

il **nuovo** concorso
a cattedra

MANUALE

Scienze Matematiche applicate nella scuola secondaria

per la **preparazione al concorso**

Classe di concorso:

A47 Scienze matematiche applicate

Emiliano Barbuto e Santo Calabrese

III Edizione



IN OMAGGIO ESTENSIONI ONLINE

Software di
simulazione

Contenuti
extra



EdiSES
edizioni

Manuale

Scienze Matematiche applicate

nella **scuola secondaria**

Accedi ai servizi riservati

Il codice personale contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a:

**MATERIALI DI INTERESSE
E CONTENUTI AGGIUNTIVI**

CODICE PERSONALE

Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.

Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate nella pagina seguente.

Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile.

L'**accesso ai servizi riservati** ha la **durata di 18 mesi** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Istruzioni per accedere ai contenuti e ai servizi riservati

SEGUI QUESTE SEMPLICI ISTRUZIONI

SE SEI REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



inserisci email e password



inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina



inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

SE NON SEI GIÀ REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



registrati al sito **edises.it**



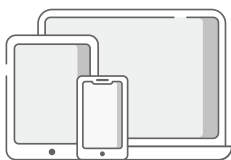
attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione



torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per utenti registrati



CONTENUTI AGGIUNTIVI



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali e per informazioni sui nostri servizi puoi contattarci sulla piattaforma **assistenza.edises.it**

SCARICA L'APP **INFOCONCORSI** DISPONIBILE SU APP STORE E PLAY STORE

il nuovo concorso
a cattedra

MANUALE

Scienze
Matematiche
applicate
nella **scuola secondaria**

a cura di

Emiliano Barbuto e Santo Calabrese



Il nuovo Concorso a Cattedra – Scienze matematiche applicate - III Edizione
Copyright © 2024, 2019, 2016, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2028 2027 2026 2025 2024

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Autori:

Emiliano Barbuto

Santo Calabrese

Andrea Monaco (per il Capitolo 4 Informatica, della Parte Seconda)

Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento *online*)

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano - Napoli

Fotocomposizione: EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

Stampato presso Vulcanica S.r.l. - Nola (Na)

Per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 979 12 5602 135 2



www.edises.it

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi all'indirizzo redazione@edises.it

Sommario




Parte Prima Matematica

Capitolo 1	Insiemi, relazioni, funzioni.....	3
Capitolo 2	Geometria euclidea e geometrie non euclidee.....	43
Capitolo 3	Insiemi numerici.....	123
Capitolo 4	Il metodo delle coordinate.....	209
Capitolo 5	Funzioni reali e calcolo numerico.....	331
Capitolo 6	Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile.....	377
Capitolo 7	Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica.....	533
Capitolo 8	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità.....	
Capitolo 9	Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale.....	

Parte Seconda Matematica applicata

Capitolo 1	Matematica finanziaria.....	633
Allegato A	Formulario di Matematica finanziaria.....	699
Capitolo 2	Matematica attuariale.....	705
Allegato B	Formulario di Matematica attuariale.....	735
Capitolo 3	Ricerca operativa.....	739
Appendice	Storia della matematica.....	777
Capitolo 4	Informatica.....	803

Parte Terza Esempi di Unità di Apprendimento

Unità di Apprendimento 1	Espressioni logiche.....	
Unità di Apprendimento 2	Parliamo il “geometriche” : lessico geometrico “poco familiare”.....	
Unità di Apprendimento 3	Cogito ergo sum.....	

Finalità e struttura dell'opera

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica applicata**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il testo è strutturato in parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

La **seconda parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile Appendice recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo** dedicato all'**informatica** specifica per la matematica applicata.

L'ultima parte del testo disponibile **online**, è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il testo è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite e da ulteriori **servizi riservati** online.

Ulteriori **materiali didattici** e **aggiornamenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nelle prime pagine del volume.

Eventuali errata-corrige saranno pubblicati sul sito *edises.it*, nella scheda "Aggiornamenti" della pagina dedicata al volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social.

blog.edises.it



Indice

Parte Prima Matematica

Capitolo 1 Insiemi, relazioni, funzioni

1.1	Concetti fondamentali	3
1.2	Relazione di inclusione	4
1.3	Operazioni tra insiemi	5
1.4	Insieme delle parti	8
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano	8
1.6	Relazione binaria	9
1.7	Relazioni di equivalenza	11
1.8	Relazioni d'ordine largo	12
1.9	Relazioni d'ordine stretto	13
1.10	Funzioni	13
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	15
1.12	Funzioni composte	17
1.13	Funzione inversa e identità	17
1.14	Cardinalità di un insieme	18
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali	18
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali	19
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili	20
1.14.4	Insiemi numerici numerabili	22
1.14.5	Insiemi numerici non numerabili	25
1.14.6	L'ipotesi del continuo	29
1.15	Calcolo combinatorio	30
1.15.1	Principio di moltiplicazione	30
1.15.2	Fattoriale di un numero	31
1.15.3	Disposizioni con ripetizione	31
1.15.4	Disposizioni	32
1.15.5	Permutazioni	33
1.15.6	Permutazioni con ripetizione	33
1.15.7	Combinazioni	34
1.15.8	Combinazioni con ripetizione	35
1.15.9	Il coefficiente binomiale	35
1.15.10	Formula del binomio di Newton	36
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali	37
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia	37
1.16	Il metodo assiomatico	39
1.16.1	Le teorie matematiche	39



1.16.2	La definizione dei termini	39
1.16.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali	40

Capitolo 2 Geometria euclidea e geometrie non euclidee

2.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	43
2.1.3	Il quinto postulato di Euclide.....	46
2.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	47
2.2	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano.....	51
2.2.1	Trasformazioni affini	51
2.2.2	Affinità	55
2.2.3	Proprietà delle affinità	56
2.2.4	Punti uniti di una trasformazione	60
2.2.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo	63
2.2.6	Particolari similitudini: omotetie	68
2.2.7	Isometrie	71
2.2.8	Isometrie dirette	72
2.2.9	Isometrie inverse	80
2.2.10	Riepilogo.....	84
2.3	L'idea della geometria proiettiva	86
2.3.1	La prospettiva	86
2.3.2	La retta proiettiva.....	86
2.3.3	Il piano proiettivo	89
2.3.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo.....	93
2.3.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio	95
2.3.6	Definizione operativa di spazio proiettivo	95
2.4	Operare con le coordinate omogenee.....	97
2.4.1	Rette nel piano	97
2.4.2	Coniche in coordinate omogenee	99
2.5	Le proiettività	101
2.5.1	Proiettività sulla retta proiettiva	101
2.5.2	Punti uniti.....	102
2.5.3	Il birapporto	105
2.5.4	Proiettività sul piano	107
2.5.5	Punti uniti e rette unite	110
2.5.6	Studio della prospettiva	116

