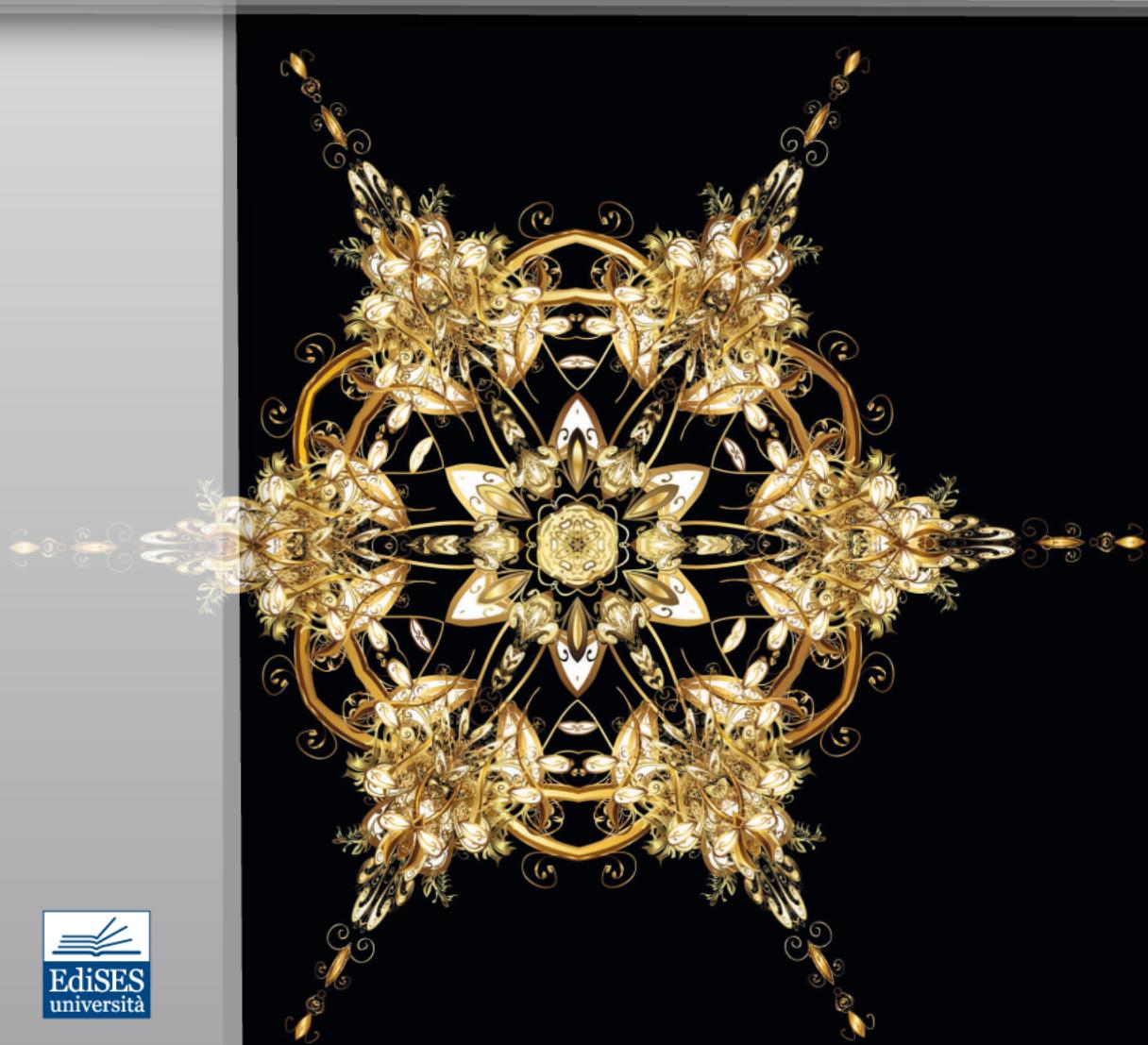


Sante Centurioni

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi



Sante Centurioni

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi



Sante Centurioni
Serie di Fourier - Teoria ed Esercizi
Copyright © 2025, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2029 2028 2027 2026 2025

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.

L'Editore

L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.

In copertina

Nell'idea dell'autore la copertina di questo libro non vuole essere una semplice decorazione, ma una metafora visiva dei concetti che verranno esplorati. L'immagine, un intricato ornamento dorato, rappresenta una funzione complessa e apparentemente caotica. Lo sfondo nero, il "vuoto" assoluto, simboleggia l'universo delle possibilità matematiche, da cui tutto ha origine. Le serie di Fourier sono lo strumento che ci permette di illuminare questo vuoto, scomponendo la complessità dell'ornamento (la funzione) nei suoi elementi costitutivi più semplici e armoniosi: le onde sinusoidali. Come ogni petalo, curva e linea dell'immagine si uniscono per formare un'opera d'arte completa, così le serie di Fourier dimostrano che ogni segnale, anche il più elaborato, può essere visto come la somma di componenti elementari.

