

il **nuovo** concorso  
a cattedra

# MANUALE

## Scienze **Matematiche applicate**

### nella scuola secondaria

per la **preparazione al concorso**

Classe di concorso:

**A47** Scienze matematiche applicate

Emiliano Barbuto e Santo Calabrese

III Edizione



**IN OMAGGIO ESTENSIONI ONLINE**

Software di  
**simulazione**

Contenuti  
**extra**



**EdiSES**  
edizioni



# Manuale

---

# Scienze Matematiche applicate

nella scuola secondaria

## Accedi ai servizi riservati

Il codice personale contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a:

**MATERIALI DI INTERESSE  
E CONTENUTI AGGIUNTIVI**

CODICE PERSONALE

Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.

Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate nella pagina seguente.

Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile.

L'accesso ai servizi riservati ha la **durata di 18 mesi** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

# Istruzioni per accedere ai contenuti e ai servizi riservati

SEGUICI QUESTE SEMPLICI ISTRUZIONI

SE SEI REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



inserisci email e password



inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina



inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

SE NON SEI GIÀ REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



registra al sito **edises.it**



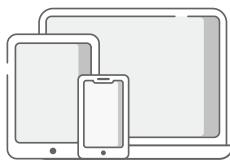
attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione



torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per utenti registrati



## CONTENUTI AGGIUNTIVI



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali e per informazioni sui nostri servizi puoi contattarci sulla piattaforma [assistenza.edises.it](http://assistenza.edises.it)

SCARICA L'APP **INFOCONCORSI** DISPONIBILE SU APP STORE E PLAY STORE

il nuovo concorso  
a cattedra

# MANUALE

Scienze  
Matematiche  
applicate  
nella scuola secondaria

a cura di  
Emiliano Barbuto e Santo Calabrese



Il nuovo Concorso a Cattedra – Scienze matematiche applicate - III Edizione  
Copyright © 2024, 2019, 2016, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0  
2028 2027 2026 2025 2024

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,  
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

*Autori:*

Emiliano Barbuto

Santo Calabrese

Andrea Monaco (per il Capitolo 4 Informatica, della Parte Seconda)

Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento *online*)

*Progetto grafico:* ProMedia Studio di A. Leano - Napoli

*Fotocomposizione:* EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

*Stampato presso* Vulcanica S.r.l. - Nola (Na)

*Per conto della* EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 979 12 5602 135 2

[www.edises.it](http://www.edises.it)

---

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi all'indirizzo *redazione@edises.it*

# Sommario

## Parte Prima Matematica

<b>Capitolo 1</b>	Insiemi, relazioni, funzioni.....	3
<b>Capitolo 2</b>	Geometria euclidea e geometrie non euclidee.....	43
<b>Capitolo 3</b>	Insiemi numerici.....	123
<b>Capitolo 4</b>	Il metodo delle coordinate.....	209
<b>Capitolo 5</b>	Funzioni reali e calcolo numerico.....	331
<b>Capitolo 6</b>	Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile.....	377
<b>Capitolo 7</b>	Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica.....	533
<b>Capitolo 8</b>	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità.....	
<b>Capitolo 9</b>	Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale.....	

## Parte Seconda Matematica applicata

<b>Capitolo 1</b>	Matematica finanziaria.....	633
<b>Allegato A</b>	Formulario di Matematica finanziaria.....	699
<b>Capitolo 2</b>	Matematica attuariale.....	705
<b>Allegato B</b>	Formulario di Matematica attuariale.....	735
<b>Capitolo 3</b>	Ricerca operativa.....	739
<b>Appendice</b>	Storia della matematica.....	777
<b>Capitolo 4</b>	Informatica.....	803

## Parte Terza Esempi di Unità di Apprendimento

<b>Unità di Apprendimento 1</b>	Espressioni logiche.....	
<b>Unità di Apprendimento 2</b>	Parliamo il “geometricchese”: lessico geometrico “poco familiare”.....	
<b>Unità di Apprendimento 3</b>	Cogito ergo sum.....	



# Finalità e struttura dell'opera

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica applicata**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il testo è strutturato in parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

La **seconda parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile Appendice recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo** dedicato all'**informatica** specifica per la matematica applicata.

L'ultima parte del testo disponibile **online**, è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il testo è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite e da ulteriori **servizi riservati** online.

Ulteriori **materiali didattici** e **aggiornamenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nelle prime pagine del volume.

Eventuali errata-corrigere saranno pubblicati sul sito *edises.it*, nella scheda "Aggiornamenti" della pagina dedicata al volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social.

[blog.edises.it](http://blog.edises.it)





# Indice

## Parte Prima Matematica

### Capitolo 1 Insiemi, relazioni, funzioni

1.1	Concetti fondamentali .....	3
1.2	Relazione di inclusione .....	4
1.3	Operazioni tra insiemi .....	5
1.4	Insieme delle parti .....	8
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano .....	8
1.6	Relazione binaria .....	9
1.7	Relazioni di equivalenza .....	11
1.8	Relazioni d'ordine largo .....	12
1.9	Relazioni d'ordine stretto .....	13
1.10	Funzioni .....	13
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biettive .....	15
1.12	Funzioni composte .....	17
1.13	Funzione inversa e identità .....	17
1.14	Cardinalità di un insieme .....	18
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali .....	18
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali .....	19
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili .....	20
1.14.4	Insiemi numerici numerabili .....	22
1.14.5	Insiemi numerici non numerabili .....	25
1.14.6	L'ipotesi del continuo .....	29
1.15	Calcolo combinatorio .....	30
1.15.1	Principio di moltiplicazione .....	30
1.15.2	Fattoriale di un numero .....	31
1.15.3	Disposizioni con ripetizione .....	31
1.15.4	Disposizioni .....	32
1.15.5	Permutazioni .....	33
1.15.6	Permutazioni con ripetizione .....	33
1.15.7	Combinazioni .....	34
1.15.8	Combinazioni con ripetizione .....	35
1.15.9	Il coefficiente binomiale .....	35
1.15.10	Formula del binomio di Newton .....	36
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali .....	37
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia .....	37
1.16	Il metodo assiomatico .....	39
1.16.1	Le teorie matematiche .....	39