Capitolo 3 Insiemi numerici

3.1	Leggi di composizione interne ed esterne	123
3.2	L'insieme dei numeri naturali.....	123
3.2.1	Assiomi di Peano	124
3.2.2	Addizione di naturali	125
3.2.3	Moltiplicazione di naturali	127
3.2.4	Relazione d'ordine nei naturali	128
3.2.5	La divisione euclidea.....	129
3.2.6	La potenza	131

3.3	Rappresentazione dei numeri naturali.....	131
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali.....	131
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma	132
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale	133
3.3.4	Il sistema di numerazione binario	134
3.3.5	Conversioni.....	135
3.4	L'insieme dei numeri interi.....	136
3.5	I numeri razionali.....	140
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali.....	140
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali	141
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali.....	142
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali	143
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali	145
3.6.1	La scrittura posizionale.....	145
3.6.2	L'estrazione di radice.....	145
3.6.3	Le grandezze incommensurabili	145
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi.....	147
3.6.5	La quadratura del cerchio	148
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali.....	148
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale	148
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind	148
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali.....	152
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti.....	152
3.8.1	I numeri irrazionali.....	152
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici	153
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti	154
3.9	Le strutture algebriche	155
3.9.1	Definizione di struttura algebrica	155
3.9.2	Proprietà associativa e semigrupperi.....	155
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi.....	156
3.10	I gruppi	157
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso	157
3.10.2	Definizione di gruppo.....	157
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani.....	158
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori	159
3.11	Aritmetica modulare	160
3.11.1	Congruenza modulo n	160
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare.....	160
3.11.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente.....	161
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza	162
3.12	Gruppi ciclici	164
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi	164
3.12.2	Gruppi additivi	165
3.12.3	Gruppi moltiplicativi.....	165
3.13	Tavole di Cayley.....	167
3.14	Prodotto di gruppi	168
3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro.....	169

3.15.1	Definizione di sottogruppo	169
3.15.2	Classi laterali.....	169
3.15.3	Sottogruppi normali	171
3.16	Gruppi risolubili.....	175
3.17	I gruppi simmetrici	176
3.17.1	Permutazioni	176
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	177
3.17.3	Cicli e trasposizioni	178
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno.....	182
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	183
3.17.6	Il gruppo simmetrico S_5	185
3.18	Gruppo diedrale.....	186
3.18.1	Definizione	186
3.18.2	Interpretazione geometrica.....	187
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi.....	192
3.20	Anelli.....	196
3.20.1	Definizione	196
3.20.2	Anello dei polinomi	197
3.21	Corpi e campi.....	199
3.21.1	Definizioni	199
3.21.2	Estensione di un campo.....	200
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa).....	202
3.22	Teoria di Galois	204
3.22.1	L'idea	204
3.22.2	Gruppo di Galois.....	205
3.22.3	Risolubilità per radicali di un'equazione di grado n	207

Capitolo 4 Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali	209
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale	209
4.1.2	Sottospazio.....	212
4.1.3	Combinazione lineare di vettori	213
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	214
4.1.5	Generatori e basi	215
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	217
4.2	Applicazioni lineari	218
4.2.1	Definizione di applicazione lineare	218
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari	219
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari	219
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.....	220
4.2.5	Particolari applicazioni lineari	221
4.3	Matrici	222
4.3.1	Definizioni	222
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	223
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici	226
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	231

4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	235
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	235
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	236
4.4	Determinanti	236
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	236
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	242
4.4.3	Rango di una matrice.....	245
4.5	Sistemi lineari.....	249
4.5.1	Definizione di sistema lineare	249
4.5.2	Sistemi lineari compatibili	250
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	251
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	252
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	253
4.5.6	Matrice inversa	259
4.5.7	Sistemi lineari omogenei	262
4.6	Diagonalizzazione di matrici	265
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio.....	265
4.6.2	Matrici diagonalizzabili.....	266
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici	267
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione.....	269
4.6.5	Segnatura di una matrice	269
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo	275
4.8	Geometria analitica nel piano	277
4.8.1	Punti nel piano cartesiano.....	277
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano	278
4.8.3	Le curve algebriche.....	281
4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette	282
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica.....	282
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita	283
4.9.3	Intersezione di due rette	283
4.9.4	Rette: casi particolari	286
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria	287
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita	288
4.9.7	Fasci di rette	289
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta	291
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche	293
4.10.1	Classificazione di una conica.....	293
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica.....	296
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde.....	302
4.11	Geometria analitica nello spazio	304
4.11.1	Punti nello spazio.....	304
4.11.2	Vettori nello spazio	305
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani	309
4.12.1	Equazione parametrica del piano	309
4.12.2	Equazione generale del piano.....	309
4.12.3	Equazioni di piani particolari.....	313
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo	314

4.13	Le rette nello spazio.....	315
4.13.1	Equazioni parametriche della retta	315
4.13.2	Equazioni normali della retta.....	316
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	316
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli)	320
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari.....	321
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari.....	323
4.13.7	Rette e piani perpendicolari.....	323
4.13.8	Distanza di un punto da un piano	324
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche.....	324
4.14.1	Classificazione di una quadrica	324

Capitolo 5 Funzioni reali e calcolo numerico

5.1	Intervalli e intorni	331
5.1.1	Tipologie di intervalli	331
5.1.2	Intorni e intorni circolari	333
5.2	Funzioni reali di variabili reali	333
5.2.1	Generalità	333
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine.....	335
5.2.3	Funzioni composte.....	336
5.2.4	Funzioni invertibili.....	336
5.2.5	Funzioni monotone	337
5.2.6	Funzioni pari e dispari.....	340
5.2.7	Funzioni periodiche.....	341
5.2.8	Funzioni elementari.....	342
5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	349
5.3	Errori nel calcolo numerico	351
5.3.1	Premessa	351
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali.....	351
5.3.3	I numeri in virgola mobile.....	353
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i>	355
5.3.5	Arrotondare e troncare.....	357
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo	359
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite.....	361
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	365
5.4	Propagazione dell'errore.....	366
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	366
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore.....	368
5.4.3	Condizionamento di un problema	369
5.4.4	Stabilità di un algoritmo	373

Capitolo 6 Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile

6.1	Limite di una funzione	377
6.1.1	Punti di accumulazione	377
6.1.2	Definizione di limite	378
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto	379