In questo libro, si imparerà a fare esattamente questo: a dare ordine al disordine, a trovare l'armonia nascosta nelle funzioni e a illuminare la bellezza della matematica.

Stampato presso
Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

Per conto della
EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

ISBN 978 88 3623 240 6

www.edises.it
assistenza.edises.it

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma assistenza.edises.it

Ai miei genitori **Giuseppe** e **Franca**
che mi hanno donato il bene più prezioso: *l'amore*.
Senza la loro vicinanza spirituale non avrei mai
raggiunto quello che sono ora.

A mia moglie **Rita**
che mi ha sostenuto donandomi la presenza di tutta
una vita.

A mia figlia **Clarissa**
che mi ha donato la felicità di un padre appagato e
orgoglioso.

..

Prefazione

Questo libro è la raccolta e la rielaborazione delle lezioni da me tenute presso l'Università Sapienza di Roma nel corso di Analisi 2. Vuole essere un trattato elementare della teoria delle serie di Fourier. E' concepito come risorsa fondamentale per studenti universitari e professionisti impegnati nelle discipline scientifiche e ingegneristiche. Il testo è stato strutturato per fornire una comprensione approfondita dei principi fondamentali, parallelamente a un'ampia sezione dedicata all'applicazione pratica tramite esercizi mirati. La prima parte del libro è dedicata all'esposizione rigorosa dei concetti teorici essenziali. Ogni capitolo è stato sviluppato con l'obiettivo di presentare la materia in modo chiaro e coerente, privilegiando la derivazione logica e l'analisi critica dei modelli. Non ci si è limitati alla mera enunciazione di formule o definizioni; al contrario, si è cercato di illuminare il "perché" dietro ogni principio, incoraggiando un approccio analitico e sistematico. L'enfasi è posta sulla solidità concettuale, elemento indispensabile per lo sviluppo di competenze risolutive robuste. La trattazione include dimostrazioni dettagliate e spiegazioni esaustive, accompagnate da esempi risolti che illustrano l'applicazione diretta dei concetti teorici. Questa sezione mira a costruire una base di conoscenza ferma, preparatoria per affrontare problematiche di crescente complessità. Il libro si presta a numerosi approfondimenti proposti per mezzo di numerose appendici. La seconda parte del volume è integralmente dedicata alla pratica. Qui si troverà una vasta collezione di esercizi, progettati per consolidare la comprensione teorica e sviluppare le capacità di problem-solving. La selezione include un'ampia gamma di tipologie, dai problemi di verifica concettuale a quelli che richiedono l'integrazione di molteplici principi. La risoluzione di questi esercizi è cruciale per la piena assimilazione del materiale. Ogni problema è un'opportunità per applicare la teoria in contesti vari, affinare il ragionamento critico e identificare le strategie risolutive più efficienti. La pratica costante con questi quesiti rafforzerà la vostra abilità nell'affrontare sfide analitiche e numeriche, trasformando la conoscenza astratta in competenza operativa e applicata. Questo libro si propone dunque come uno strumento indispensabile per chiunque desideri non solo acquisire conoscenza, ma anche sviluppare una profonda capacità di applicazione pratica nel proprio campo scientifico. L'equilibrio tra rigore teorico ed estensiva pratica rende questo lavoro una risorsa completa per un percorso formativo e professionale.

S. C.

Roma, 10 Luglio 2025

Indice Generale

TEORIA	31
1 Introduzione	33
1.1 Generalità	33
1.2 Osservazione sul coefficiente a_0	35
2 Primo teorema di Dirichlet	36
2.1 Ipotesi	36
2.2 Tesi	36
2.3 Dimostrazione	37
2.3.1 Passo 1: Espressione della somma parziale	37
2.3.2 Passo 2: Analisi del comportamento della somma parziale	38
2.3.3 Caso 1: x è un punto di continuità	38
2.3.4 Caso 2: x è un punto di discontinuità di prima specie . .	38
2.3.5 Conclusione	38
3 Secondo teorema di Dirichlet: prima parte sulla sviluppabilità in serie di Fourier	39
3.1 Ipotesi	39
3.2 Tesi	39
4 Secondo Teorema di Dirichlet: seconda parte sulla Convergenza Uniforme della serie di Fourier	40
4.1 Ipotesi	40
4.2 Tesi	40
4.3 Dimostrazione	41
5 Teorema di Weierstrass sulla Convergenza totale della serie di Fourier e convergenza uniforme	43
5.1 Ipotesi	43
5.2 Tesi	43
5.3 Dimostrazione	43