1.16.2 La definizione dei termini .....	39
1.16.3 Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali ....	40

## Capitolo 2 Geometria euclidea e geometrie non euclideanee

2.1 Gli <i>Elementi</i> di Euclide .....	43
2.1.1 La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide .....	43
2.1.2 Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i> .....	43
2.1.3 Il quinto postulato di Euclide.....	46
2.1.4 Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i> .....	47
2.2 Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano.....	51
2.2.1 Trasformazioni affini .....	51
2.2.2 Affinità .....	55
2.2.3 Proprietà delle affinità .....	56
2.2.4 Punti uniti di una trasformazione .....	60
2.2.5 Le similitudini e il gruppo Euclideo .....	63
2.2.6 Particolari similitudini: omotetie .....	68
2.2.7 Isometrie .....	71
2.2.8 Isometrie dirette .....	72
2.2.9 Isometrie inverse .....	80
2.2.10 Riepilogo.....	84
2.3 L'idea della geometria proiettiva .....	86
2.3.1 La prospettiva .....	86
2.3.2 La retta proiettiva.....	86
2.3.3 Il piano proiettivo .....	89
2.3.4 Coordinate omogenee nel piano proiettivo .....	93
2.3.5 Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio .....	95
2.3.6 Definizione operativa di spazio proiettivo .....	95
2.4 Operare con le coordinate omogenee.....	97
2.4.1 Rette nel piano .....	97
2.4.2 Coniche in coordinate omogenee .....	99
2.5 Le proiettività .....	101
2.5.1 Proiettività sulla retta proiettiva .....	101
2.5.2 Punti uniti.....	102
2.5.3 Il birapporto .....	105
2.5.4 Proiettività sul piano .....	107
2.5.5 Punti uniti e rette unite .....	110
2.5.6 Studio della prospettiva .....	116

## Capitolo 3 Insiemi numerici

3.1 Leggi di composizione interne ed esterne .....	123
3.2 L'insieme dei numeri naturali.....	123
3.2.1 Assiomi di Peano .....	124
3.2.2 Addizione di naturali .....	125
3.2.3 Moltiplicazione di naturali .....	127
3.2.4 Relazione d'ordine nei naturali .....	128
3.2.5 La divisione euclidea.....	129
3.2.6 La potenza .....	131

3.3	Rappresentazione dei numeri naturali .....	131
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali .....	131
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma .....	132
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale .....	133
3.3.4	Il sistema di numerazione binario .....	134
3.3.5	Conversioni.....	135
3.4	L'insieme dei numeri interi.....	136
3.5	I numeri razionali.....	140
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali.....	140
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali .....	141
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali.....	142
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali .....	143
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali .....	145
3.6.1	La scrittura posizionale .....	145
3.6.2	L'estrazione di radice.....	145
3.6.3	Le grandezze incommensurabili.....	145
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi .....	147
3.6.5	La quadratura del cerchio .....	148
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali.....	148
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale .....	148
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind .....	148
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali.....	152
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti.....	152
3.8.1	I numeri irrazionali .....	152
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici .....	153
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti .....	154
3.9	Le strutture algebriche .....	155
3.9.1	Definizione di struttura algebrica .....	155
3.9.2	Proprietà associativa e semigruppi.....	155
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi.....	156
3.10	I gruppi .....	157
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso .....	157
3.10.2	Definizione di gruppo.....	157
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani .....	158
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori .....	159
3.11	Aritmetica modulare .....	160
3.11.1	Congruenza modulo $n$ .....	160
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare.....	160
3.11.3	Classi di congruenza modulo $n$ e insieme quoziante.....	161
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza .....	162
3.12	Gruppi ciclici .....	164
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi .....	164
3.12.2	Gruppi additivi .....	165
3.12.3	Gruppi moltiplicativi .....	165
3.13	Tavole di Cayley.....	167
3.14	Prodotto di gruppi .....	168
3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro .....	169



3.15.1	Definizione di sottogruppo .....	169
3.15.2	Classi laterali.....	169
3.15.3	Sottogruppi normali .....	171
3.16	Gruppi risolubili.....	175
3.17	I gruppi simmetrici .....	176
3.17.1	Permutazioni .....	176
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni .....	177
3.17.3	Cicli e trasposizioni .....	178
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno.....	182
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici $S_2$ , $S_3$ e $S_4$ .....	183
3.17.6	Il gruppo simmetrico $S_5$ .....	185
3.18	Gruppo diedrale.....	186
3.18.1	Definizione .....	186
3.18.2	Interpretazione geometrica.....	187
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi.....	192
3.20	Anelli.....	196
3.20.1	Definizione .....	196
3.20.2	Anello dei polinomi .....	197
3.21	Corpi e campi.....	199
3.21.1	Definizioni .....	199
3.21.2	Estensione di un campo.....	200
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa) .....	202
3.22	Teoria di Galois .....	204
3.22.1	L'idea .....	204
3.22.2	Gruppo di Galois.....	205
3.22.3	Risolvibilità per radicali di un'equazione di grado $n$ .....	207

