . . .	215
55.1.6 Parte 1: Da $L^2$ a $l^2$ (Disuguaglianza di Bessel e Identità di Parseval) . . . . .	215
55.1.7 Parte 2: Da $l^2$ a $L^2$ (Il Cuore del Teorema) . . . . .	216
55.1.8 Passo 1: Definizione delle Somme Parziali . . . . .	217
55.1.9 Passo 2: Dimostrare che $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è una Successione di Cauchy in $L^2$ . . . . .	217
55.1.10 Passo 3: Utilizzo della Completezza di $L^2$ . . . . .	218
55.1.11 Passo 4: Verificare che i $c_n$ sono i Coefficienti di Fourier di $f$	218
55.1.12 Passo 5: Unicità della Funzione $f$ . . . . .	219
55.1.13 Teorema di Riesz-Fischer, Versione Reale . . . . .	219

55.1.14	Ipotesi . . . . .	219
55.1.15	Tesi . . . . .	219
55.1.16	Ipotesi. Parte Inversa . . . . .	219
55.1.17	Tesi. Parte Inversa . . . . .	220
55.1.18	Dimostrazione (Versione Reale) . . . . .	220
55.1.19	Parte 1: Da $L^2$ a $l^2$ (Disuguaglianza di Bessel e Identità di Parseval) . . . . .	220
55.1.20	Parte 2: Da $l^2$ a $L^2$ (Il Cuore del Teorema) . . . . .	221
55.1.21	Passo 1: Definizione delle Somme Parziali . . . . .	222
55.1.22	Passo 2: Dimostrare che $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è una Successione di Cauchy in $L^2$ . . . . .	222
55.1.23	Passo 3: Utilizzo della Completezza di $L^2$ . . . . .	222
55.1.24	Passo 4: Verificare che i $a_n$ e $b_n$ sono i Coefficienti di Fourier di $f$ . . . . .	222
55.1.25	Passo 5: Unicità della Funzione $f$ . . . . .	223
<b>56</b>	<b>Appendice 26. Come ricondurre nello sviluppo in serie di Fourier una funzione di periodo <math>T = b - a</math> in <math>[a, b]</math>, ad una funzione di periodo <math>2\pi</math> da <math>-\pi</math> a <math>\pi</math>.</b>	<b>225</b>
<b>57</b>	<b>Appendice 27. Teorema di Unicità della Serie di Fourier</b>	<b>228</b>
57.0.1	ipotesi . . . . .	228
57.0.2	tesi . . . . .	229
57.0.3	Dimostrazione . . . . .	229
57.0.4	Importanza e Implicazioni . . . . .	230
<b>58</b>	<b>Appendice 28. Teoremi Avanzati sulle Serie di Fourier</b>	<b>231</b>
<b>59</b>	<b>Appendice 29. Determinazione della Funzione da una Serie di Fourier: Approccio e Analisi</b>	<b>237</b>
59.1	Passaggi chiave nell'Indagine per la ricostruzione della Funzione .	237
59.1.1	Tabella Riassuntiva: Corrispondenza Andamento dei Coefficienti e Regolarità della Funzione . . . . .	238
59.1.2	Esempio: Ricavare $f(x)$ da una Serie di Fourier Data . . .	240
<b>60</b>	<b>Appendice 30. Determinazione del Periodo di Funzioni Periodiche Generiche</b>	<b>244</b>
60.1	Definizione Rigorosa di Funzione Periodica e Periodo Fondamentale	244
60.2	Proprietà dei Periodi . . . . .	244
60.3	Determinazione del Periodo Fondamentale per Specifici Tipi di Funzioni . . . . .	245
60.3.1	Funzioni Trigonometriche Fondamentali . . . . .	245
60.3.2	Somme e Prodotti di Funzioni Periodiche . . . . .	245
60.3.3	Funzioni Definite a Tratti o Generiche . . . . .	246
60.4	Considerazioni su Funzioni Non Periodiche . . . . .	247