6 Teorema 2 sulla convergenza totale per funzioni $f \in L^2(I)$	44
6.1 Ipotesi	44
6.2 Tesi	44
6.3 Dimostrazione	44
7 Osservazione sulla convergenza della Serie di Fourier e il Primo Criterio di Dirichlet	46
7.1 Divergenza Puntuale della Serie di Fourier per Funzioni Continue e Monotone	47
7.2 Conclusione	51
8 Esempio di funzione non sviluppabile in serie di Fourier	52
8.1 Motivo per cui non è sviluppabile in serie di Fourier	52
8.2 Condizione di sviluppabilità in serie di Fourier	52
8.3 Esempio di funzione continua a tratti con discontinuità di prima specie	54
9 Riflessioni sui due criteri di Dirichlet	54
10 Osservazioni sulla convergenza uniforme della serie di Fourier	54
10.1 Convergenza uniforme: Funzione triangolare	57
11 Teorema sulla convergenza uniforme	59
11.1 Ipotesi	59
11.2 Tesi	60
12 Teorema sulla Sommabilità Assoluta dei Coefficienti di Fourier	60
12.1 Ipotesi	60
12.2 Tesi	60
12.3 Dimostrazione	61
13 Teorema. Coefficienti di Fourier per funzioni pari	63
13.1 Ipotesi	63
13.2 Tesi	63
13.3 Dimostrazione	64
13.4 In sintesi	64
13.4.1 Esempio 1	64
13.4.2 Esempio 2	66
14 Ulteriori considerazioni sulla convergenza totale di una serie di Fourier	69
14.1 Considerazioni sulle condizioni per la convergenza totale	69
14.2 Considerazioni sul teorema di Weierstrass e convergenza totale e uniforme	69
14.3 Funzioni con discontinuità	71
14.4 Esempio della funzione $f(x) = x $	71
14.5 Riassunto	71

15 Esercizio	72
15.0.1 Calcolo dei coefficienti di Fourier	73
15.0.2 Serie di Fourier	74
15.0.3 Convergenza nei punti di discontinuità	75
16 Ulteriori importanti considerazioni	76
16.1 Considerazione 1, sulla integrazione e derivazione della serie di Fourier	76
16.2 Considerazione 2, sugli integrali si seno e coseno sul periodo $2L$ da $-L$ ad L	76
16.2.1 Dimostrazione	76
16.3 Considerazione 3, sugli integrali seno-seno, coseno-coseno, seno-coseno sul periodo	78
16.4 Considerazione 4, ulteriori considerazioni sullo sviluppo di Fourier di funzioni pari e dispari	81
17 Determinazione dei coefficienti di Fourier	82
17.1 Calcolo di a_0	82
17.2 Calcolo di a_n	83
17.3 Calcolo di b_n	84
18 Sintesi sulle condizioni di Convergenza Puntuale di una Serie di Fourier	85
18.0.1 Periodicità della funzione	85
18.0.2 Continuità a tratti	85
18.0.3 Derivata continua a tratti	85
18.1 Teorema di Dirichlet	86
18.1.1 Risultati nei punti di continuità e discontinuità	86
18.1.2 Decadimento dei coefficienti di Fourier	86
19 Sintesi sulle condizioni di convergenza uniforme di una serie di Fourier	86
19.1 Continuità e periodicità della funzione	86
19.2 Condizione di Lipschitz	86
19.3 Continuità a tratti della derivata	87
19.4 Decadimento rapido dei coefficienti di Fourier	87
19.5 Convergenza assoluta implica convergenza uniforme	87
19.6 Teorema di Dirichlet	87
19.7 Criterio pratico	87
20 Sintesi sulle condizioni di Convergenza Totale di una Serie di Fourier	88
20.1 Periodicità della funzione	88
20.2 Continuità e derivata continua a tratti	88
20.3 Condizione di Lipschitz	88
20.4 Decadimento dei coefficienti di Fourier	88

20.5 Criterio di convergenza totale (Test di Weierstrass)	89
20.6 Risultati nei punti di discontinuità	89
20.7 Nota sul criterio di Dirichlet per la convergenza uniforme	89
20.8 2. Regolarità della funzione	89
20.9 3. Convergenza totale	89
20.104. Risultato finale	90
20.10.1 Nota	90
21 Teorema sulla sommabilità quadratica dei coefficienti di Fourier	90
21.1 Ipotesi	90
21.2 Tesi	91
21.3 Dimostrazione	91
21.3.1 1. Sommabilità quadratica dei coefficienti a_n :	91
21.3.2 2. Sommabilità quadratica dei coefficienti b_n :	91
21.4 Conclusione:	92
22 Identità di Parseval	92
22.1 Teorema di Parseval	92
22.2 Ipotesi	92
22.3 Tesi	92
22.4 Dimostrazione	92
23 Serie di Fourier in forma complessa	93
24 Esempio	94
24.0.1 Calcolo dei coefficienti c_n	95
24.0.2 Valutazione dei termini	95
24.0.3 Serie di Fourier complessa della funzione $f(x) = x$	96
24.0.4 Relazione tra c_n e c_{-n}	96
24.0.5 Serie di Fourier reale	97
24.0.6 Risultato finale	97
25 Trasformazione della serie di Fourier dalla forma reale alla forma complessa	97
25.0.1 Forma Reale della Serie di Fourier	97
25.0.2 Utilizzare le Relazioni di Eulero	97
25.0.3 Sostituire nelle espressioni della serie	98
25.0.4 Raccogliere i termini simili	98
25.0.5 Identificare i Coefficienti Complessi C_n	98
25.0.6 Unificare la Notazione e Scrivere la Serie Completa	98
25.0.7 Conclusione	99
26 Trasformazione della serie di Fourier dalla forma complessa alla forma reale	99
26.1 Separazione del termine costante	99
26.2 Somma dei termini complessi $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$	99