#### Capitolo 4 Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali .....	209
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale .....	209
4.1.2	Sottospazio .....	212
4.1.3	Combinazione lineare di vettori .....	213
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	214
4.1.5	Generatori e basi .....	215
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	217
4.2	Applicazioni lineari .....	218
4.2.1	Definizione di applicazione lineare .....	218
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari .....	219
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari .....	219
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare .....	220
4.2.5	Particolari applicazioni lineari .....	221
4.3	Matrici .....	222
4.3.1	Definizioni .....	222
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici .....	223
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici .....	226
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari .....	231

4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari .....	235
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili .....	235
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	236
4.4	Determinanti .....	236
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice .....	236
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	242
4.4.3	Rango di una matrice.....	245
4.5	Sistemi lineari .....	249
4.5.1	Definizione di sistema lineare .....	249
4.5.2	Sistemi lineari compatibili .....	250
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati .....	251
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici.....	252
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema .....	253
4.5.6	Matrice inversa .....	259
4.5.7	Sistemi lineari omogenei .....	262
4.6	Diagonalizzazione di matrici .....	265
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio.....	265
4.6.2	Matrici diagonalizzabili.....	266
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici .....	267
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione.....	269
4.6.5	Segnatura di una matrice .....	269
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo .....	275
4.8	Geometria analitica nel piano .....	277
4.8.1	Punti nel piano cartesiano.....	277
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano .....	278
4.8.3	Le curve algebriche .....	281
4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette .....	282
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica .....	282
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita .....	283
4.9.3	Intersezione di due rette .....	283
4.9.4	Rette: casi particolari .....	286
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria .....	287
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita .....	288
4.9.7	Fasci di rette .....	289
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta .....	291
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche .....	293
4.10.1	Classificazione di una conica .....	293
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica .....	296
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde.....	302
4.11	Geometria analitica nello spazio .....	304
4.11.1	Punti nello spazio .....	304
4.11.2	Vettori nello spazio .....	305
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani .....	309
4.12.1	Equazione parametrica del piano .....	309
4.12.2	Equazione generale del piano.....	309
4.12.3	Equazioni di piani particolari.....	313
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo .....	314



4.13	Le rette nello spazio.....	315
4.13.1	Equazioni parametriche della retta .....	315
4.13.2	Equazioni normali della retta.....	316
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta .....	316
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli).....	320
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari.....	321
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari.....	323
4.13.7	Rette e piani perpendicolari.....	323
4.13.8	Distanza di un punto da un piano .....	324
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche.....	324
4.14.1	Classificazione di una quadrica .....	324

## Capitolo 5 Funzioni reali e calcolo numerico

5.1	Intervalli e intorni .....	331
5.1.1	Tipologie di intervalli .....	331
5.1.2	Intorni e intorni circolari .....	333
5.2	Funzioni reali di variabili reali .....	333
5.2.1	Generalità .....	333
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine.....	335
5.2.3	Funzioni composte.....	336
5.2.4	Funzioni invertibili.....	336
5.2.5	Funzioni monotone .....	337
5.2.6	Funzioni pari e dispari .....	340
5.2.7	Funzioni periodiche .....	341
5.2.8	Funzioni elementari.....	342
5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali .....	349
5.3	Errori nel calcolo numerico .....	351
5.3.1	Premessa .....	351
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali.....	351
5.3.3	I numeri in virgola mobile.....	353
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i> .....	355
5.3.5	Arrotondare e troncare.....	357
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo .....	359
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite.....	361
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette .....	365
5.4	Propagazione dell'errore .....	366
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore .....	366
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore.....	368
5.4.3	Condizionamento di un problema .....	369
5.4.4	Stabilità di un algoritmo .....	373

## Capitolo 6 Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile

6.1	Limite di una funzione .....	377
6.1.1	Punti di accumulazione .....	377
6.1.2	Definizione di limite .....	378
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto .....	379

6.1.4	Verifica del limite .....	381
6.1.5	Limite destro e limite sinistro.....	384
6.1.6	Teoremi sui limiti.....	386
6.1.7	Operazioni sui limiti .....	388
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti .....	389
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli.....	391
6.1.10	Calcolo di limiti.....	394
6.2	Successioni e limiti di successioni .....	398
6.2.1	Definizione e generalità.....	398
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali.....	401
6.3	Continuità delle funzioni reali .....	402
6.3.1	Funzione continua .....	402
6.3.2	Funzione uniformemente continua.....	407
6.3.3	Punti di discontinuità .....	408
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione .....	410
6.4	Derivata .....	411
6.4.1	Rapporto incrementale.....	411
6.4.2	Definizioni di derivata e di derivabilità.....	412
6.4.3	Derivata destra e sinistra.....	413
6.4.4	Continuità e derivabilità .....	413
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata.....	414
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata .....	416
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto .....	418
6.4.8	Regole di derivazione.....	419
6.4.9	Calcolo di derivate .....	419
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata .....	422
6.4.11	Derivate di ordine superiore .....	425
6.4.12	Differenziale .....	426
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale.....	427
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange .....	427
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione .....	431
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione .....	432
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore .....	432
6.5.5	Massimo e minimo relativo.....	434
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto .....	435
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso .....	439
6.5.8	I teoremi di l'Hopital .....	441
6.5.9	Asintoti di una funzione .....	444
6.5.10	Studio del grafico di una funzione .....	446
6.6	Il problema della misura .....	454
6.6.1	Introduzione.....	454
6.6.2	La misura di Peano-Jordan .....	454
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue .....	460
6.7	Integrazione indefinita .....	462
6.7.1	Definizioni .....	462
6.7.2	Regole di integrazione .....	464
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche .....	470



