il **nuovo** concorso
a cattedra

MANUALE

Scienze **Matematiche applicate** nella **scuola secondaria**

per la **preparazione** al **concorso**

Classe di concorso:

A47 Scienze matematiche applicate

Emiliano **Barbuto** e Santo **Calabrese**

III Edizione

IN OMAGGIO ESTENSIONI ONLINE

Software di **simulazione**

Contenuti **extra**

EdiSES edizioni

Manuale

Scienze **Matematiche applicate** nella **scuola secondaria**

Accedi ai servizi riservati

Il codice personale contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a:

MATERIALI DI INTERESSE E CONTENUTI AGGIUNTIVI

CODICE PERSONALE

Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.
Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate nella pagina seguente.
Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso ai servizi riservati** ha la **durata di 18 mesi** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Istruzioni per accedere ai contenuti e ai servizi riservati

SEGUI QUESTE SEMPLICI ISTRUZIONI

SE SEI REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**

inserisci email e password

inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina

inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

SE NON SEI GIÀ REGISTRATO AL SITO

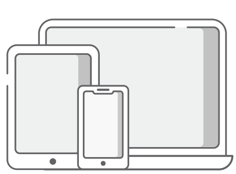
clicca su **Accedi al materiale didattico**

registrati al sito **edises.it**

attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione

torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per utenti registrati

CONTENUTI AGGIUNTIVI



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali e per informazioni sui nostri servizi puoi contattarci sulla piattaforma **assistenza.edises.it**

SCARICA L'APP **INFOCONCORSI** DISPONIBILE SU APP STORE E PLAY STORE

il **nuovo** concorso a cattedra

MANUALE

Scienze **Matematiche applicate**

nella **scuola secondaria**

a cura di

Emiliano **Barbuto** e Santo **Calabrese**

EdiSES
edizioni

Il nuovo Concorso a Cattedra – Scienze matematiche applicate - III Edizione

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2028 2027 2026 2025 2024

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Autori:
Emiliano Barbuto
Santo Calabrese
Andrea Monaco (per il Capitolo 4 Informatica, della Parte Seconda)
Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento *online*)

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano - Napoli
Fotocomposizione: EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli
Stampato presso Vulcanica S.r.l. - Nola (Na)
Per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 979 12 5602 135 2 **www.edises.it**

Sommario

Parte Prima
Matematica

Parte Seconda
Matematica applicata

Parte Terza
Esempi di Unità di Apprendimento

Finalità e struttura dell'opera

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica applicata**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.
Il testo è strutturato in parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.
La **seconda parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile Appendice recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo** dedicato all'**informatica** specifica per la matematica applicata.
L'ultima parte del testo disponibile **online**, è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.
Il testo è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite e da ulteriori s**ervizi riservati** online.

Ulteriori **materiali didattici** e **aggiornamenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nelle prime pagine del volume.
Eventuali errata-corrige saranno pubblicati sul sito *edises.it*, nella scheda "Aggiornamenti" della pagina dedicata al volume.
Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social.

blog.edises.it

Indice

Parte Prima
Matematica

Parte seconda
Matematica applicata

Parte Terza
Esempi di Unità di Apprendimento

Parte Prima

Matematica

SOMMARIO

Capitolo 1
Insiemi, relazioni, funzioni

1.1 Concetti fondamentali

I concetti di oggetto, insieme e proprietà costituiscono gli aspetti fondanti della teoria degli insiemi. Con il termine **oggetto** si indica qualsiasi elemento, mentre il termine **insieme** indica ogni raggruppamento, collezione, aggregato di elementi, indipendentemente dalla loro natura.
Un **diagramma di Eulero-Venn** (o semplicemente **diagramma di Venn**) è una rappresentazione grafica di un insieme che consiste nel racchiuderne gli elementi all'interno di una linea chiusa non intrecciata (Figura 1).