26.3	Passaggio alla forma reale	100
26.4	Ricetta per i coefficienti	100
26.5	Forma finale	101
27	Derivazione della serie di Fourier	102
27.1	Teorema 1 di derivazione per serie di Fourier	102
27.1.1	Ipotesi:	102
27.1.2	Tesi:	102
27.1.3	Dimostrazione:	102
27.2	Teorema 2 di derivazione per serie di Fourier	104
27.2.1	Ipotesi	104
27.2.2	Tesi	104
27.2.3	Dimostrazione	104
27.3	Teorema 3 di derivazione delle Serie di Fourier termine a termine	105
27.3.1	Ipotesi:	105
27.3.2	Tesi:	106
27.3.3	Dimostrazione	106
27.4	Teorema 4: Derivazione di Ordine Superiore	107
27.4.1	Ipotesi:	107
27.4.2	Tesi:	107
27.4.3	Dimostrazione:	107
27.5	Teorema 5 di derivazione delle serie di Fourier	107
27.5.1	Ipotesi:	107
27.5.2	Tesi:	107
27.5.3	Dimostrazione:	108
28	Sintesi sei teoremi di Derivazione della Serie di Fourier	111
28.1	Teorema di Derivabilità Puntuale	111
28.2	Teorema di Derivabilità in L^2	111
28.3	Teorema di Derivabilità Uniforme	111
28.4	Teorema di Derivabilità per Funzioni a Variazione Limitata	112
28.5	Teorema per Funzioni Lipschitziane	112
28.6	Teorema di Convergenza della Serie di Fourier della Derivata	112
29	Integrazione di una serie di Fourier	113
29.1	Teorema 1 di integrazione di una serie di Fourier	113
29.1.1	Ipotesi	113
29.1.2	Tesi	113
29.1.3	Dimostrazione	113
29.2	Lemma : Integrazione delle Serie di Fourier	114
29.2.1	Ipotesi	114
29.2.2	Tesi	114
29.2.3	Dimostrazione	115
29.2.4	Definizione della Funzione Integrale	115
29.2.5	Integrazione dei Termini della Serie di Fourier	115
29.2.6	Uniforme Convergenza della Serie	115

29.2.7	Conclusione	116
29.3	Teorema relativo alla primitiva di una funzione periodica	116
29.4	Ipotesi	116
29.5	Tesi	116
29.6	Dimostrazione	116
29.7	Teorema 1: Integrazione delle Serie di Fourier con Continuità . .	117
29.7.1	Ipotesi	117
29.7.2	Tesi	117
29.7.3	Dimostrazione	118
29.8	Corollario: per funzioni $f \in L^2$	118
29.9	Teorema 2: Integrazione con Derivata Integrabile	119
29.9.1	Ipotesi	119
29.9.2	Tesi	119
29.9.3	Dimostrazione	119
29.10	Teorema 4: Integrazione delle Serie di Fourier termine a termine .	120
29.10.1	Ipotesi	120
29.10.2	Tesi	120
29.10.3	Dimostrazione	120
30	Sintesi dei teoremi di integrazione delle serie di Fourier	120
30.1	Teorema di Integrazione Termine a Termine (Funzioni C^1 a tratti)	120
30.2	Teorema di Integrazione in L^2	121
30.3	Teorema di Integrazione Uniforme	121
30.4	Teorema di Integrazione con Funzioni a Variazione Limitata . .	121
30.5	Teorema di Integrazione per Funzioni Lipschitziane	121
30.6	Teorema di Convergenza della Derivata	122
31	Appendice 1. Identità importante per	125
	$\sum_{n=0}^N \cos(ny)$	
31.1	Proposizione	125
31.1.1	Dimostrazione	125
32	Appendice 2. Formula integrale (Integrale di Dirichlet) per la somma parziale della serie di Fourier	127
32.1	Proposizione	127
32.1.1	Passo 1: Definizione della somma parziale della serie di Fourier	127
32.1.2	Passo 2: Somma parziale della serie esponenziale	128
32.1.3	Passo 3: Conclusione	129
32.2	Modo alternativo di ricavare la somma parziale non usando la forma esponenziale della serie di Fourier	129
33	Appendice 3, Serie di Fourier di operazioni tra funzioni	132
33.1	Introduzione	132
33.2	1. Somma di Funzioni	132
33.2.1	Serie di Fourier di $g(x) + h(x)$	132