6.8	Integrazione definita.....	475
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore .....	475
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann .....	477
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann .....	478
6.8.4	Funzioni integrabili.....	480
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti .....	481
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita .....	482
6.9	Integrali impropri .....	487
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto.....	487
6.9.2	Caso di un intervallo aperto .....	488
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato .....	489
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione .....	490
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione .....	492
6.12	Serie numeriche .....	495
6.12.1	Definizioni .....	495
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque.....	497
6.12.3	La serie geometrica .....	498
6.12.4	Resto di una serie .....	499
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie .....	501
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi .....	502
6.13.1	Premessa .....	502
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy) .....	502
6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica .....	503
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss) .....	504
6.13.5	Secondo criterio del confronto.....	505
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert) .....	506
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy) .....	507
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque .....	508
6.14.1	Criterio di Leibnitz.....	508
6.14.2	La convergenza assoluta .....	509
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque .....	510
6.15	Sviluppo in serie di funzioni.....	511
6.15.1	Le serie di funzioni .....	511
6.15.2	Le serie di potenze .....	513
6.15.3	La serie di Mac Laurin .....	515
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.....	517
6.15.5	La formula di Eulero.....	520
6.15.6	La serie di Taylor.....	521
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor.....	522
6.15.8	La serie di Fourier .....	528

## Capitolo 7 Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità.....	533
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi .....	533

7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi .....	534
7.1.3	Definizione classica della probabilità.....	535
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità .....	540
7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa) .....	545
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità.....	548
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità .....	550
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto .....	550
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta .....	551
7.2.3	Indipendenza stocastica.....	554
7.2.4	Formula della probabilità totale.....	556
7.2.5	Teorema di Bayes .....	558
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica .....	561
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità .....	561
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi.....	562
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative .....	565
7.3.4	Tabelle e distribuzioni .....	568
7.3.5	Grafici .....	569
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi .....	570
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti.....	574
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	576
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica .....	579
7.3.10	Analisi statistica univariata.....	581
7.4	Indici di posizione .....	582
7.4.1	La media aritmetica .....	583
7.4.2	La media geometrica .....	586
7.4.3	La media armonica .....	588
7.4.4	La media quadratica .....	590
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche.....	591
7.4.6	La moda .....	591
7.4.7	La mediana .....	593
7.4.8	I quantili .....	597
7.5	Indici di variabilità .....	598
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili .....	599
7.5.2	Scarto semplice medio .....	599
7.5.3	Devianza.....	601
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	601
7.5.5	Indici di dispersione relativi .....	604
7.5.6	Le differenze medie .....	605
7.5.7	La concentrazione.....	608
7.6	Indici di forma.....	615
7.6.1	Asimmetria.....	615
7.6.2	Curtosi.....	616
7.7	Rapporti statistici.....	618
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici .....	618
7.7.2	I numeri indici .....	624
7.7.3	I numeri indici complessi .....	629



Capitolo 8 Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità



Capitolo 9 Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale



## Parte seconda

# Matematica applicata

### Capitolo 1 Matematica finanziaria

1.1	Operazioni finanziarie .....	633
1.1.1	Criteri di preferenza assoluta .....	635
1.2	Legge di capitalizzazione semplice o lineare .....	635
1.2.1	Ricerca del tasso .....	638
1.2.2	Ricerca del tempo .....	640
1.2.3	Ricerca del capitale iniziale .....	642
1.3	Legge di capitalizzazione composta o esponenziale .....	643
1.3.1	Ricerca del tasso .....	645
1.3.2	Ricerca del tempo .....	646
1.3.3	Ricerca del capitale iniziale .....	647
1.4	Scindibilità .....	648
1.5	Confronto grafico fra capitalizzazione semplice e composta .....	649
1.6	Tassi equivalenti .....	650
1.6.1	Tassi equivalenti in capitalizzazione semplice .....	650
1.6.2	Tassi equivalenti in capitalizzazione composta .....	651
1.6.3	Tasso annuo nominale convertibile $k$ volte .....	653
1.6.4	Studio di $J_k$ al variare del frazionamento $k$ .....	656
1.7	Leggi di attualizzazione o di sconto .....	657
1.7.1	Sconto commerciale .....	658
1.7.2	Legge di attualizzazione semplice o sconto razionale .....	660
1.7.3	Legge di attualizzazione composta .....	661
1.7.4	Legge di capitalizzazione coniugata allo sconto commerciale .....	662
1.7.5	Tassi equivalenti in regimi diversi: relazioni tra $d$ e $i$ .....	664
1.8	Leggi coniugate .....	665
1.9	Principio di equivalenza finanziaria .....	665
1.10	Rendite certe .....	669
1.10.1	Montante di una rendita .....	670
1.10.2	Valore attuale di una rendita .....	675
1.11	Estinzione o rimborso di un prestito .....	681
1.11.1	Ammortamento italiano o uniforme o a quote di capitale costanti .....	685
1.11.2	Ammortamento francese o progressivo o a rata costante .....	687
1.11.3	Ammortamento americano o a due tassi o a quote di accumulazione .....	691
1.11.4	Estinzione di un prestito diviso in titoli .....	694
1.12	Leasing .....	696
1.13	Scelta tra investimenti .....	697
1.13.1	REA o VAN .....	697
1.13.2	Tasso implicito o TIR .....	697
1.13.3	Tempo di recupero del capitale .....	698