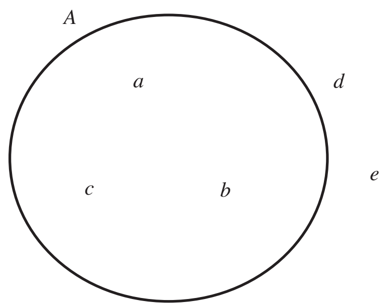


Figura 1 L'insieme A

In Figura 1 l'insieme A è composto dagli elementi indicati con a, b, c. Questo viene indicato nella rappresentazione tabulare con la notazione $A = \{a, b, c\}$. In riferimento ad un singolo elemento dell'insieme, la notazione $a \in A$ indica che l'elemento a "appartiene" all'insieme A. Per indicare che un elemento d non appartiene ad un insieme A si usa scrivere $d \notin A$.
La **proprietà** è un altro concetto innato ed indica una caratteristica che hanno tutti gli elementi appartenenti ad un insieme. Difatti una proprietà identifica un insieme, come nell'esempio seguente:

$$B = \{x : \text{“}x \text{ è un numero intero compreso tra 1 e 10”}\}$$

Il simbolo : significa "tale che". Pertanto, l'insieme B contiene quegli elementi x tali da avere la seguente proprietà: "x è un numero intero compreso tra 1 e 10", ossia B contiene i numeri interi compresi tra 1 e 10.
Più in generale si può disporre di un insieme S nel quale è possibile stabilire, per ciascuno dei suoi elementi, se possiede o meno una determinata proprietà P. In tal caso si dice che la proprietà P è **definita** nell'insieme S.

Quando una proprietà P ha come conseguenza una proprietà Q, ossia se un elemento di un insieme, possedendo la proprietà P, possiede anche la proprietà Q, allora si dice che P implica Q e si scrive:

$$P \Rightarrow Q$$

La precedente espressione si legge "Se P allora Q", oppure "P implica Q", oppure "P è una condizione sufficiente per Q" oppure "Q è una condizione necessaria per P". Con tali asserti si vuole stabilire che possedere la proprietà P è una condizione sufficiente per affermare che anche la proprietà Q è posseduta. Viceversa la proprietà Q non è sufficiente per stabilire che P è posseduta, ma è una condizione necessaria per possedere P, ossia è una condizione senza la quale non è possibile possedere P (si potrebbe dire intuitivamente che è preliminare a P). Alla luce di quanto affermato, si può stabilire che se la proprietà P implica Q, allora non è detto che Q implichi P.
Se due proprietà si implicano a vicenda si può scrivere:

$$P \Leftrightarrow Q$$

La precedente espressione si legge "P se e solo se Q". In tal caso P implica Q e Q implica P. Si può dire altresì che "P è equivalente a Q". In alternativa si può dire che "P è una condizione necessaria e sufficiente per Q".
Per descrivere le proprietà degli insiemi vengono spesso utilizzati i quantificatori. Il **quantificatore esistenziale** si denota con il simbolo $\exists$ e sta ad indicare l'esistenza di almeno un elemento (quindi anche più di uno) che gode di una determinata proprietà. Ad esempio $\exists x$ vuol dire "esiste almeno un elemento x". Il **quantificatore universale** si denota con il simbolo $\forall$ e sta ad indicare che una proprietà è posseduta da ogni elemento considerato. Ad esempio $\forall x$ vuol dire "per ogni x" oppure "qualunque x".

1.2 Relazione di inclusione

Considerati due insiemi S e T, per dire che S è un **sottoinsieme** di T, ossia che S è **incluso** in T, si scrive $S \subseteq T$. Per definizione si ha:

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

In pratica qualsiasi elemento appartenente a S è contenuto anche in T. Si può anche dire che la condizione di appartenere a S è sufficiente per appartenere anche a T, oppure che appartenere a T è condizione necessaria per appartenere anche a S.
La relazione di inclusione $\subseteq$ tiene aperta la possibilità che i due insiemi S e T siano identici, ossia $S = T$. In alternativa, la relazione di inclusione stretta $S \subset T$ implica che l'insieme S non può coincidere con T.
La proprietà di inclusione di un insieme S in un altro insieme T è data quindi dalla proprietà che viene espressa simbolicamente nel modo seguente:

$$\forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

Per negare tale proprietà occorre scambiare il quantificatore universale al primo membro dell'implicazione con il quantificatore esistenziale e negare il secondo membro dell'implicazione, ossia:

$$\exists x \in S \Rightarrow x \notin T$$

Quanto scritto rappresenta la relazione di non inclusione dell'insieme *S* nell'insieme *T*. Si noti che tale negazione comporta che almeno un elemento di *S* non sia contenuto in *T*; non necessariamente tutti gli elementi di *S* non devono essere contenuti in *T*.

1.3 Operazioni tra insiemi

Si considerano i due insiemi, mostrati in Figura 2, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c, e\}$.