33.2.2	2. Prodotto di Funzioni	133
33.2.3	3. Derivata di una Funzione	133
33.2.4	4. Integrazione di una Funzione	133
33.2.5	5. Traslazione Temporale	134
33.2.6	6. Modulazione	134
33.2.7	Esempi	134
33.2.8	Linearità dei coefficienti di Fourier	134
33.2.9	Conclusione	135
34	Appendice 4. Operatori di Fourier	136
34.1	Definizione dell'Operatore di Fourier	136
34.2	Operatore Inverso	136
34.3	Operatore di Fourier come Trasformazione Lineare	136
34.4	Rappresentazione Matriciale	137
34.5	Conclusioni	137
35	Appendice 5. Rappresentazione Matriciale della Serie di Fourier	138
35.1	Passaggi per la Rappresentazione Matriciale	138
35.2	Coefficiente di Fourier	138
35.3	Rappresentazione Vettoriale	138
35.4	Matrice di Fourier	139
35.5	Prodotto Matriciale per il Calcolo dei Coefficienti	139
35.6	Esempio con Funzione Discretizzata	139
35.7	Ricostruzione della Funzione	140
35.8	Rappresentazione Matriciale	140
35.9	Conclusioni	140
35.10	Esercizio	140
35.10.1	Calcolo dei Coefficienti di Fourier	141
36	Appendice 6, Sintesi delle Proprietà per Ricavare l'Anti-trasformazione	145
36.1	1. Periodicità della Funzione	145
36.2	2. Serie di Fourier	145
36.3	3. Matrice di Fourier	145
36.4	4. Matrice Inversa di Fourier	146
36.5	5. Ricostruzione della Funzione	146
36.6	6. Ortogonalità dei Coefficienti di Fourier	146
37	Appendice 7. Serie di Fourier di una funzione traslata	148
37.1	Teorema di traslazione	148
37.1.1	Serie di Fourier traslata in forma complessa	148
37.1.2	Serie di Fourier traslata in forma reale	148
37.1.3	Conclusione	150
37.2	Esempio di Traslazione e Calcolo dei Coefficienti di Fourier	150
37.2.1	Calcolo dei Coefficienti di Fourier per $f(x) = \cos(x)$	150
37.2.2	Traslazione della Funzione	151
37.3	Corollario di traslazione	152

37.4	Ipotesi	152
37.5	Tesi	152
37.6	Dimostrazione	152
38	Appendice 8. Ortogonalità di una successione di funzioni	154
38.1	Spazi di Hilbert e completezza	154
38.2	Esempi di successioni ortogonali	154
38.3	Convergenza delle successioni di funzioni ortogonali	155
39	Appendice 9. Serie di Fourier multiple	157
39.1	Serie di Fourier Doppie	157
39.2	Serie di Fourier n-uple	160
40	Appendice 10, Generalizzazione dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione	165
40.1	Sistemi ortogonali di funzioni	165
40.2	Sviluppo in serie di Fourier generalizzata	165
40.3	Calcolo dei coefficienti	165
40.4	Esempio con i polinomi di Legendre	166
40.5	Osservazioni	167
41	Appendice 11, Serie di Fourier in forma compatta	168
41.1	Proposizione	168
41.2	Dimostrazione	168
42	Appendice 12, Teorema sul minimo dello scarto quadratico	171
42.1	Ipotesi	171
42.2	Tesi	171
42.3	Dimostrazione	172
43	Appendice 13. Esempi di convergenza della serie di Fourier per varie tipologie di funzioni	174
43.1	Funzioni Continue su \mathbb{R}	174
43.2	Funzioni Continue a Tratti	174
43.3	Funzioni Continue e Monotone	175
43.4	Funzioni continue e monotone a tratti	175
43.5	Funzioni regolari (infinitamente derivabili)	176
43.6	Funzioni regolari a tratti	176
43.7	Funzioni continue e regolari	177
43.8	Funzioni continue e regolari a tratti	177
43.9	Funzioni Sommabili ($L^1([-\pi, \pi])$)	178
43.10	Funzioni continue e a quadrato sommabile	179
43.11	Esempi di funzioni in $L^\infty([-\pi, \pi])$	180
43.12	Funzioni che NON appartengono a L^∞	181
43.13	Riassunto	181