Allegato A - Formulario di Matematica finanziaria ..... 699

## Capitolo 2 Matematica attuariale

2.1	Operazioni finanziarie aleatorie: le assicurazioni .....	705
2.2	Probabilità di vita e di morte .....	707
2.3	Assicurazione elementare di vita o fattore attuariale di sconto .....	711
2.4	Assicurazioni di rendita vitalizia .....	714
2.4.1	Rendita vitalizia immediata illimitata o a “vita intera” .....	714
2.4.2	Rendita vitalizia differita illimitata o pensione .....	716
2.4.3	Rendita vitalizia immediata temporanea .....	717
2.4.4	Rendita vitalizia differita e temporanea.....	719
2.5	Assicurazione elementare di morte.....	720
2.5.1	Assicurazione in caso di morte a vita intera .....	721
2.5.2	Assicurazione in caso di morte immediata e temporanea.....	722
2.5.3	Assicurazione in caso di morte differita e temporanea .....	724
2.5.4	Assicurazione in caso di morte differita.....	725
2.5.5	Pagamento all’atto del decesso .....	726
2.6	Assicurazioni miste .....	727
2.6.1	Assicurazione mista semplice .....	728
2.6.2	Assicurazione mista doppia .....	729
2.6.3	Assicurazione mista a capitale raddoppiato .....	729
2.7	Premi periodici puri.....	730
2.8	Premi di tariffa .....	731
2.9	Riserva matematica .....	732
2.10	Rischio aggravato .....	734

Allegato B - Formulario di Matematica attuariale..... 735

## Capitolo 3 Ricerca operativa

3.1	Definizione .....	740
3.2	Fasi di un problema di ricerca operativa .....	741
3.2.1	Definizione del problema e raccolta dei dati .....	741
3.2.2	Costruzione del modello .....	741
3.2.3	Ricerca della soluzione ottima e verifica .....	742
3.3	Modello matematico del problema.....	742
3.3.1	Richiami di disequazioni lineari in due variabili .....	744
3.3.2	Richiami sui sistemi di disequazioni lineari in due variabili .....	746
3.4	Le decisioni.....	751
3.4.1	In condizione di certezza.....	752
3.4.2	In condizione di incertezza .....	752
3.4.3	Decisioni in condizioni di certezza con effetti immediati .....	752
3.4.4	Decisioni in condizioni di certezza con effetti differiti.....	759
3.4.5	Decisioni in condizioni di incertezza.....	765
3.5	La programmazione lineare .....	769

Appendice - Storia della matematica ..... 777



## Capitolo 4 Informatica

- 4.1 Modi di funzionamento di calcolatori elettronici ed elaboratori dati
  - 4.1.1 Porte logiche e bit
  - 4.1.2 L'algebra di Boole
- 4.2 Principi di programmazione e di sviluppo software
  - 4.2.1 Algoritmi e diagrammi di flusso
  - 4.2.2 Linguaggi di programmazione
  - 4.2.3 Modelli tradizionali di sviluppo del software
  - 4.2.4 I prototipi
  - 4.2.5 Iterazione nel metodo Agile
- 4.3 Conoscenza e utilizzo di un applicativo di foglio elettronico
  - 4.3.1 Fogli elettronici
  - 4.3.2 Creare grafici con Excel
  - 4.3.3 Formule: funzioni e operatori
  - 4.3.4 Funzioni statistiche
  - 4.3.5 Funzioni finanziarie

## Parte Terza Esempi di Unità di Apprendimento

- Unità di Apprendimento 1 Espressioni logiche ..... 
- Unità di Apprendimento 2 Parliamo il “geometricchese”: lessico geometrico  
“poco” familiare! ..... 
- Unità di Apprendimento 3 Cogito ergo sum ..... 

# Parte Prima

# Matematica

## SOMMARIO

- |                   |                                                                                    |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Capitolo 1</b> | Insiemi, relazioni, funzioni                                                       |
| <b>Capitolo 2</b> | Geometria euclidea e geometrie non euclidee                                        |
| <b>Capitolo 3</b> | Insiemi numerici                                                                   |
| <b>Capitolo 4</b> | Il metodo delle coordinate                                                         |
| <b>Capitolo 5</b> | Funzioni reali e calcolo numerico                                                  |
| <b>Capitolo 6</b> | Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile |
| <b>Capitolo 7</b> | Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica                              |



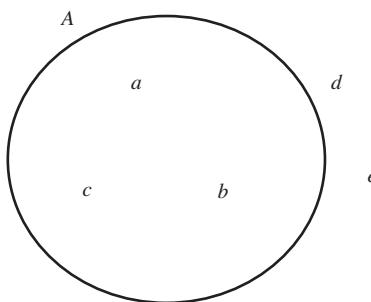
# Capitolo 1

## Insiemi, relazioni, funzioni

### 1.1 Concetti fondamentali

I concetti di oggetto, insieme e proprietà costituiscono gli aspetti fondanti della teoria degli insiemi. Con il termine **oggetto** si indica qualsiasi elemento, mentre il termine **insieme** indica ogni raggruppamento, collezione, aggregato di elementi, indipendentemente dalla loro natura.

Un **diagramma di Eulero-Venn** (o semplicemente **diagramma di Venn**) è una rappresentazione grafica di un insieme che consiste nel racchiuderne gli elementi all'interno di una linea chiusa non intrecciata (Figura 1).



**Figura 1** L'insieme A

In Figura 1 l'insieme  $A$  è composto dagli elementi indicati con  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Questo viene indicato nella rappresentazione tabulare con la notazione  $A = \{a, b, c\}$ . In riferimento ad un singolo elemento dell'insieme, la notazione  $a \in A$  indica che l'elemento  $a$  “appartiene” all'insieme  $A$ . Per indicare che un elemento  $d$  non appartiene ad un insieme  $A$  si usa scrivere  $d \notin A$ .

La **proprietà** è un altro concetto innato ed indica una caratteristica che hanno tutti gli elementi appartenenti ad un insieme. Difatti una proprietà identifica un insieme, come nell'esempio seguente:

$$B = \{x : \text{“}x \text{ è un numero intero compreso tra 1 e 10”}\}$$

Il simbolo  $:$  significa “tale che”. Pertanto, l'insieme  $B$  contiene quegli elementi  $x$  tali da avere la seguente proprietà: “ $x$  è un numero intero compreso tra 1 e 10”, ossia  $B$  contiene i numeri interi compresi tra 1 e 10.