<b>ESERCIZI</b>	<b>249</b>
<b>61 Introduzione</b>	<b>251</b>
61.1 Introduzione agli Esercizi sulle Serie di Fourier . . . . .	251
61.2 Cosa sono le Serie di Fourier? . . . . .	251
61.3 Obiettivi degli Esercizi . . . . .	251
61.4 Struttura degli Esercizi . . . . .	252
61.5 Perché è Importante Studiare le Serie di Fourier? . . . . .	252
<b>62 Esercizi</b>	<b>253</b>
62.1 Esercizio . . . . .	253
62.1.1 Calcolo di $a_0$ . . . . .	254
62.1.2 Calcolo di $a_n$ . . . . .	254
62.1.3 Calcolo di $b_n$ . . . . .	255
62.1.4 Serie di Fourier finale . . . . .	256
62.1.5 Valori della funzione in $x = -5$ e $x = 5$ . . . . .	256
62.1.6 Tipo di convergenza . . . . .	256
62.2 Esercizio . . . . .	257
62.2.1 Serie di Fourier . . . . .	257
62.2.2 Calcolo del Coefficiente $a_0$ . . . . .	258
62.2.3 Calcolo dei Coefficienti $a_n$ . . . . .	259
62.2.4 Calcolo dei Coefficienti $b_n$ . . . . .	259
62.2.5 Serie di Fourier Completa . . . . .	259
62.2.6 Convergenza della Serie di Fourier . . . . .	260
62.2.7 Fenomeno di Gibbs . . . . .	260
62.2.8 Conclusioni . . . . .	261
62.3 Esercizio . . . . .	261
62.3.1 Serie di Fourier della funzione . . . . .	261
62.3.2 Calcolo del coefficiente $a_0$ . . . . .	261
62.3.3 Calcolo del coefficiente $a_n$ . . . . .	262
62.3.4 Calcolo del coefficiente $b_n$ . . . . .	262
62.3.5 Serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ . . . . .	263
62.4 Esercizio . . . . .	263
62.4.1 Calcolo del termine costante $a_0$ . . . . .	264
62.4.2 Calcolo del coefficiente $a_n$ . . . . .	265
62.4.3 Calcolo del coefficiente $b_n$ . . . . .	265
62.4.4 Serie di Fourier completa . . . . .	266
62.4.5 Discussione sulla sviluppabilità . . . . .	266
62.4.6 Periodicità . . . . .	267
62.4.7 Continuità . . . . .	267
62.4.8 Discontinuità agli estremi dell'intervallo . . . . .	267
62.4.9 Tipo di Convergenza della Serie di Fourier per $y = e^x$ . . . . .	267
62.4.10 Condizioni di Dirichlet per la Convergenza della Serie di Fourier . . . . .	267
62.4.11 Convergenza della Serie di Fourier . . . . .	268
62.4.12 Convergenza Puntuale . . . . .	268



## 3 Secondo teorema di Dirichlet: prima parte sulla sviluppabilità in serie di Fourier

### 3.1 Ipotesi

Sia  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{I} = (a, b) = (-\pi, \pi)$  una funzione periodica con periodo  $2\pi$  tale che :

1.  $f(x)$  sia **continua e monotona a tratti** in ogni intervallo finito  $I = [a, b]$  ;
2.  $f(x)$  abbia un numero finito di **discontinuità di prima specie** in un periodo;
3.  $f(x)$  sia **integrabile su un periodo**, ovvero a **variazione limitata**, cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty. \quad (37)$$

4.  $f(x)$  sia **regolare** ovvero  $C^1$  (che implica la continuità della derivata e della funzione, cosa già contenuta nel primo punto).

### 3.2 Tesi

La funzione  $f(x)$  è sviluppabile in una serie di Fourier della forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (38)$$

dove i coefficienti della serie di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (39)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1, \quad (40)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1. \quad (41)$$

Risulta inoltre:

- a) La serie di Fourier converge puntualmente nell'intervallo aperto  $(-\pi, \pi)$ , ovvero in ogni punto interno dell'intervallo.
- b) Nei punti di discontinuità della funzione, la serie di Fourier converge puntualmente al valore medio tra i limiti destro e sinistro. Ad esempio, se  $c \in (-\pi, \pi)$

è un punto di discontinuità, di prima specie, allora:

$$s(c) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \right). \quad (42)$$

c) Per  $x = \pm\pi$ , cioè agli estremi dell'intervallo, la serie di Fourier converge puntualmente a:

$$s(\pi) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \right), \quad (43)$$

e analogamente:

$$s(-\pi) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) \right). \quad (44)$$

Inoltre in ogni intervallo  $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$  dove la funzione è continua, la convergenza è anche uniforme.