6.1.4	Verifica del limite	381
6.1.5	Limite destro e limite sinistro.....	384
6.1.6	Teoremi sui limiti.....	386
6.1.7	Operazioni sui limiti	388
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti	389
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli.....	391
6.1.10	Calcolo di limiti.....	394
6.2	Successioni e limiti di successioni	398
6.2.1	Definizione e generalità.....	398
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali.....	401
6.3	Continuità delle funzioni reali	402
6.3.1	Funzione continua	402
6.3.2	Funzione uniformemente continua.....	407
6.3.3	Punti di discontinuità	408
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione	410
6.4	Derivata.....	411
6.4.1	Rapporto incrementale.....	411
6.4.2	Definizioni di derivata e di derivabilità.....	412
6.4.3	Derivata destra e sinistra.....	413
6.4.4	Continuità e derivabilità	413
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata.....	414
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata	416
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto	418
6.4.8	Regole di derivazione.....	419
6.4.9	Calcolo di derivate	419
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata	422
6.4.11	Derivate di ordine superiore	425
6.4.12	Differenziale	426
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale.....	427
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange	427
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione	431
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione	432
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore	432
6.5.5	Massimo e minimo relativo.....	434
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto	435
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso	439
6.5.8	I teoremi di l'Hopital.....	441
6.5.9	Asintoti di una funzione	444
6.5.10	Studio del grafico di una funzione	446
6.6	Il problema della misura.....	454
6.6.1	Introduzione.....	454
6.6.2	La misura di Peano-Jordan	454
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue	460
6.7	Integrazione indefinita	462
6.7.1	Definizioni	462
6.7.2	Regole di integrazione	464
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche.....	470

6.8	Integrazione definita.....	475
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore	475
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann	477
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann	478
6.8.4	Funzioni integrabili.....	480
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti	481
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita	482
6.9	Integrali impropri	487
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto.....	487
6.9.2	Caso di un intervallo aperto	488
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	489
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione	490
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	492
6.12	Serie numeriche	495
6.12.1	Definizioni	495
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alternato e a termini qualunque.....	497
6.12.3	La serie geometrica	498
6.12.4	Resto di una serie	499
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie	501
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	502
6.13.1	Premessa	502
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	502
6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica	503
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss)	504
6.13.5	Secondo criterio del confronto.....	505
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	506
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy)	507
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	508
6.14.1	Criterio di Leibnitz.....	508
6.14.2	La convergenza assoluta	509
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	510
6.15	Sviluppo in serie di funzioni.....	511
6.15.1	Le serie di funzioni	511
6.15.2	Le serie di potenze.....	513
6.15.3	La serie di Mac Laurin	515
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.....	517
6.15.5	La formula di Eulero.....	520
6.15.6	La serie di Taylor.....	521
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor.....	522
6.15.8	La serie di Fourier.....	528

Capitolo 7 Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità.....	533
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi.....	533

7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	534
7.1.3	Definizione classica della probabilità.....	535
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità	540
7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	545
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità.....	548
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità	550
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto	550
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	551
7.2.3	Indipendenza stocastica.....	554
7.2.4	Formula della probabilità totale.....	556
7.2.5	Teorema di Bayes	558
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	561
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità	561
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi.....	562
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative	565
7.3.4	Tabelle e distribuzioni	568
7.3.5	Grafici	569
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi	570
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti.....	574
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	576
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica	579
7.3.10	Analisi statistica univariata.....	581
7.4	Indici di posizione.....	582
7.4.1	La media aritmetica	583
7.4.2	La media geometrica	586
7.4.3	La media armonica	588
7.4.4	La media quadratica	590
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche.....	591
7.4.6	La moda	591
7.4.7	La mediana	593
7.4.8	I quantili	597
7.5	Indici di variabilità	598
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili	599
7.5.2	Scarto semplice medio	599
7.5.3	Devianza.....	601
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	601
7.5.5	Indici di dispersione relativi.....	604
7.5.6	Le differenze medie	605
7.5.7	La concentrazione.....	608
7.6	Indici di forma.....	615
7.6.1	Asimmetria.....	615
7.6.2	Curtosi.....	616
7.7	Rapporti statistici.....	618
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici	618
7.7.2	I numeri indici	624
7.7.3	I numeri indici complessi	629

Capitolo 8 Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità



Capitolo 9 Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale



Parte seconda

Matematica applicata

Capitolo 1 Matematica finanziaria

1.1	Operazioni finanziarie	633
1.1.1	Criteri di preferenza assoluta	635
1.2	Legge di capitalizzazione semplice o lineare	635
1.2.1	Ricerca del tasso	638
1.2.2	Ricerca del tempo	640
1.2.3	Ricerca del capitale iniziale	642
1.3	Legge di capitalizzazione composta o esponenziale	643
1.3.1	Ricerca del tasso	645
1.3.2	Ricerca del tempo	646
1.3.3	Ricerca del capitale iniziale	647
1.4	Scindibilità	648
1.5	Confronto grafico fra capitalizzazione semplice e composta	649
1.6	Tassi equivalenti	650
1.6.1	Tassi equivalenti in capitalizzazione semplice	650
1.6.2	Tassi equivalenti in capitalizzazione composta	651
1.6.3	Tasso annuo nominale convertibile k volte	653
1.6.4	Studio di J_k al variare del frazionamento k	656
1.7	Leggi di attualizzazione o di sconto	657
1.7.1	Sconto commerciale	658
1.7.2	Legge di attualizzazione semplice o sconto razionale	660
1.7.3	Legge di attualizzazione composta	661
1.7.4	Legge di capitalizzazione coniugata allo sconto commerciale	662
1.7.5	Tassi equivalenti in regimi diversi: relazioni tra d e i	664
1.8	Leggi coniugate	665
1.9	Principio di equivalenza finanziaria	665
1.10	Rendite certe	669
1.10.1	Montante di una rendita	670
1.10.2	Valore attuale di una rendita	675
1.11	Estinzione o rimborso di un prestito	681
1.11.1	Ammortamento italiano o uniforme o a quote di capitale costanti	685
1.11.2	Ammortamento francese o progressivo o a rata costante	687
1.11.3	Ammortamento americano o a due tassi o a quote di accumulazione	691
1.11.4	Estinzione di un prestito diviso in titoli	694
1.12	Leasing	696
1.13	Scelta tra investimenti	697
1.13.1	REA o VAN	697
1.13.2	Tasso implicito o TIR	697
1.13.3	Tempo di recupero del capitale	698

Allegato A - Formulario di Matematica finanziaria	699
--	------------

Capitolo 2 Matematica attuariale

2.1	Operazioni finanziarie aleatorie: le assicurazioni	705
2.2	Probabilità di vita e di morte	707
2.3	Assicurazione elementare di vita o fattore attuariale di sconto	711
2.4	Assicurazioni di rendita vitalizia	714
2.4.1	Rendita vitalizia immediata illimitata o a "vita intera"	714
2.4.2	Rendita vitalizia differita illimitata o pensione	716
2.4.3	Rendita vitalizia immediata temporanea	717
2.4.4	Rendita vitalizia differita e temporanea	719
2.5	Assicurazione elementare di morte	720
2.5.1	Assicurazione in caso di morte a vita intera	721
2.5.2	Assicurazione in caso di morte immediata e temporanea	722
2.5.3	Assicurazione in caso di morte differita e temporanea	724
2.5.4	Assicurazione in caso di morte differita	725
2.5.5	Pagamento all'atto del decesso	726
2.6	Assicurazioni miste	727
2.6.1	Assicurazione mista semplice	728
2.6.2	Assicurazione mista doppia	729
2.6.3	Assicurazione mista a capitale raddoppiato	729
2.7	Premi periodici puri	730
2.8	Premi di tariffa	731
2.9	Riserva matematica	732
2.10	Rischio aggravato	734