Più in generale si può disporre di un insieme  $S$  nel quale è possibile stabilire, per ciascuno dei suoi elementi, se possiede o meno una determinata proprietà  $P$ . In tal caso si dice che la proprietà  $P$  è **definita** nell'insieme  $S$ .



Quando una proprietà  $P$  ha come conseguenza una proprietà  $Q$ , ossia se un elemento di un insieme, possedendo la proprietà  $P$ , possiede anche la proprietà  $Q$ , allora si dice che  $P$  implica  $Q$  e si scrive:

$$P \Rightarrow Q$$

La precedente espressione si legge “Se  $P$  allora  $Q$ ”, oppure “ $P$  implica  $Q$ ”, oppure “ $P$  è una condizione sufficiente per  $Q$ ” oppure “ $Q$  è una condizione necessaria per  $P$ ”. Con tali asserti si vuole stabilire che possedere la proprietà  $P$  è una condizione sufficiente per affermare che anche la proprietà  $Q$  è posseduta. Viceversa la proprietà  $Q$  non è sufficiente per stabilire che  $P$  è posseduta, ma è una condizione necessaria per possedere  $P$ , ossia è una condizione senza la quale non è possibile possedere  $P$  (si potrebbe dire intuitivamente che è preliminare a  $P$ ). Alla luce di quanto affermato, si può stabilire che se la proprietà  $P$  implica  $Q$ , allora non è detto che  $Q$  implichi  $P$ .

Se due proprietà si implicano a vicenda si può scrivere:

$$P \Leftrightarrow Q$$

La precedente espressione si legge “ $P$  se e solo se  $Q$ ”. In tal caso  $P$  implica  $Q$  e  $Q$  implica  $P$ . Si può dire altresì che “ $P$  è equivalente a  $Q$ ”. In alternativa si può dire che “ $P$  è una condizione necessaria e sufficiente per  $Q$ ”.

Per descrivere le proprietà degli insiemi vengono spesso utilizzati i quantificatori. Il **quantificatore esistenziale** si denota con il simbolo  $\exists$  e sta ad indicare l'esistenza di almeno un elemento (quindi anche più di uno) che gode di una determinata proprietà. Ad esempio  $\exists x$  vuol dire “esiste almeno un elemento  $x$ ”. Il **quantificatore universale** si denota con il simbolo  $\forall$  e sta ad indicare che una proprietà è posseduta da ogni elemento considerato. Ad esempio  $\forall x$  vuol dire “per ogni  $x$ ” oppure “qualunque  $x$ ”.

## 1.2 Relazione di inclusione

Considerati due insiemi  $S$  e  $T$ , per dire che  $S$  è un **sottoinsieme** di  $T$ , ossia che  $S$  è **incluso** in  $T$ , si scrive  $S \subseteq T$ . Per definizione si ha:

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

In pratica qualsiasi elemento appartenente a  $S$  è contenuto anche in  $T$ . Si può anche dire che la condizione di appartenere a  $S$  è sufficiente per appartenere anche a  $T$ , oppure che appartenere a  $T$  è condizione necessaria per appartenere anche a  $S$ .

La relazione di inclusione  $\subseteq$  tiene aperta la possibilità che i due insiemi  $S$  e  $T$  siano identici, ossia  $S = T$ . In alternativa, la relazione di inclusione stretta  $S \subset T$  implica che l'insieme  $S$  non può coincidere con  $T$ .

La proprietà di inclusione di un insieme  $S$  in un altro insieme  $T$  è data quindi dalla proprietà che viene espressa simbolicamente nel modo seguente:

$$\forall x \in S \Rightarrow x \in T$$

Per negare tale proprietà occorre scambiare il quantificatore universale al primo membro dell'implicazione con il quantificatore esistenziale e negare il secondo membro dell'implicazione, ossia:

$$\exists x \in S \Rightarrow x \in T$$

Quanto scritto rappresenta la relazione di non inclusione dell'insieme  $S$  nell'insieme  $T$ . Si noti che tale negazione comporta che almeno un elemento di  $S$  non sia contenuto in  $T$ ; non necessariamente tutti gli elementi di  $S$  non devono essere contenuti in  $T$ .

### 1.3 Operazioni tra insiemi

Si considerano i due insiemi, mostrati in Figura 2,  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{b, c, e\}$ .

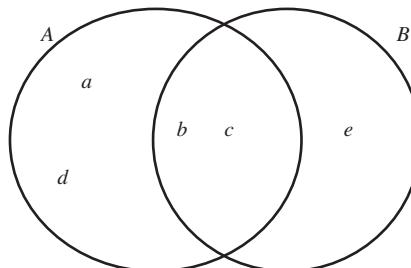


Figura 2 Gli insiemi A e B

L'**unione** tra i due insiemi è costituita da tutti gli elementi che si possono trovare in  $A$ , in  $B$  o in entrambi. L'unione viene indicata con  $A \cup B$  e in tal caso è data da  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ . Più in generale si ha:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Invece, l'**intersezione** tra due insiemi è composta solo da quegli elementi presenti in entrambi gli insiemi. Si indica l'intersezione con  $A \cap B$ . Nel caso specifico di Figura 2 si ha  $A \cap B = \{b, c\}$ . Più in generale si può scrivere:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

L'unione e l'intersezione degli insiemi  $A$  e  $B$  sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 3.