44 Appendice 14. Teorema sulle proprietà asintotiche dei coefficienti di Fourier	182
44.1 Ipotesi	182
44.2 Tesi	182
44.3 Dimostrazione	182
45 Appendice 15. Se $f(x) \in L^2([a, b])$ allora è anche $f(x) \in L^1([a, b])$	183
45.1 Ipotesi	183
45.2 Tesi	183
45.3 Dimostrazione	183
45.3.1 Uso della diseguaglianza di Hölder	183
45.4 Conclusione	184
46 Appendice 16. Convergenza uniforme per funzioni con discontinuità di seconda specie	185
47 Appendice 17. Serie di Fourier in forma complessa normalizzata	186
47.1 Definizione della Serie di Fourier in Forma Complessa	186
47.2 Forma Normalizzata	186
47.3 Proprietà della Base Ortonormale	186
47.4 Condizioni di Convergenza	187
48 Appendice 18. Convergenza in media quadratica o in norma L^2 e diseguaglianza di Bessel	188
48.0.1 Dimostrazione della convergenza quadratica media	189
48.1 Errore Quadratico Medio	189
48.1.1 Aggiungeremo e sottraiamo Somme di c_k^2	191
48.1.2 Minimizzazione e Scelta Ottimale di c_k	191
48.1.3 Diseguaglianza di Bessel	192
49 Appendice 19. Classificazione delle Funzioni e Proprietà della Serie di Fourier	193
50 Appendice 20. Riflessioni sui vari modi di esprimere le condizioni di Dirichlet	195
50.1 Espressione classica delle condizioni di Dirichlet	197
50.2 Espressione alternativa in termini di variazione limitata	197
50.3 Condizione in termini di continuità e discontinuità	198
50.4 Regolarità e convergenza della serie di Fourier	198
50.4.1 Regolarità minima richiesta (condizioni classiche)	198
50.4.2 Maggiore regolarità e miglioramenti nella convergenza	199
50.4.3 Regolarità in spazi di Sobolev	199
50.5 Conclusione	199
51 Appendice 21. Serie di Fourier e spazi di Hilbert	201

52 Appendice 22. Serie di Fourier con singolarità non di tipo salto	203
52.1 Esclusione delle Singolarità	203
52.1.1 Serie di Fourier su Intervalli con Esclusione di Singolarità	203
52.1.2 Effetto della Singolarità sulla Convergenza	203
52.1.3 Risultati Tipici	204
52.1.4 Conclusione	204
52.2 Esempio	205
52.2.1 Definizione della Serie di Fourier	205
52.2.2 Esclusione della Singolarità	205
52.2.3 Calcolo di a_n	206
52.2.4 Calcolo di b_n	207
52.2.5 Scrittura della Serie di Fourier	207
52.3 Esempio	207
52.3.1 Verifica delle Condizioni per la Serie di Fourier	207
52.3.2 Analisi dell'Integrale Vicino a $x = 0$	208
52.3.3 Conclusione	208
52.3.4 Osservazione	208
53 Appendice 23. Modulazione. Traslazione dei coefficienti di Fourier mediante modulazione (Teorema di modulazione spettrale)	209
54 Appendice 24. Teorema di Dini per la Serie di Fourier	212
54.0.1 Ipotesi	212
54.0.2 Tesi	212
54.0.3 Dimostrazione	212
54.0.4 Stima dell'errore	213
54.0.5 Conclusione	213
55 Appendice 25. Teorema di Riesz-Fischer: Versione Complessa	214
55.1 Teorema di Riesz-Fischer	214
55.1.1 Ipotesi	214
55.1.2 Tesi	214
55.1.3 Parte inversa. Ipotesi	214
55.1.4 Parte inversa. Tesi	215
55.1.5 Dimostrazione (Versione Complessa)	215
55.1.6 Parte 1: Da L^2 a l^2 (Disuguaglianza di Bessel e Identità di Parseval)	215
55.1.7 Parte 2: Da l^2 a L^2 (Il Cuore del Teorema)	216
55.1.8 Passo 1: Definizione delle Somme Parziali	217
55.1.9 Passo 2: Dimostrare che $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è una Successione di Cauchy in L^2	217
55.1.10 Passo 3: Utilizzo della Completezza di L^2	218
55.1.11 Passo 4: Verificare che i c_n sono i Coefficienti di Fourier di f	218
55.1.12 Passo 5: Unicità della Funzione f	219
55.1.13 Teorema di Riesz-Fischer, Versione Reale	219