Allegato B - Formulario di Matematica attuariale	735
---	------------

Capitolo 3 Ricerca operativa

3.1	Definizione	740
3.2	Fasi di un problema di ricerca operativa	741
3.2.1	Definizione del problema e raccolta dei dati	741
3.2.2	Costruzione del modello	741
3.2.3	Ricerca della soluzione ottima e verifica	742
3.3	Modello matematico del problema	742
3.3.1	Richiami di disequazioni lineari in due variabili	744
3.3.2	Richiami sui sistemi di disequazioni lineari in due variabili	746
3.4	Le decisioni	751
3.4.1	In condizione di certezza	752
3.4.2	In condizione di incertezza	752
3.4.3	Decisioni in condizioni di certezza con effetti immediati	752
3.4.4	Decisioni in condizioni di certezza con effetti differiti	759
3.4.5	Decisioni in condizioni di incertezza	765
3.5	La programmazione lineare	769




Appendice - Storia della matematica	777
--	------------

Capitolo 4 Informatica

- 4.1 Modi di funzionamento di calcolatori elettronici ed elaboratori dati
 - 4.1.1 Porte logiche e bit
 - 4.1.2 L'algebra di Boole
- 4.2 Principi di programmazione e di sviluppo software
 - 4.2.1 Algoritmi e diagrammi di flusso
 - 4.2.2 Linguaggi di programmazione
 - 4.2.3 Modelli tradizionali di sviluppo del software
 - 4.2.4 I prototipi
 - 4.2.5 Iterazione nel metodo Agile
- 4.3 Conoscenza e utilizzo di un applicativo di foglio elettronico
 - 4.3.1 Fogli elettronici
 - 4.3.2 Creare grafici con Excel
 - 4.3.3 Formule: funzioni e operatori
 - 4.3.4 Funzioni statistiche
 - 4.3.5 Funzioni finanziarie

Parte Terza

Esempi di Unità di Apprendimento

Unità di Apprendimento 1 Espressioni logiche	
Unità di Apprendimento 2 Parliamo il “geometriche” : lessico geometrico “poco” familiare!.....	
Unità di Apprendimento 3 Cogito ergo sum	

Parte Prima

Matematica

SOMMARIO

Capitolo 1	Insiemi, relazioni, funzioni
Capitolo 2	Geometria euclidea e geometrie non euclidee
Capitolo 3	Insiemi numerici
Capitolo 4	Il metodo delle coordinate
Capitolo 5	Funzioni reali e calcolo numerico
Capitolo 6	Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile
Capitolo 7	Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica

Capitolo 1

Insiemi, relazioni, funzioni

1.1 Concetti fondamentali

I concetti di oggetto, insieme e proprietà costituiscono gli aspetti fondanti della teoria degli insiemi. Con il termine **oggetto** si indica qualsiasi elemento, mentre il termine **insieme** indica ogni raggruppamento, collezione, aggregato di elementi, indipendentemente dalla loro natura.

Un **diagramma di Eulero-Venn** (o semplicemente **diagramma di Venn**) è una rappresentazione grafica di un insieme che consiste nel racchiuderne gli elementi all'interno di una linea chiusa non intrecciata (Figura 1).

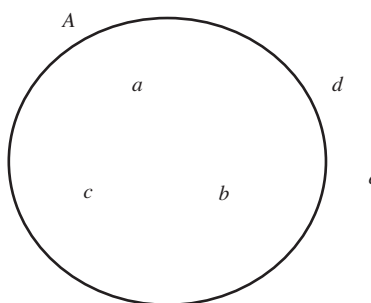


Figura 1 L'insieme A

In Figura 1 l'insieme A è composto dagli elementi indicati con a , b , c . Questo viene indicato nella rappresentazione tabulare con la notazione $A = \{a, b, c\}$. In riferimento ad un singolo elemento dell'insieme, la notazione $a \in A$ indica che l'elemento a “appartiene” all'insieme A . Per indicare che un elemento d non appartiene ad un insieme A si usa scrivere $d \notin A$.

La **proprietà** è un altro concetto innato ed indica una caratteristica che hanno tutti gli elementi appartenenti ad un insieme. Difatti una proprietà identifica un insieme, come nell'esempio seguente:

$$B = \{x : \text{“}x \text{ è un numero intero compreso tra 1 e 10”}\}$$

Il simbolo $:$ significa “tale che”. Pertanto, l'insieme B contiene quegli elementi x tali da avere la seguente proprietà: “ x è un numero intero compreso tra 1 e 10”, ossia B contiene i numeri interi compresi tra 1 e 10.

Più in generale si può disporre di un insieme S nel quale è possibile stabilire, per ciascuno dei suoi elementi, se possiede o meno una determinata proprietà P . In tal caso si dice che la proprietà P è **definita** nell'insieme S .

Quando una proprietà P ha come conseguenza una proprietà Q , ossia se un elemento di un insieme, possedendo la proprietà P , possiede anche la proprietà Q , allora si dice che P implica Q e si scrive:

$$P \Rightarrow Q$$

La precedente espressione si legge “Se P allora Q ”, oppure “ P implica Q ”, oppure “ P è una condizione sufficiente per Q ” oppure “ Q è una condizione necessaria per P ”. Con tali asserti si vuole stabilire che possedere la proprietà P è una condizione sufficiente per affermare che anche la proprietà Q è posseduta. Viceversa la proprietà Q non è sufficiente per stabilire che P è posseduta, ma è una condizione necessaria per possedere P , ossia è una condizione senza la quale non è possibile possedere P (si potrebbe dire intuitivamente che è preliminare a P). Alla luce di quanto affermato, si può stabilire che se la proprietà P implica Q , allora non è detto che Q implichi P .

Se due proprietà si implicano a vicenda si può scrivere:

$$P \Leftrightarrow Q$$

La precedente espressione si legge “ P se e solo se Q ”. In tal caso P implica Q e Q implica P . Si può dire altresì che “ P è equivalente a Q ”. In alternativa si può dire che “ P è una condizione necessaria e sufficiente per Q ”.