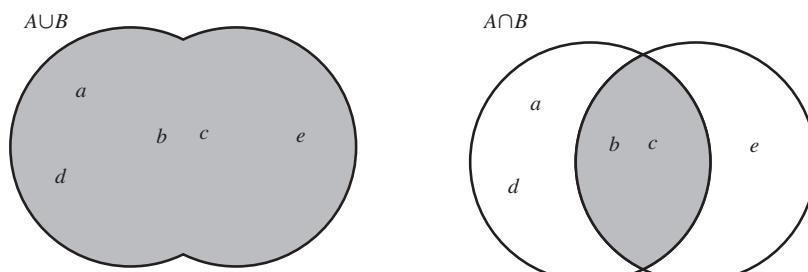


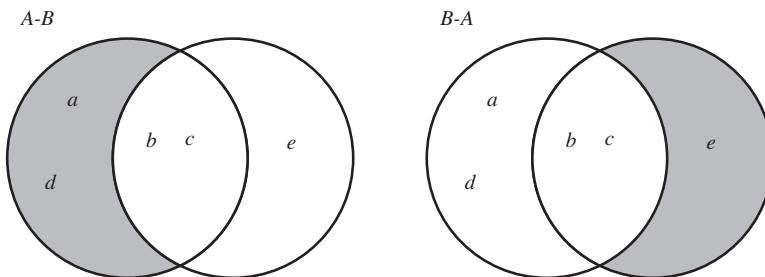
Figura 3 Unione degli insiemi A e B e intersezione degli insiemi A e B

La **differenza** tra  $A$  e  $B$  (indicata con  $A - B$ ) è costituita da tutti gli elementi presenti in  $A$  a cui vengono sottratti quelli presenti anche in  $B$ . Nel caso in questione  $A - B = \{a, d\}$ . La differenza tra  $A$  e  $B$  è anche detta **complemento** di  $B$  rispetto ad  $A$ . Si ha inoltre  $B - A = \{e\}$ .

Più in generale si può scrivere:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Le differenze  $A - B$  e  $B - A$  sono messe in evidenza nei diagrammi di Venn di Figura 4.



**Figura 4** Differenza tra gli insiemi  $A$  e  $B$  e differenza tra gli insiemi  $B$  e  $A$

L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** ed è indicato con il simbolo  $\emptyset$ . L'insieme vuoto è per definizione incluso in qualsiasi insieme  $A$ .

$$\forall A : \emptyset \subseteq A$$

Se due insiemi sono uguali, ossia contengono gli stessi elementi, allora la loro differenza è data dall'insieme vuoto.

$$A = B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

Infine si sottolinea come dalla Figura 3 e dalla Figura 4 si deduce la seguente regola generale:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

L'unione degli insiemi  $A$  e  $B$  è data dall'unione di tre insiemi: l'intersezione di  $A$  e  $B$ , il complemento di  $B$  rispetto ad  $A$  e il complemento di  $A$  rispetto a  $B$ . Difatti un elemento dell'insieme  $A \cup B$  può appartenere o a entrambi gli insiemi (l'intersezione), o al solo insieme  $A$  (differenza  $A - B$ ) oppure al solo insieme  $B$  (differenza  $B - A$ ).

Considerati due insiemi  $A$  e  $B$ , si riportano alcune relazioni insiemistiche.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Inoltre, dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $S$ , tali che  $A \subseteq S$ ,  $B \subseteq S$ , si ha:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow S - A \supseteq S - B$$

Le seguenti sono dette **regole di De Morgan**.

$$S - (A \cup B) = (S - A) \cap (S - B)$$

$$S - (A \cap B) = (S - A) \cup (S - B)$$

### Esempi

1) Dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{4, 5\}$ , si determinano gli insiemi  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A - B$  e  $B - A$ .

L'insieme intersezione è dato dagli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi:  

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincida con l'insieme  $B$ . In effetti,  $B$  è un sottoinsieme di  $A$ . L'insieme unione è dato dagli elementi che sono in  $A$ , in  $B$  oppure in entrambi.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincida con l'insieme  $A$ .

L'insieme differenza  $A - B$  è dato da:

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

L'insieme differenza  $B - A$  coincide con l'insieme vuoto, in quanto da  $B$  vengono rimossi tutti gli elementi ad esso appartenenti:

$$B - A = \emptyset$$

2) Dati gli insiemi  $A$  e  $B$  tali che  $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ ,  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$  e  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , si determinano gli insiemi  $A$ ,  $A - B$  e  $B - A$ .

L'insieme  $B - A = B - (A \cap B)$ , in quanto togliere dall'insieme  $B$  tutti gli elementi di  $A$  è equivalente a togliere i soli elementi che  $B$  ha in comune con  $A$ . Quindi:

$$B - A = \{2, 6\}.$$

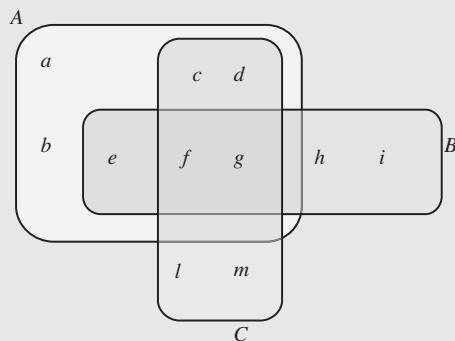
Se dall'insieme  $A \cup B$  si tolgono gli elementi di  $A \cap B$  e di  $B - A$ , si ottengono i soli elementi dell'insieme  $A - B$ . Quindi:

$$A - B = \{4, 7\}$$

Infine  $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ , ossia gli elementi di  $A$  sono quelli che appartengono solo ad  $A$  oppure ad  $A$  e  $B$  contemporaneamente. Quindi:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

3) Dato il diagramma di Venn in figura, si determinano gli insiemi  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cap C$ ,  $(A \cap C) - (B \cap C)$ ,  $B - C$ .