55.1.14 Ipotesi	219
55.1.15 Tesi	219
55.1.16 Ipotesi. Parte Inversa	219
55.1.17 Tesi. Parte Inversa	220
55.1.18 Dimostrazione (Versione Reale)	220
55.1.19 Parte 1: Da L^2 a l^2 (Disuguaglianza di Bessel e Identità di Parseval)	220
55.1.20 Parte 2: Da l^2 a L^2 (Il Cuore del Teorema)	221
55.1.21 Passo 1: Definizione delle Somme Parziali	222
55.1.22 Passo 2: Dimostrare che $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è una Successione di Cauchy in L^2	222
55.1.23 Passo 3: Utilizzo della Completezza di L^2	222
55.1.24 Passo 4: Verificare che i a_n e b_n sono i Coefficienti di Fourier di f	222
55.1.25 Passo 5: Unicità della Funzione f	223
56 Appendice 26. Come ricondurre nello sviluppo in serie di Fourier una funzione di periodo $T = b - a$ in $[a, b]$, ad una funzione di periodo 2π da $-\pi$ a π.	225
57 Appendice 27. Teorema di Unicità della Serie di Fourier	228
57.0.1 ipotesi	228
57.0.2 tesi	229
57.0.3 Dimostrazione	229
57.0.4 Importanza e Implicazioni	230
58 Appendice 28. Teoremi Avanzati sulle Serie di Fourier	231
59 Appendice 29. Determinazione della Funzione da una Serie di Fourier: Approccio e Analisi	237
59.1 Passaggi chiave nell'Indagine per la ricostruzione della Funzione .	237
59.1.1 Tabella Riassuntiva: Corrispondenza Andamento dei Coefficienti e Regolarità della Funzione	238
59.1.2 Esempio: Ricavare $f(x)$ da una Serie di Fourier Data . . .	240
60 Appendice 30. Determinazione del Periodo di Funzioni Periodiche Generiche	244
60.1 Definizione Rigorosa di Funzione Periodica e Periodo Fondamentale	244
60.2 Proprietà dei Periodi	244
60.3 Determinazione del Periodo Fondamentale per Specifici Tipi di Funzioni	245
60.3.1 Funzioni Trigonometriche Fondamentali	245
60.3.2 Somme e Prodotti di Funzioni Periodiche	245
60.3.3 Funzioni Definite a Tratti o Generiche	246
60.4 Considerazioni su Funzioni Non Periodiche	247

ESERCIZI	249
61 Introduzione	251
61.1 Introduzione agli Esercizi sulle Serie di Fourier	251
61.2 Cosa sono le Serie di Fourier?	251
61.3 Obiettivi degli Esercizi	251
61.4 Struttura degli Esercizi	252
61.5 Perchè è Importante Studiare le Serie di Fourier?	252
62 Esercizi	253
62.1 Esercizio	253
62.1.1 Calcolo di a_0	254
62.1.2 Calcolo di a_n	254
62.1.3 Calcolo di b_n	255
62.1.4 Serie di Fourier finale	256
62.1.5 Valori della funzione in $x = -5$ e $x = 5$	256
62.1.6 Tipo di convergenza	256
62.2 Esercizio	257
62.2.1 Serie di Fourier	257
62.2.2 Calcolo del Coefficiente a_0	258
62.2.3 Calcolo dei Coefficienti a_n	259
62.2.4 Calcolo dei Coefficienti b_n	259
62.2.5 Serie di Fourier Completa	259
62.2.6 Convergenza della Serie di Fourier	260
62.2.7 Fenomeno di Gibbs	260
62.2.8 Conclusioni	261
62.3 Esercizio	261
62.3.1 Serie di Fourier della funzione	261
62.3.2 Calcolo del coefficiente a_0	261
62.3.3 Calcolo del coefficiente a_n	262
62.3.4 Calcolo del coefficiente b_n	262
62.3.5 Serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$	263
62.4 Esercizio	263
62.4.1 Calcolo del termine costante a_0	264
62.4.2 Calcolo del coefficiente a_n	265
62.4.3 Calcolo del coefficiente b_n	265
62.4.4 Serie di Fourier completa	266
62.4.5 Discussione sulla sviluppabilità	266
62.4.6 Periodicità	267
62.4.7 Continuità	267
62.4.8 Discontinuità agli estremi dell'intervallo	267
62.4.9 Tipo di Convergenza della Serie di Fourier per $y = e^x$. .	267
62.4.10 Condizioni di Dirichlet per la Convergenza della Serie di Fourier	267
62.4.11 Convergenza della Serie di Fourier	268
62.4.12 Convergenza Puntuale	268

3 Secondo teorema di Dirichlet: prima parte sulla sviluppabilità in serie di Fourier

3.1 Ipotesi

Sia $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{I} = (a, b) = (-\pi, \pi)$ una funzione periodica con periodo 2π tale che :

1. $f(x)$ sia **continua e monotona a tratti** in ogni intervallo finito $I = [a, b]$;
2. $f(x)$ abbia un numero finito di **discontinuità di prima specie** in un periodo;
3. $f(x)$ sia **integrabile su un periodo**, ovvero **a variazione limitata**, cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty. \quad (37)$$

4. $f(x)$ sia **regolare** ovvero C^1 (che implica la continuità della derivata e della funzione, cosa già contenuta nel primo punto).

3.2 Tesi

La funzione $f(x)$ è sviluppabile in una serie di Fourier della forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (38)$$

dove i coefficienti della serie di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (39)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1, \quad (40)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1. \quad (41)$$

Risulta inoltre:

- a) La serie di Fourier converge puntualmente nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$, ovvero in ogni punto interno dell'intervallo.
- b) Nei punti di discontinuità della funzione, la serie di Fourier converge puntualmente al valore medio tra i limiti destro e sinistro. Ad esempio, se $c \in (-\pi, \pi)$

è un punto di discontinuità, di prima specie, allora:

$$s(c) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \right). \quad (42)$$

c) Per $x = \pm\pi$, cioè agli estremi dell'intervallo, la serie di Fourier converge puntualmente a:

$$s(\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \right), \quad (43)$$

e analogamente:

$$s(-\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) \right). \quad (44)$$

Inoltre in ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$ dove la funzione è continua, la convergenza è anche uniforme.