Per descrivere le proprietà degli insiemi vengono spesso utilizzati i quantificatori. Il **quantificatore esistenziale** si denota con il simbolo \exists e sta ad indicare l'esistenza di almeno un elemento (quindi anche più di uno) che gode di una determinata proprietà. Ad esempio $\exists x$ vuol dire “esiste almeno un elemento x ”. Il **quantificatore universale** si denota con il simbolo \forall e sta ad indicare che una proprietà è posseduta da ogni elemento considerato. Ad esempio $\forall x$ vuol dire “per ogni x ” oppure “qualunque x ”.

1.2 Relazione di inclusione

Considerati due insiemi S e T , per dire che S è un **sottoinsieme** di T , ossia che S è **incluso** in T , si scrive $S \subseteq T$. Per definizione si ha:

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

In pratica qualsiasi elemento appartenente a S è contenuto anche in T . Si può anche dire che la condizione di appartenere a S è sufficiente per appartenere anche a T , oppure che appartenere a T è condizione necessaria per appartenere anche a S .

La relazione di inclusione \subseteq tiene aperta la possibilità che i due insiemi S e T siano identici, ossia $S = T$. In alternativa, la relazione di inclusione stretta $S \subset T$ implica che l'insieme S non può coincidere con T .

La proprietà di inclusione di un insieme S in un altro insieme T è data quindi dalla proprietà che viene espressa simbolicamente nel modo seguente:

$$\forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

Per negare tale proprietà occorre scambiare il quantificatore universale al primo membro dell'implicazione con il quantificatore esistenziale e negare il secondo membro dell'implicazione, ossia:

$$\exists x \in S \Rightarrow x \in T$$

Quanto scritto rappresenta la relazione di non inclusione dell'insieme S nell'insieme T . Si noti che tale negazione comporta che almeno un elemento di S non sia contenuto in T ; non necessariamente tutti gli elementi di S non devono essere contenuti in T .

1.3 Operazioni tra insiemi

Si considerano i due insiemi, mostrati in Figura 2, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c, e\}$.

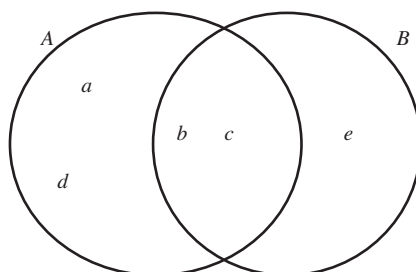


Figura 2 Gli insiemi A e B

L'**unione** tra i due insiemi è costituita da tutti gli elementi che si possono trovare in A , in B o in entrambi. L'unione viene indicata con $A \cup B$ e in tal caso è data da $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. Più in generale si ha:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Invece, l'**intersezione** tra due insiemi è composta solo da quegli elementi presenti in entrambi gli insiemi. Si indica l'intersezione con $A \cap B$. Nel caso specifico di Figura 2 si ha $A \cap B = \{b, c\}$. Più in generale si può scrivere:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

L'unione e l'intersezione degli insiemi A e B sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 3.

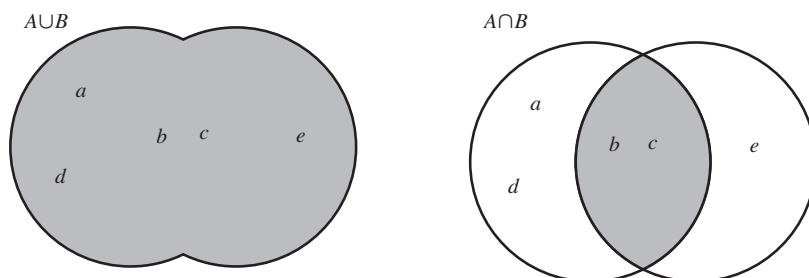


Figura 3 Unione degli insiemi A e B e intersezione degli insiemi A e B

La **differenza** tra A e B (indicata con $A - B$) è costituita da tutti gli elementi presenti in A a cui vengono sottratti quelli presenti anche in B . Nel caso in questione $A - B = \{a, d\}$. La differenza tra A e B è anche detta **complemento** di B rispetto ad A . Si ha inoltre $B - A = \{e\}$.

Più in generale si può scrivere:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Le differenze $A - B$ e $B - A$ sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 4.

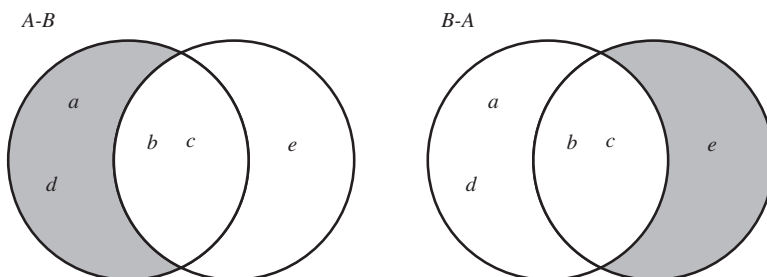


Figura 4 Differenza tra gli insiemi A e B e differenza tra gli insiemi B e A

L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** ed è indicato con il simbolo \emptyset . L'insieme vuoto è per definizione incluso in qualsiasi insieme A .

$$\forall A : \emptyset \subseteq A$$

Se due insiemi sono uguali, ossia contengono gli stessi elementi, allora la loro differenza è data dall'insieme vuoto.

$$A = B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

Infine si sottolinea come dalla Figura 3 e dalla Figura 4 si deduce la seguente regola generale:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

L'unione degli insiemi A e B è data dall'unione di tre insiemi: l'intersezione di A e B , il complemento di B rispetto ad A e il complemento di A rispetto a B . Difatti un elemento dell'insieme $A \cup B$ può appartenere o a entrambi gli insiemi (l'intersezione), o al solo insieme A (differenza $A - B$) oppure al solo insieme B (differenza $B - A$).

Considerati due insiemi A e B , si riportano alcune relazioni insiemistiche.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Inoltre, dati tre insiemi A , B e S , tali che $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, si ha:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow S - A \supseteq S - B$$

Le seguenti sono dette **regole di De Morgan**.

$$S - (A \cup B) = (S - A) \cap (S - B)$$

$$S - (A \cap B) = (S - A) \cup (S - B)$$

Esempi

1) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5\}$, si determinano gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

L'insieme intersezione è dato dagli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme B . In effetti, B è un sottoinsieme di A . L'insieme unione è dato dagli elementi che sono in A , in B oppure in entrambi.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme A .

L'insieme differenza $A - B$ è dato da:

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

L'insieme differenza $B - A$ coincide con l'insieme vuoto, in quanto da B vengono rimossi tutti gli elementi ad esso appartenenti:

$$B - A = \emptyset$$

2) Dati gli insiemi A e B tali che $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, si determinano gli insiemi A , $A - B$ e $B - A$.