## 4 Secondo Teorema di Dirichlet: seconda parte sulla Convergenza Uniforme della serie di Fourier

### 4.1 Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , definita su  $[-\pi, \pi]$ , che soddisfa le seguenti condizioni:

1. **Continuità:**  $f(x)$  è continua su  $[-\pi, \pi]$ .
2. **Variazione limitata sia la funzione che la sua derivata:** La derivata generalizzata di  $f(x)$  è a variazione limitata su  $[-\pi, \pi]$ , cioè  $f(x)$  ha una variazione limitata su  $[-\pi, \pi]$ .
3. **Somme parziali uniformemente limitate:** Le somme parziali della serie di Fourier  $S_N(x)$  associate a  $f(x)$  sono uniformemente limitate, cioè esiste una costante  $C$  tale che  $|S_N(x)| \leq C$  per ogni  $N$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

### 4.2 Tesi

Allora, la serie di Fourier di  $f(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ . Si fa notare che anche qui la condizione di convergenza uniforme è solo sufficiente.

### 4.3 Dimostrazione

#### Passo 1: Scrittura della Serie di Fourier e delle Somme Parziali

La serie di Fourier di  $f(x)$  è data dalla somma:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (45)$$

dove i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  sono definiti come:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (46)$$

#### Passo 2: Utilizzo del Nucleo di Dirichlet

Definiamo il nucleo di Dirichlet come:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx) + i \sum_{n=1}^N \sin(nx). \quad (47)$$

Si può notare inoltre che essendo:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^N (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}. \quad (48)$$

Tenendo conto che  $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ , si ha che la somma:

$$\sum_{k=-n}^n \sin(kx) = 0. \quad (49)$$

Quindi, il nucleo di Dirichlet  $D_n(x)$  è uguale a:

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx). \quad (50)$$

Se  $f(x)$  è una funzione  $2\pi$ -periodica e integrabile, allora la somma parziale di ordine  $N$  della serie di Fourier può essere scritta come una convoluzione

$$S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt, \quad (51)$$

dove  $D_N(x)$  è il nucleo di Dirichlet. Questo ci dice che la somma parziale è un'approssimazione di  $f$  ottenuta smussando  $f$  tramite  $D_N(x)$ . Il comportamento di  $D_N(x)$  è cruciale per capire dove e come la serie di Fourier converge.

In particolare, nei punti di continuità converge a  $f(x)$ , nei punti di discontinuità di prima specie converge alla media dei limiti laterali. Se  $D_N(x)$  non è sommabile, la somma cresce come  $\log(N)$ . Questo rende più difficile la convergenza. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità diventa più pronunciata man mano che ci si avvicina ad esso. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità spiega il fenomeno di Gibbs. La somma parziale può essere scritta come una convoluzione di  $f(x)$  con il nucleo di Dirichlet:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy. \quad (52)$$

**Passo 3: Proprietà delle Funzioni a Variazione Limitata** Poiché  $f(x)$  è a variazione limitata su  $[-\pi, \pi]$ , possiamo utilizzare il fatto che la funzione  $f(x)$  è continua e a tratti monotona (segnalando che le sue derivate esistono quasi ovunque e che la variazione totale di  $f(x)$  è finita). Di conseguenza, i coefficienti di Fourier  $a_n$  e  $b_n$  decrescono almeno come  $\frac{1}{n}$ .

**Passo 4: Stima dell'Errore di Convergenza**

Per dimostrare la convergenza uniforme, consideriamo la differenza tra la somma parziale  $S_N(x)$  e la funzione  $f(x)$ :

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy - f(x). \quad (53)$$

Per  $D_N(x)$ , possiamo stimare che:

$$\sup_x \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \right| \leq CV(f), \quad (54)$$

dove  $V(f)$  è la variazione totale di  $f(x)$  su  $[-\pi, \pi]$  e  $C$  è una costante indipendente da  $N$ .

**Passo 5: Convergenza Uniforme**

Poiché  $f(x)$  è a variazione limitata, l'errore  $|S_N(x) - f(x)|$  tende a zero uniformemente per  $x$  quando  $N \rightarrow \infty$ . In altre parole, il massimo errore tra la somma parziale  $S_N(x)$  e la funzione  $f(x)$  tende a zero man mano che  $N$  cresce:

$$\sup_x |S_N(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty. \quad (55)$$

**Conclusione**

Poiché il massimo errore tende a zero, la serie di Fourier di  $f(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ , come richiesto. Pertanto, abbiamo dimostrato che la serie di Fourier di una funzione continua, a tratti monotona e regolare a tratti converge uniformemente alla funzione stessa.





Sante Centurioni

---

# Serie di Fourier

## Teoria ed Esercizi