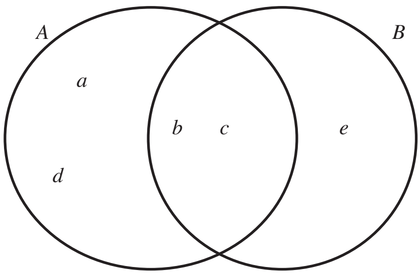


Figura 2 Gli insiemi A e B

L'**unione** tra i due insiemi è costituita da tutti gli elementi che si possono trovare in *A*, in *B* o in entrambi. L'unione viene indicata con $A \cup B$ e in tal caso è data da $A \cup B = \{ a, b, c, d, e\}$. Più in generale si ha:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{oppure} \quad x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Invece, l'**intersezione** tra due insiemi è composta solo da quegli elementi presenti in entrambi gli insiemi. Si indica l'intersezione con $A \cap B$. Nel caso specifico di Figura 2 si ha $A \cap B = \{b, c\}$. Più in generale si può scrivere:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

L'unione e l'intersezione degli insiemi *A* e *B* sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 3.

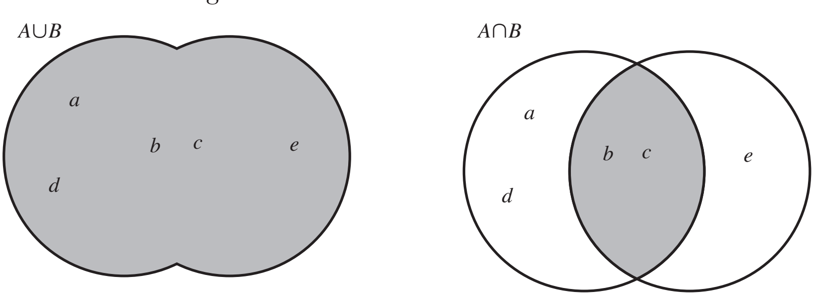


Figura 3 Unione degli insiemi A e B e intersezione degli insiemi A e B

La **differenza** tra A e B (indicata con $A - B$) è costituita da tutti gli elementi presenti in A a cui vengono sottratti quelli presenti anche in B. Nel caso in questione $A - B = \{a, d\}$. La differenza tra A e B è anche detta **complemento** di B rispetto ad A. Si ha inoltre $B - A = \{e\}$.
Più in generale si può scrivere:

$$A - B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Le differenze $A - B$ e $B - A$ sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 4.

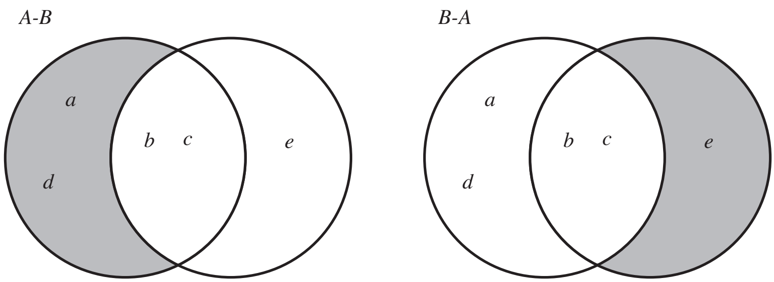


Figura 4 Differenza tra gli insiemi A e B e differenza tra gli insiemi B e A

L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** ed è indicato con il simbolo $\varnothing$. L'insieme vuoto è per definizione incluso in qualsiasi insieme A.

$$\forall A : \varnothing \subseteq A$$

Se due insiemi sono uguali, ossia contengono gli stessi elementi, allora la loro differenza è data dall'insieme vuoto.

$$A = B \Rightarrow A - B = \varnothing$$

Infine si sottolinea come dalla Figura 3 e dalla Figura 4 si deduce la seguente regola generale:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

L'unione degli insiemi A e B è data dall'unione di tre insiemi: l'intersezione di A e B, il complemento di B rispetto ad A e il complemento di A rispetto a B. Difatti un elemento dell'insieme $A \cup B$ può appartenere o a entrambi gli insiemi (l'intersezione), o al solo insieme A (differenza $A - B$) oppure al solo insieme B (differenza $B - A$).
Considerati due insiemi A e B, si riportano alcune relazioni insiemistiche.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Inoltre, dati tre insiemi A, B e S, tali che $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, si ha:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow S - A \supseteq S - B$$

Le seguenti sono dette **regole di De Morgan**.

$$S - (A \cup B) = (S - A) \cap (S - B)$$
$$S - (A \cap B) = (S - A) \cup (S - B)$$

Esempi

1) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5\}$, si determinano gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.
L'insieme intersezione è dato dagli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme B. In effetti, B è un sottoinsieme di A.
L'insieme unione è dato dagli elementi che sono in A, in B oppure in entrambi.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme A.
L'insieme differenza $A - B$ è dato da:

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

L'insieme differenza $B - A$ coincide con l'insieme vuoto, in quanto da B vengono rimossi tutti gli elementi ad esso appartenenti:

$$B - A = \emptyset$$

2) Dati gli insiemi A e B tali che $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, si determinano gli insiemi A, $A - B$ e $B - A$.
L'insieme $B - A = B - (A \cap B)$, in quanto togliere dall'insieme B tutti gli elementi di A è equivalente a togliere i soli elementi che B ha in comune con A. Quindi:

$$B - A = \{2, 6\}.$$

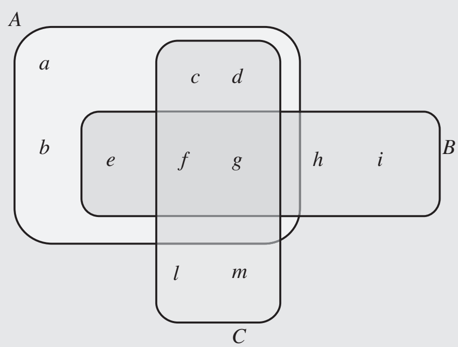
Se dall'insieme $A \cup B$ si tolgono gli elementi di $A \cap B$ e di $B - A$, si ottengono i soli elementi dell'insieme $A - B$. Quindi:

$$A - B = \{4, 7\}$$

Infine $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, ossia gli elementi di A sono quelli che appartengono solo ad A oppure ad A e B contemporaneamente. Quindi:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

3) Dato il diagramma di Venn in figura, si determinano gli insiemi $A \cap B \cap C$, $A \cap C$, $(A \cap C) - (B \cap C)$, $B - C$.



Osservato il diagramma, si ottiene:

$$A \cap B \cap C = \{f, g\}$$
$$A \cap C = \{c, d, f, g\}$$

Inoltre, siccome $B \cap C = \{f, g\}$, allora $(A \cap C) - (B \cap C) = \{c, d\}$.

$$B - C = \{e, h, i\}$$

1.4 Insieme delle parti

Considerato un insieme S, si indica con $\wp(S)$ l'insieme delle parti di S. Gli elementi dell'insieme delle parti sono tutti i sottoinsiemi A di S. Quindi si ha:

$$\wp(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

Si noti che in $\wp(S)$ sono contenuti anche i sottoinsiemi **impropri** di S, ossia lo stesso insieme S e l'insieme vuoto $\varnothing$, contenuto in qualsiasi insieme.
Se l'insieme S è costituito da n elementi, allora il numero di sottoinsiemi di S che si possono considerare è pari a 2^n. Quindi si può affermare che l'insieme delle parti di S, ossia $\wp(S)$, è costituito da 2^n elementi.

Esempio
Dato l'insieme $S = \{a, b, c\}$, il suo insieme delle parti conterrà i tre insiemi con un singolo elemento $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, i tre insiemi con coppie di elementi $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, lo stesso insieme $S = \{a, b, c\}$ e l'insieme vuoto $\varnothing$.
Quindi:

$$\wp(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, S\}$$

L'insieme di partenza S ha $n = 3$ elementi. Si noti che nell'insieme delle parti di S vi sono proprio $2^n = 2^3 = 8$ elementi.

1.5 Coppia ordinata e prodotto cartesiano

Si considerino due insiemi non vuoti A e B. Una **coppia ordinata** è composta da due componenti a e b, il primo appartenente all'insieme A ed il secondo appartenente all'insieme B, presi in questo preciso ordine. La coppia si indica con il simbolo (a, b).
L'insieme di tutte le coppie che possono essere formate con gli elementi di A e di B è detto insieme **prodotto cartesiano** di A e B e viene indicato con $A \times B$. Quindi, si può scrivere:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Si ha che $A \times B \neq B \times A$, difatti in una generica coppia del prodotto $B \times A$ sono presenti prima gli elementi di B e poi quelli di A, mentre nella coppia del prodotto $A \times B$ avviene il viceversa.
Se l'insieme A è costituito da n elementi e l'insieme B è costituito da m elementi, allora l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ è costituito da un numero di elementi pari a $n \times m$.