4 Secondo Teorema di Dirichlet: seconda parte sulla Convergenza Uniforme della serie di Fourier

4.1 Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π , definita su $[-\pi, \pi]$, che soddisfa le seguenti condizioni:

1. **Continuità:** $f(x)$ è continua su $[-\pi, \pi]$.
2. **Variazione limitata sia la funzione che la sua derivata:** La derivata generalizzata di $f(x)$ è a variazione limitata su $[-\pi, \pi]$, cioè $f(x)$ ha una variazione limitata su $[-\pi, \pi]$.
3. **Somme parziali uniformemente limitate:** Le somme parziali della serie di Fourier $S_N(x)$ associate a $f(x)$ sono uniformemente limitate, cioè esiste una costante C tale che $|S_N(x)| \leq C$ per ogni N e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Tesi

Allora, la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su \mathbb{R} . Si fa notare che anche qui la condizione di convergenza uniforme è solo sufficiente.

4.3 Dimostrazione

Passo 1: Scrittura della Serie di Fourier e delle Somme Parziali

La serie di Fourier di $f(x)$ è data dalla somma:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (45)$$

dove i coefficienti a_n e b_n sono definiti come:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (46)$$

Passo 2: Utilizzo del Nucleo di Dirichlet

Definiamo il nucleo di Dirichlet come:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx) + i \sum_{n=1}^N \sin(nx). \quad (47)$$

Si può notare inoltre che essendo:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^N (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}. \quad (48)$$

Tenendo conto che $\sin(-nx) = -\sin(nx)$, si ha che la somma:

$$\sum_{k=-n}^n \sin(kx) = 0. \quad (49)$$

Quindi, il nucleo di Dirichlet $D_n(x)$ è uguale a:

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx). \quad (50)$$

Se $f(x)$ è una funzione 2π -periodica e integrabile, allora la somma parziale di ordine N della serie di Fourier può essere scritta come una convoluzione

$$S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt, \quad (51)$$

dove $D_N(x)$ è il nucleo di Dirichlet. Questo ci dice che la somma parziale è un'approssimazione di f ottenuta smussando f tramite $D_N(x)$. Il comportamento di $D_N(x)$ è cruciale per capire dove e come la serie di Fourier converge.

In particolare, nei punti di continuità converge a $f(x)$, nei punti di discontinuità di prima specie converge alla media dei limiti laterali. Se $D_N(x)$ non è sommabile, la somma cresce come $\log(N)$. Questo rende più difficile la convergenza. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità diventa più pronunciata man mano che ci si avvicina ad esso. L'oscillazione del nucleo di Dirichlet vicino ai punti di discontinuità spiega il fenomeno di Gibbs.

La somma parziale può essere scritta come una convoluzione di $f(x)$ con il nucleo di Dirichlet:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy. \quad (52)$$

Passo 3: Proprietà delle Funzioni a Variazione Limitata Poiché $f(x)$ è a variazione limitata su $[-\pi, \pi]$, possiamo utilizzare il fatto che la funzione $f(x)$ è continua e a tratti monotona (segnalando che le sue derivate esistono quasi ovunque e che la variazione totale di $f(x)$ è finita). Di conseguenza, i coefficienti di Fourier a_n e b_n decrescono almeno come $\frac{1}{n}$.

Passo 4: Stima dell'Errore di Convergenza

Per dimostrare la convergenza uniforme, consideriamo la differenza tra la somma parziale $S_N(x)$ e la funzione $f(x)$:

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy - f(x). \quad (53)$$

Per $D_N(x)$, possiamo stimare che:

$$\sup_x \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \right| \leq CV(f), \quad (54)$$

dove $V(f)$ è la variazione totale di $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$ e C è una costante indipendente da N .

Passo 5: Convergenza Uniforme

Poiché $f(x)$ è a variazione limitata, l'errore $|S_N(x) - f(x)|$ tende a zero uniformemente per x quando $N \rightarrow \infty$. In altre parole, il massimo errore tra la somma parziale $S_N(x)$ e la funzione $f(x)$ tende a zero man mano che N cresce:

$$\sup_x |S_N(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Conclusione

Poiché il massimo errore tende a zero, la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su \mathbb{R} , come richiesto. Pertanto, abbiamo dimostrato che la serie di Fourier di una funzione continua, a tratti monotona e regolare a tratti converge uniformemente alla funzione stessa.



Sante Centurioni

Serie di Fourier

Teoria ed Esercizi



ISBN 978-88-3623-240-6



9 788836 232406