L'insieme $B - A = B - (A \cap B)$, in quanto togliere dall'insieme B tutti gli elementi di A è equivalente a togliere i soli elementi che B ha in comune con A . Quindi:

$$B - A = \{2, 6\}.$$

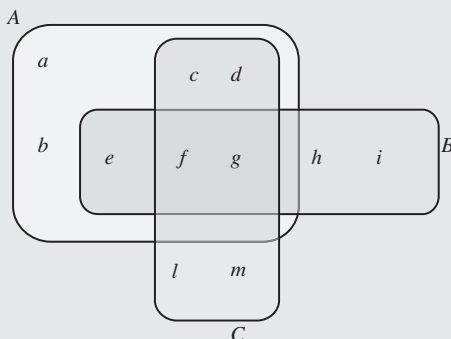
Se dall'insieme $A \cup B$ si tolgono gli elementi di $A \cap B$ e di $B - A$, si ottengono i soli elementi dell'insieme $A - B$. Quindi:

$$A - B = \{4, 7\}$$

Infine $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, ossia gli elementi di A sono quelli che appartengono solo ad A oppure ad A e B contemporaneamente. Quindi:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

3) Dato il diagramma di Venn in figura, si determinano gli insiemi $A \cap B \cap C$, $A \cap C$, $(A \cap C) - (B \cap C)$, $B - C$.



Osservato il diagramma, si ottiene:

$$\begin{aligned}A \cap B \cap C &= \{f, g\} \\ A \cap C &= \{c, d, f, g\}\end{aligned}$$

Inoltre, siccome $B \cap C = \{f, g\}$, allora $(A \cap C) - (B \cap C) = \{c, d\}$.

$$B - C = \{e, h, i\}$$

1.4 Insieme delle parti

Considerato un insieme S , si indica con $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S . Gli elementi dell'insieme delle parti sono tutti i sottoinsiemi A di S . Quindi si ha:

$$\mathcal{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

Si noti che in $\mathcal{P}(S)$ sono contenuti anche i sottoinsiemi **impropri** di S , ossia lo stesso insieme S e l'insieme vuoto \emptyset , contenuto in qualsiasi insieme.

Se l'insieme S è costituito da n elementi, allora il numero di sottoinsiemi di S che si possono considerare è pari a 2^n . Quindi si può affermare che l'insieme delle parti di S , ossia $\mathcal{P}(S)$, è costituito da 2^n elementi.

Esempio

Dato l'insieme $S = \{a, b, c\}$, il suo insieme delle parti conterrà i tre insiemi con un singolo elemento $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, i tre insiemi con coppie di elementi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, lo stesso insieme $S = \{a, b, c\}$ e l'insieme vuoto \emptyset .

Quindi:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S\}$$

L'insieme di partenza S ha $n = 3$ elementi. Si noti che nell'insieme delle parti di S vi sono proprio $2^n = 2^3 = 8$ elementi.

1.5 Coppia ordinata e prodotto cartesiano

Si considerino due insiemi non vuoti A e B . Una **coppia ordinata** è composta da due componenti a e b , il primo appartenente all'insieme A ed il secondo appartenente all'insieme B , presi in questo preciso ordine. La coppia si indica con il simbolo (a, b) .

L'insieme di tutte le coppie che possono essere formate con gli elementi di A e di B è detto insieme **prodotto cartesiano** di A e B e viene indicato con $A \times B$. Quindi, si può scrivere:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Si ha che $A \times B \neq B \times A$, difatti in una generica coppia del prodotto $B \times A$ sono presenti prima gli elementi di B e poi quelli di A , mentre nella coppia del prodotto $A \times B$ avviene il viceversa.

Se l'insieme A è costituito da n elementi e l'insieme B è costituito da m elementi, allora l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ è costituito da un numero di elementi pari a $n \times m$.

Inoltre, dato un insieme A , si può definire anche A^2 , come prodotto $A \times A$. In generale si scrive anche:

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}} = A^n$$

L'uguaglianza di due coppie implica l'uguaglianza dei loro elementi in modo ordinato, ossia:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Più in generale si possono definire terne ordinate (a, b, c) , quadruple (a, b, c, d) ed ennuple (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Due ennuple sono uguali quando sono ordinatamente uguali i loro n elementi.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

Esempio

Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \quad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di $A \times B$ ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B .

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

Si noti che il numero di elementi di $A \times B$ è pari a $2 \times 3 = 6$.

1.6 Relazione binaria

Si considerino due insiemi A e B . Si può pensare di stabilire una legge che associ a un generico elemento dell'insieme A , un elemento dell'insieme B , creando delle coppie ordinate. Sia G l'insieme di queste coppie ordinate $G \subseteq A \times B$.

La legge che stabilisce la modalità con cui gli elementi di A vengono associati a quelli di B è detta **relazione binaria** o **corrispondenza binaria** e viene indicata con la coppia $\mathcal{R} = (A \times B, G)$. L'insieme G si dice anche **grafico** o **insieme rappresentativo** della relazione \mathcal{R} . Se la relazione binaria associa all'elemento $a \in A$, l'elemento $b \in B$, allora si scrive $a \mathcal{R} b$. Questa notazione sta ad indicare che a è messo in relazione con b da \mathcal{R} , oppure che b è il corrispondente di a per mezzo di \mathcal{R} .

La relazione \mathcal{R} è, in effetti, definita mediante un insieme di coppie, ossia di tutte le coppie di elementi di A , messi in relazione con elementi di B mediante la relazione \mathcal{R} . Queste coppie sono contenute nell'insieme G .

Il **dominio** (**insieme di definizione**) della relazione \mathcal{R} è l'insieme degli elementi a di A per i quali esiste un elemento b di B , tale che la coppia $(a, b) \in G$. Pertanto il dominio di \mathcal{R} è un sottoinsieme di A . Simbolicamente si scrive:

$$\text{Dominio di } \mathcal{R} = \{a \in A : \exists b \in B : (a, b) \in G\}$$

Il **codominio** della relazione \mathcal{R} è l'insieme degli elementi b di B tali che esiste un elemento a di A tale che la coppia $(a, b) \in G$. Pertanto il codominio di \mathcal{R} è un sottoinsieme di B . Simbolicamente si scrive:

$$\text{Codominio di } \mathcal{R} = \{b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in G\}$$



Esempi

1) Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \quad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di $A \times B$ ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B .

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

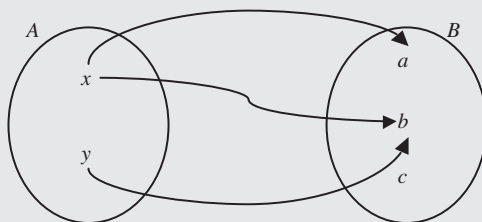
Si può considerare una relazione \mathcal{R} che individua il seguente sottoinsieme G :

$$G = \{(x, a), (x, b), (y, b)\}$$

In pratica la relazione \mathcal{R} mette in relazione x con a ed anche con b e mette in relazione y con la sola b ; quindi si può scrivere:

$$x\mathcal{R}a, x\mathcal{R}b, y\mathcal{R}b$$

Si può considerare una rappresentazione grafica della relazione \mathcal{R} , come mostrata in figura.