Inoltre, dato un insieme A, si può definire anche A^2, come prodotto $A \times A$. In generale si scrive anche:

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ volte}} = A^n$$

L'uguaglianza di due coppie implica l'uguaglianza dei loro elementi in modo ordinato, ossia:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Più in generale si possono definire terne ordinate (a, b, c), quadruple (a, b, c, d) ed ennuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Due ennuple sono uguali quando sono ordinatamente uguali i loro n elementi.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$$

Esempio
Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \qquad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di $A \times B$ ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B.

$$A \times B = \{(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)\}$$

Si noti che il numero di elementi di $A \times B$ è pari a $2 \times 3 = 6$.

1.6 Relazione binaria

Si considerino due insiemi A e B. Si può pensare di stabilire una legge che associ a un generico elemento dell'insieme A, un elemento dell'insieme B, creando delle coppie ordinate. Sia G l'insieme di queste coppie ordinate $G \subseteq A \times B$.
La legge che stabilisce la modalità con cui gli elementi di A vengono associati a quelli di B è detta **relazione binaria** o **corrispondenza binaria** e viene indicata con la coppia $\mathcal{R} = (A \times B, G)$. L'insieme G si dice anche **grafico** o **insieme rappresentativo** della relazione $\mathcal{R}$. Se la relazione binaria associa all'elemento $a \in A$, l'elemento $b \in B$, allora si scrive $a \mathcal{R} b$. Questa notazione sta ad indicare che a è messo in relazione con b da $\mathcal{R}$, oppure che b è il corrispondente di a per mezzo di $\mathcal{R}$.
La relazione $\mathcal{R}$ è, in effetti, definita mediante un insieme di coppie, ossia di tutte le coppie di elementi di A, messi in relazione con elementi di B mediante la relazione $\mathcal{R}$. Queste coppie sono contenute nell'insieme G.
Il **dominio** (**insieme di definizione**) della relazione $\mathcal{R}$ è l'insieme degli elementi a di A per i quali esiste un elemento b di B, tale che la coppia $(a,b) \in G$. Pertanto il dominio di $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme di A. Simbolicamente si scrive:

$$\text{Dominio di } \mathcal{R} = \{a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in G\}$$

Il **codominio** della relazione $\mathcal{R}$ è l'insieme degli elementi b di B tali che esiste un elemento a di A tale che la coppia $(a,b) \in G$. Pertanto il codominio di $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme di B. Simbolicamente si scrive:

$$\text{Codominio di } \mathcal{R} = \{b \in B : \exists a \in A : (a,b) \in G\}$$

Esempi

1) Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \qquad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di $A \times B$ ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B.

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

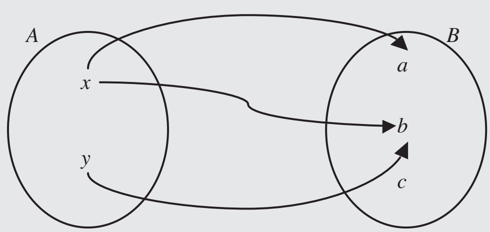
Si può considerare una relazione $\mathcal{R}$ che individua il seguente sottoinsieme G:

$$G = \{(x, a), (x, b), (y, b)\}$$

In pratica la relazione $\mathcal{R}$ mette in relazione x con a ed anche con b e mette in relazione y con la sola b; quindi si può scrivere:

$$x \Re a, \;\; x \Re b, \;\; y \Re b$$

Si può considerare una rappresentazione grafica della relazione $\mathcal{R}$, come mostrata in figura.



2) Considerati gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

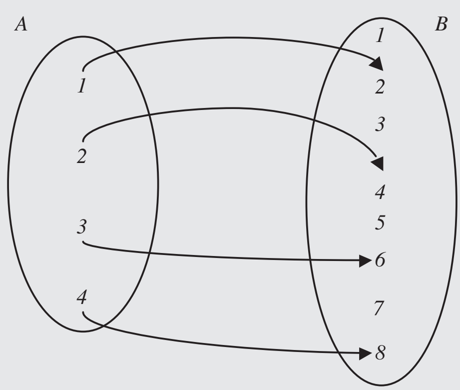
Si può considerare una relazione $\mathcal{R}$ che associa a un numero di A, il suo doppio, contenuto in B. $\mathcal{R}$ individua il seguente sottoinsieme:

$$G = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

Si può anche scrivere:

$$1\Re 2, \;\; 2\Re 4, \;\; 3\Re 6, \;\; 4\Re 8$$

La rappresentazione grafica della relazione $\mathcal{R}$ è mostrata in figura.



1.7 Relazioni di equivalenza

In generale, una relazione binaria mette in relazione elementi di insiemi distinti. È possibile comunque considerare una relazione che associ a un elemento di un insieme, un altro elemento dell'insieme stesso.
Particolari tipi di relazione che agiscono all'interno di un insieme sono le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine.
Sia A un generico insieme e siano a, b e c tre elementi di A.
Una **relazione di equivalenza** $\mathcal{R}$ ha le seguenti proprietà:

- ***Riflessiva*** – Ogni elemento a dell'insieme A è in relazione con se stesso;
  $\forall a \in A : a\mathcal{R}a.$
- ***Simmetrica*** – Per qualsiasi elemento a che è in relazione con b ne deriva che b è in relazione con a;
  $\forall a,b \in A : a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a.$
- ***Transitiva*** – Per tutti gli elementi a, b e c, tali che a è in relazione con b e b è in relazione con c ne deriva che a è in relazione con c;
  $\forall a,b,c \in A : a\mathcal{R}b \quad b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c.$

Quando due elementi di un insieme sono in relazione di equivalenza, essi si dicono **equivalenti**.

Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutti gli alunni di una scuola. Ciascun alunno è collocato in una classe. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici alunni. Si può considerare la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ = "è nella stessa classe di".
Questa relazione di equivalenza nell'insieme degli alunni è riflessiva in quanto:

– Antonio *è nella stessa classe di* Antonio

Tale relazione è simmetrica:

– Se Antonio *è nella stessa classe di* Biagio, allora Biagio *è nella stessa classe di* Antonio.

Tale relazione è transitiva:

– Se Antonio *è nella stessa classe di* Biagio e Biagio *è nella stessa classe di* Carlo, allora Antonio *è nella stessa classe di* Carlo.

Considerata una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in un insieme di definizione A, si può definire il grafico G, per cui $\mathcal{R} = (A \times A, G)$. Si definisce **classe di equivalenza** di X rispetto a $\mathcal{R}$, l'insieme di quegli elementi appartenenti all'insieme A che sono equivalenti a x, ossia che sono in relazione con x.

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x\mathcal{R}y\}$$

In pratica si individua una classe di equivalenza scegliendo un elemento x ed inserendo nella classe tutti gli elementi che sono equivalenti a x. Di seguito si riportano alcune proprietà delle classi di equivalenza:

1. L'elemento x appartiene alla propria classe di equivalenza $x \in [x]_{\mathfrak{R}}$
2. Presa una coppia di elementi x e y di A, o le loro classi di equivalenza coincidono, oppure hanno intersezione pari al vuoto.
   $\forall x,y \in A \Rightarrow [x] = [y] \;/\; [x] \cap [y] = \varnothing$.
3. L'unione di tutte le classi di equivalenza dell'insieme A coincide con l'insieme A.

L'**insieme quoziente** di A rispetto alla relazione $\mathfrak{R}$ è l'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza di A; esso si indica con $A/\mathfrak{R}$.

$$A/\mathfrak{R} = \{[x]_{\mathfrak{R}} : x \in A\}$$

1.8 Relazioni d'ordine largo

Sia A un generico insieme e siano a, b e c tre elementi di A.
Una **relazione d'ordine largo** $\mathfrak{R}$ ha le seguenti proprietà:

> ***Riflessiva*** – Ogni elemento a dell'insieme A è in relazione con se stesso; $a\mathfrak{R}a$.

> ***Antisimmetrica*** – Per qualsiasi elemento a che è in relazione con b tale che $a \neq b$ (a diverso da b), ne deriva che b non è in relazione con a; se $a\mathfrak{R}b (a \neq b)$, allora $b \not\mathfrak{R} a$.

> ***Transitiva*** – Per tutti gli elementi a, b e c, tali che a è in relazione con b e b è in relazione con c ne deriva che a è in relazione con c; se $a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c$, allora $a\mathfrak{R}c$.

Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutte le tessere di una biblioteca. Ciascuna tessera è caratterizzata da un numero identificativo diverso da tutti gli altri numeri, ossia da un identificativo univoco. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici utenti tesserati della biblioteca. Si può considerare la relazione di ordine largo $\mathfrak{R}$ = "non ha un numero di tessera più alto di", la cui negazione è $\not\mathfrak{R}$ = "ha un numero di tessera più alto di".

Questa relazione di ordine largo nell'insieme dei tesserati è riflessiva in quanto:

– Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Antonio

Tale relazione è antisimmetrica:

– Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio, allora Biagio *ha un numero di tessera più alto di* Antonio.

Tale relazione è transitiva:

– Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio e Biagio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo, allora Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo.