2) Considerati gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

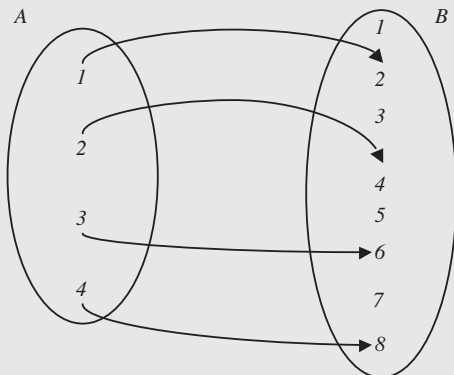
Si può considerare una relazione \mathcal{R} che associa a un numero di A , il suo doppio, contenuto in B . \mathcal{R} individua il seguente sottoinsieme:

$$G = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

Si può anche scrivere:

$$1\mathcal{R}2, 2\mathcal{R}4, 3\mathcal{R}6, 4\mathcal{R}8$$

La rappresentazione grafica della relazione \mathcal{R} è mostrata in figura.



1.7 Relazioni di equivalenza

In generale, una relazione binaria mette in relazione elementi di insiemi distinti. È possibile comunque considerare una relazione che associ a un elemento di un insieme, un altro elemento dell'insieme stesso.

Particolari tipi di relazione che agiscono all'interno di un insieme sono le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine.

Sia A un generico insieme e siano a, b e c tre elementi di A .

Una **relazione di equivalenza** \mathcal{R} ha le seguenti proprietà:

- **Riflessiva** – Ogni elemento a dell'insieme A è in relazione con se stesso;
 $\forall a \in A : a\mathcal{R}a$.
- **Simmetrica** – Per qualsiasi elemento a che è in relazione con b ne deriva che b è in relazione con a ;
 $\forall a, b \in A : a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
- **Transitiva** – Per tutti gli elementi a, b e c , tali che a è in relazione con b e b è in relazione con c ne deriva che a è in relazione con c ;
 $\forall a, b, c \in A : a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Quando due elementi di un insieme sono in relazione di equivalenza, essi si dicono **equivalenti**.

Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutti gli alunni di una scuola. Ciascun alunno è collocato in una classe. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici alunni. Si può considerare la relazione di equivalenza \mathcal{R} = "è nella stessa classe di".

Questa relazione di equivalenza nell'insieme degli alunni è riflessiva in quanto:

– Antonio è nella stessa classe di Antonio

Tale relazione è simmetrica:

– Se Antonio è nella stessa classe di Biagio, allora Biagio è nella stessa classe di Antonio.

Tale relazione è transitiva:

– Se Antonio è nella stessa classe di Biagio e Biagio è nella stessa classe di Carlo, allora Antonio è nella stessa classe di Carlo.

Considerata una relazione di equivalenza \mathcal{R} in un insieme di definizione A , si può definire il grafico G , per cui $\mathcal{R} = (A \times A, G)$. Si definisce **classe di equivalenza** di x rispetto a \mathcal{R} , l'insieme di quegli elementi appartenenti all'insieme A che sono equivalenti a x , ossia che sono in relazione con x .

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x\mathcal{R}y\}$$

In pratica si individua una classe di equivalenza scegliendo un elemento x ed inserendo nella classe tutti gli elementi che sono equivalenti a x . Di seguito si riportano alcune proprietà delle classi di equivalenza:

1. L'elemento x appartiene alla propria classe di equivalenza $x \in [x]_{\mathcal{R}}$
2. Presa una coppia di elementi x e y di A , o le loro classi di equivalenza coincidono, oppure hanno intersezione pari al vuoto.
 $\forall x, y \in A \Rightarrow [x] = [y] \text{ / } [x] \cap [y] = \emptyset.$
3. L'unione di tutte le classi di equivalenza dell'insieme A coincide con l'insieme A .

L'**insieme quoziente** di A rispetto alla relazione \mathcal{R} è l'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza di A ; esso si indica con A/\mathcal{R} .

$$A/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}$$

1.8 Relazioni d'ordine largo

Sia A un generico insieme e siano a , b e c tre elementi di A .

Una **relazione d'ordine largo** \mathcal{R} ha le seguenti proprietà:

- > **Riflessiva** – Ogni elemento a dell'insieme A è in relazione con se stesso;
 $a\mathcal{R}a.$
- > **Antisimmetrica** – Per qualsiasi elemento a che è in relazione con b tale che $a \neq b$ (a diverso da b), ne deriva che b non è in relazione con a ;
 se $a\mathcal{R}b$ ($a \neq b$), allora $b\not\mathcal{R}a.$
- > **Transitiva** – Per tutti gli elementi a , b e c , tali che a è in relazione con b e b è in relazione con c ne deriva che a è in relazione con c ;
 se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$, allora $a\mathcal{R}c.$

Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutte le tessere di una biblioteca. Ciascuna tessera è caratterizzata da un numero identificativo diverso da tutti gli altri numeri, ossia da un identificativo univoco. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici utenti tesserati della biblioteca. Si può considerare la relazione di ordine largo \mathcal{R} = "non ha un numero di tessera più alto di", la cui negazione è \mathcal{R}^* = "ha un numero di tessera più alto di".

Questa relazione di ordine largo nell'insieme dei tesserati è riflessiva in quanto:

- Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Antonio

Tale relazione è antisimmetrica:

- Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio, allora Biagio *ha un numero di tessera più alto di* Antonio.

Tale relazione è transitiva:

- Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio e Biagio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo, allora Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo.

Capitolo 4

Informatica

4.1 Modi di funzionamento di calcolatori elettronici ed elaboratori dati

4.1.1 Porte logiche e bit

L'informatica, in quanto scienza che si occupa del trattamento dell'informazione mediante procedure automatizzate, è strettamente legata ai **calcolatori**, intesi come macchine programmabili in grado di elaborare dati numerici, testi, immagini, suoni e filmati. Le prime macchine meccaniche per il calcolo risalgono al XVII secolo, fino alla Macchina di Turing e all'architettura di Von Neumann che negli anni '50 del secolo scorso hanno dato le linee guida sull'architettura sulla quale è basata ancora oggi il funzionamento dei computer moderni.

Una calcolatrice o un elaboratore elettronico possono essere visti come esempi di reti logiche, vale a dire come un insieme di dispositivi chiamati **porte logiche** opportunamente connessi. Le porte logiche sono dei dispositivi capaci di eseguire operazioni logiche su segnali binari, i quali possono essere definiti come dei segnali digitali che rappresentano le informazioni sotto forma di un **bit** (termine derivato dalla fusione di *binary digit*).

Il concetto di bit è stato introdotto nel 1948 da Claude Shannon, fondando la teoria dell'informazione, nel suo articolo *A Mathematical Theory of Communication* in cui definisce un bit come *la quantità di informazione necessaria e sufficiente a rimuovere l'incertezza relativa al realizzarsi di uno tra due eventi equiprobabili e mutualmente esclusivi*.