Capitolo 4
Informatica

4.1 Modi di funzionamento di calcolatori elettronici ed elaboratori dati

4.1.1 Porte logiche e bit

L'informatica, in quanto scienza che si occupa del trattamento dell'informazione mediante procedure automatizzate, è strettamente legata ai **calcolatori**, intesi come macchine programmabili in grado di elaborare dati numerici, testi, immagini, suoni e filmati. Le prima macchine meccaniche per il calcolo risalgono al XVII secolo, fino alla Macchina di Turing e all'architettura di Von Neumann che negli anni '50 del secolo scorso hanno dato le linee guida sull'architettura sulla quale è basata ancora oggi il funzionamento dei computer moderni.
Una calcolatrice o un elaboratore elettronico possono essere visti come esempi di reti logiche, vale a dire come un insieme di dispositivi chiamati **porte logiche** opportunamente connessi. Le porte logiche sono dei dispositivi capaci di eseguire operazioni logiche su segnali binari, i quali possono essere definiti come dei segnali digitali che rappresentano le informazioni sotto forma di un **bit** (termine derivato dalla fusione di *bynary digit*).
Il concetto di bit è stato introdotto nel 1948 da Claude Shannon, fondando la teoria dell'informazione, nel suo articolo *A Mathematical Theory of Communication* in cui definisce un bit come *la quantità di informazione necessaria e sufficiente a rimuovere l'incertezza relativa al realizzarsi di uno tra due eventi equiprobabili e mutualmente esclusivi.*
In ambito informatico il bit indica la quantità minima di informazione che può essere gestita da qualsiasi elaboratore e per questo può essere definito come l'unità di misura fondamentale in Informatica.
I segnali binari sono livelli di tensione: ogni volta che in una parte del circuito è presente della corrente elettrica la calcolatrice "scrive" il numero 1, altrimenti "scrive" 0.
Dato che l'informazione pari ad 1 bit è piuttosto ridotta, per codificare informazioni più elaborate, come lettere, numeri e immagini, si utilizzano gruppi di 8 bit, che vengono definiti **byte**.
Poiché un bit può assumere solo due valori, il byte può assumere $2^8 = 256$ valori.
L'associazione tra i valori del byte e i caratteri alfanumerici, permettendo la comunicazione tra utenti e calcolatori senza dover ricorrere al codice binario, avviene a partire dal 1964 tramite il **sistema di codifica ASCII**.

Nel sistema decimale, definito come standard internazionale dall'*International Standardization Organization (ISO)*, il primo multiplo del byte è il kilobyte ed equivale a 10^3 byte (1.000 byte). Riportiamo di seguito i principli multipli:

Nome	*Sigla*	*Valore*
Kilobyte	KB	10^3 byte
Megabyte	MB	10^6 byte
Gigabyte	GB	10^9 byte
Terabyte	TB	10^{12} byte
Petabyte	PB	10^{15} byte
Exabyte	EB	10^{18} byte

4.1.2 L'algebra di Boole

L'algebra Booleana (o *Swithing Algebra*) prende il nome dal matematico inglese George Boole (1815-1864) autore del testo *The mathematical analysis of logic* ed è il fondamento per la progettazione di circuiti logici digitali. Si tratta del ramo dell'algebra in cui le variabili possono assumere solamente i due valori logici codificati nel bit e denotati con 0 e 1.
Nell'algebra booleana le operazioni fondamentali sono effettuate tramite gli **operatori logici**:

- **AND** = congiunzione (prodotto logico);
- **OR** = disgiunzione (somma logica);
- **NOT** = negazione (complementazione).

La combinazione di AND, OR e NOT permette di sviluppare qualsiasi **funzione booleana**. Le funzioni booleane sono caratterizzate da una o più variabili di ingresso (variabili indipendenti) e una variabile di uscita (variabile dipendente).
Una **porta logica** è un circuito digitale in grado di effettuare una particolare operazione logica di una o più variabili booleane. In base al numero di ingressi, che rappresentano il numero di variabili che una porta logica può ricevere in input, le porte logiche si possono classificare in:

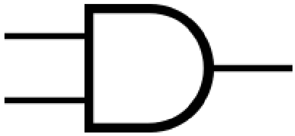
- porte a due variabili: AND, OR, EXOR, NOR, NAND e EXNOR;
- porte a singola variabile: NOT.

In particolare, le porte OR, AND e NOT costituiscono un insieme funzionalmente completo, nel senso che attraverso gli operatori logici che implementano è possibile generare qualsiasi funzione logica.
Gli operatori booleani si possono rappresentare attraverso una:

- *rappresentazione algebrica*: utilizzando dei simboli;
- *rappresentazione circuitale*: rappresentazione grafica dove gli operatori sono rappresentati attraverso porte collegate da segmenti.

Nella rappresentazione circuitale, il valore delle variabili è un *segnale* (attività elettrica), che può essere *presente* o *assente*.
Le **tabelle di verità** sono un metodo semplice per capire tutte le possibili combinazioni che possiamo avere in ingresso.

AND



AND è una porta logica che riceve in ingresso almeno due valori e restituisce 1 solo se tutti i valori di ingresso hanno valore 1.

INPUT		**OUTPUT**
A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tavola di verità dell'operatore AND

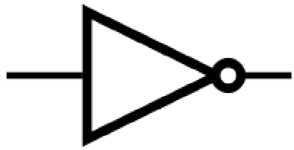
OR

OR è una porta logica che riceve in ingresso almeno 2 valori e restituisce 1 se almeno un valore di ingresso ha valore 1.

INPUT		**OUTPUT**
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tavola di verità dell'operatore OR

NOT

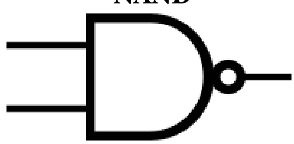


Porta logica che inverte il segnale in ingresso.
Questa porta logica ha un solo ingresso ed una uscita che sarà 1 se l'ingresso è 0 o 0 se l'ingresso è 1.

INPUT	**OUTPUT**
A	NOT A
0	1
1	0

Tavola di verità dell'operatore NOT

NAND

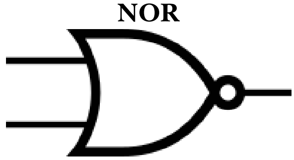


Al contrario la porta NAND restituisce la negazione di una porta AND e quindi restituisce 1 quando negli ingressi è presente lo 0, e 0 solo quando tutti i valori in ingresso sono 1.

INPUT		**OUTPUT**
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore NAND

NOR

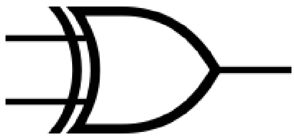


La porta NOR restituisce la negazione di una porta OR e quindi restituisce 1 solo quando tutti i valori in ingresso sono 0.

INPUT		OUTPUT
A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore NOR

EXOR

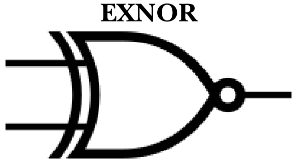


EXOR (EXCLUSIVE OR) è una porta logica che riceve in ingresso *n* valori e restituisce "1" in uscita se, e solo se, vi è almeno un ingresso che differisce dagli altri. Segue la tavola di verità di una porta XOR a "n=2" ingressi:

INPUT		OUTPUT
A	B	o A o B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore EXOR

EXNOR



EXNOR (EXCLUSIVE NOR) è una porta logica che riceve in ingresso *n* e restituisce "1" in uscita se, e solo se, tutti gli ingressi hanno il medesimo valore logico. In breve, è equivalente alla negazione della porta EXOR.

il **nuovo** concorso a cattedra

MANUALE

Scienze **Matematiche applicate** nella **scuola secondaria** per la **preparazione** al **concorso**

Manuale completo per la **preparazione al Concorso a Cattedra** per la **classe di concorso A47** (Scienze matematiche applicate) nella scuola secondaria.

Il volume è diviso in Parti.

La **Prima Parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di andare incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte.

La **Seconda Parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile **Appendice** recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo dedicato all'informatica** specifica per la matematica applicata.

La **Terza Parte**, accessibile **online**, comprende esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il testo è completato da un **software di simulazione**, mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite, oltre che da eventuali **materiali didattici**, **approfondimenti** e **risorse** disponibili, anch'essi, **online**.

PER COMPLETARE LA PREPARAZIONE:

CC1/1 · PARTE GENERALE – LEGISLAZIONE SCOLASTICA PER TUTTE LE CLASSI DI CONCORSO

IN OMAGGIO
ESTENSIONI ONLINE

Software di **simulazione**

Contenuti **extra**

Le **risorse di studio** gratuite sono accessibili per 18 mesi dalla propria area riservata, previa registrazione al sito **edises.it**.

EdiSES edizioni

blog.edises.it

infoconcorsi.edises.it

€ 40,00

ISBN 979-12-5602-135-2

9 791256 021352