In ambito informatico il bit indica la quantità minima di informazione che può essere gestita da qualsiasi elaboratore e per questo può essere definito come l'unità di misura fondamentale in Informatica.

I segnali binari sono livelli di tensione: ogni volta che in una parte del circuito è presente della corrente elettrica la calcolatrice "scrive" il numero 1, altrimenti "scrive" 0.

Dato che l'informazione pari ad 1 bit è piuttosto ridotta, per codificare informazioni più elaborate, come lettere, numeri e immagini, si utilizzano gruppi di 8 bit, che vengono definiti **byte**.

Poiché un bit può assumere solo due valori, il byte può assumere $2^8 = 256$ valori. L'associazione tra i valori del byte e i caratteri alfanumerici, permettendo la comunicazione tra utenti e calcolatori senza dover ricorrere al codice binario, avviene a partire dal 1964 tramite il **sistema di codifica ASCII**.



Nel sistema decimale, definito come standard internazionale dall'*International Standardization Organization (ISO)*, il primo multiplo del byte è il kilobyte ed equivale a 10^3 byte (1.000 byte). Riportiamo di seguito i principi multipli:

Nome	Sigla	Valore
Kilobyte	KB	10^3 byte
Megabyte	MB	10^6 byte
Gigabyte	GB	10^9 byte
Terabyte	TB	10^{12} byte
Petabyte	PB	10^{15} byte
Exabyte	EB	10^{18} byte

4.1.2 L'algebra di Boole

L'algebra Booleana (o *Swithing Algebra*) prende il nome dal matematico inglese George Boole (1815-1864) autore del testo *The mathematical analysis of logic* ed è il fondamento per la progettazione di circuiti logici digitali. Si tratta del ramo dell'algebra in cui le variabili possono assumere solamente i due valori logici codificati nel bit e denotati con 0 e 1.

Nell'algebra booleana le operazioni fondamentali sono effettuate tramite gli **operatori logici**:

- **AND** = congiunzione (prodotto logico);
- **OR** = disgiunzione (somma logica);
- **NOT** = negazione (complementazione).

La combinazione di AND, OR e NOT permette di sviluppare qualsiasi **funzione booleana**. Le funzioni booleane sono caratterizzate da una o più variabili di ingresso (variabili indipendenti) e una variabile di uscita (variabile dipendente). Una **porta logica** è un circuito digitale in grado di effettuare una particolare operazione logica di una o più variabili booleane. In base al numero di ingressi, che rappresentano il numero di variabili che una porta logica può ricevere in input, le porte logiche si possono classificare in:

- porte a due variabili: AND, OR, EXOR, NOR, NAND e EXNOR;
- porte a singola variabile: NOT.

In particolare, le porte OR, AND e NOT costituiscono un insieme funzionalmente completo, nel senso che attraverso gli operatori logici che implementano è possibile generare qualsiasi funzione logica.

Gli operatori booleani si possono rappresentare attraverso una:

- *rappresentazione algebrica*: utilizzando dei simboli;
- *rappresentazione circuitale*: rappresentazione grafica dove gli operatori sono rappresentati attraverso porte collegate da segmenti.

Nella rappresentazione circuitale, il valore delle variabili è un *segnale* (attività elettrica), che può essere *presente* o *assente*.

Le **tabelle di verità** sono un metodo semplice per capire tutte le possibili combinazioni che possiamo avere in ingresso.

AND



AND è una porta logica che riceve in ingresso almeno due valori e restituisce 1 solo se tutti i valori di ingresso hanno valore 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tavola di verità dell'operatore AND

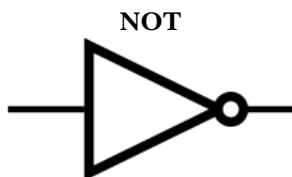
OR



OR è una porta logica che riceve in ingresso almeno 2 valori e restituisce 1 se almeno un valore di ingresso ha valore 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tavola di verità dell'operatore OR

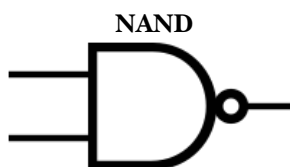


Porta logica che inverte il segnale in ingresso.

Questa porta logica ha un solo ingresso ed una uscita che sarà 1 se l'ingresso è 0 o 0 se l'ingresso è 1.

INPUT		OUTPUT
A		NOT A
0		1
1		0

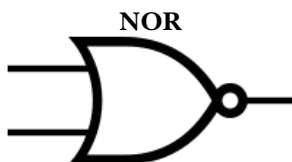
Tavola di verità dell'operatore NOT



Al contrario la porta NAND restituisce la negazione di una porta AND e quindi restituisce 1 quando negli ingressi è presente lo 0, e 0 solo quando tutti i valori in ingresso sono 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore NAND



La porta NOR restituisce la negazione di una porta OR e quindi restituisce 1 solo quando tutti i valori in ingresso sono 0.

INPUT		OUTPUT
A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore NOR

EXOR



EXOR (EXCLUSIVE OR) è una porta logica che riceve in ingresso n valori e restituisce “1” in uscita se, e solo se, vi è almeno un ingresso che differisce dagli altri. Segue la tavola di verità di una porta XOR a “ $n=2$ ” ingressi:

INPUT		OUTPUT
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore EXOR

EXNOR



EXNOR (EXCLUSIVE NOR) è una porta logica che riceve in ingresso n e restituisce “1” in uscita se, e solo se, tutti gli ingressi hanno il medesimo valore logico. In breve, è equivalente alla negazione della porta EXOR.

il **nuovo** concorso a cattedra

MANUALE

Scienze **Matematiche applicate** nella **scuola secondaria**
per la **preparazione al concorso**

Manuale completo per la **preparazione al Concorso a Cattedra** per la **classe di concorso A47** (Scienze matematiche applicate) nella scuola secondaria.

Il volume è diviso in Parti.

La **Prima Parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di andare incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte.

La **Seconda Parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile **Appendice** recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo dedicato all'informatica** specifica per la matematica applicata.

La **Terza Parte**, accessibile **online**, comprende esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il testo è completato da un **software di simulazione**, mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite, oltre che da eventuali **materiali didattici, approfondimenti e risorse** disponibili, anch'essi, **online**.

PER COMPLETARE LA PREPARAZIONE:

CC1/1 • PARTE GENERALE - LEGISLAZIONE SCOLASTICA PER TUTTE LE CLASSI DI CONCORSO



IN OMAGGIO
ESTENSIONI ONLINE

Software di
simulazione

Contenuti
extra

Le **risorse di studio** gratuite sono accessibili per 18 mesi dalla propria area riservata, previa registrazione al sito **edises.it**.



EdiSES
edizioni

 blog.edises.it
 infoconcorsi.edises.it
   

€ 40,00