Osservato il diagramma, si ottiene:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{f, g\} \\ A \cap C &= \{c, d, f, g\} \end{aligned}$$

Inoltre, siccome  $B \cap C = \{f, g\}$ , allora  $(A \cap C) - (B \cap C) = \{c, d\}$ .

$$B - C = \{e, h, i\}$$

## 1.4 Insieme delle parti

Considerato un insieme  $S$ , si indica con  $\wp(S)$  l'insieme delle parti di  $S$ . Gli elementi dell'insieme delle parti sono tutti i sottoinsiemi  $A$  di  $S$ . Quindi si ha:

$$\wp(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

Si noti che in  $\wp(S)$  sono contenuti anche i sottoinsiemi **impropri** di  $S$ , ossia lo stesso insieme  $S$  e l'insieme vuoto  $\emptyset$ , contenuto in qualsiasi insieme.

Se l'insieme  $S$  è costituito da  $n$  elementi, allora il numero di sottoinsiemi di  $S$  che si possono considerare è pari a  $2^n$ . Quindi si può affermare che l'insieme delle parti di  $S$ , ossia  $\wp(S)$ , è costituito da  $2^n$  elementi.

### Esempio

Dato l'insieme  $S = \{a, b, c\}$ , il suo insieme delle parti conterrà i tre insiemi con un singolo elemento  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ , i tre insiemi con coppie di elementi  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ , lo stesso insieme  $S = \{a, b, c\}$  e l'insieme vuoto  $\emptyset$ .

Quindi:

$$\wp(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S\}$$

L'insieme di partenza  $S$  ha  $n = 3$  elementi. Si noti che nell'insieme delle parti di  $S$  vi sono proprio  $2^n = 2^3 = 8$  elementi.

## 1.5 Coppia ordinata e prodotto cartesiano

Si considerino due insiemi non vuoti  $A$  e  $B$ . Una **coppia ordinata** è composta da due componenti  $a$  e  $b$ , il primo appartenente all'insieme  $A$  ed il secondo appartenente all'insieme  $B$ , presi in questo preciso ordine. La coppia si indica con il simbolo  $(a, b)$ .

L'insieme di tutte le coppie che possono essere formate con gli elementi di  $A$  e di  $B$  è detto insieme **prodotto cartesiano** di  $A$  e  $B$  e viene indicato con  $A \times B$ . Quindi, si può scrivere:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Si ha che  $A \times B \neq B \times A$ , infatti in una generica coppia del prodotto  $B \times A$  sono presenti prima gli elementi di  $B$  e poi quelli di  $A$ , mentre nella coppia del prodotto  $A \times B$  avviene il viceversa.

Se l'insieme  $A$  è costituito da  $n$  elementi e l'insieme  $B$  è costituito da  $m$  elementi, allora l'insieme prodotto cartesiano  $A \times B$  è costituito da un numero di elementi pari a  $n \times m$ .

Inoltre, dato un insieme  $A$ , si può definire anche  $A^2$ , come prodotto  $A \times A$ . In generale si scrive anche:

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}} = A^n$$

L'uguaglianza di due coppie implica l'uguaglianza dei loro elementi in modo ordinato, ossia:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Più in generale si possono definire terne ordinate  $(a, b, c)$ , quadrupole  $(a, b, c, d)$  ed ennuple  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Due ennuple sono uguali quando sono ordinatamente uguali i loro  $n$  elementi.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

### Esempio

Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \quad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di  $A \times B$  ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad  $A$  e il secondo appartiene a  $B$ .

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

Si noti che il numero di elementi di  $A \times B$  è pari a  $2 \times 3 = 6$ .

## 1.6 Relazione binaria

Si considerino due insiemi  $A$  e  $B$ . Si può pensare di stabilire una legge che associa a un generico elemento dell'insieme  $A$ , un elemento dell'insieme  $B$ , creando delle coppie ordinate. Sia  $G$  l'insieme di queste coppie ordinate  $G \subseteq A \times B$ .

La legge che stabilisce la modalità con cui gli elementi di  $A$  vengono associati a quelli di  $B$  è detta **relazione binaria** o **corrispondenza binaria** e viene indicata con la coppia  $\mathcal{R} = (A \times B, G)$ . L'insieme  $G$  si dice anche **grafico** o **insieme rappresentativo** della relazione  $\mathcal{R}$ . Se la relazione binaria associa all'elemento  $a \in A$ , l'elemento  $b \in B$ , allora si scrive  $a \mathcal{R} b$ . Questa notazione sta ad indicare che  $a$  è messo in relazione con  $b$  da  $\mathcal{R}$ , oppure che  $b$  è il corrispondente di  $a$  per mezzo di  $\mathcal{R}$ .

La relazione  $\mathcal{R}$  è, in effetti, definita mediante un insieme di coppie, ossia di tutte le coppie di elementi di  $A$ , messi in relazione con elementi di  $B$  mediante la relazione  $\mathcal{R}$ . Queste coppie sono contenute nell'insieme  $G$ .

Il **dominio** (**insieme di definizione**) della relazione  $\mathcal{R}$  è l'insieme degli elementi  $a$  di  $A$  per i quali esiste un elemento  $b$  di  $B$ , tale che la coppia  $(a, b) \in G$ . Pertanto il dominio di  $\mathcal{R}$  è un sottoinsieme di  $A$ . Simbolicamente si scrive:

$$\text{Dominio di } \mathcal{R} = \{a \in A : \exists b \in B : (a, b) \in G\}$$

Il **codominio** della relazione  $\mathcal{R}$  è l'insieme degli elementi  $b$  di  $B$  tali che esiste un elemento  $a$  di  $A$  tale che la coppia  $(a, b) \in G$ . Pertanto il codominio di  $\mathcal{R}$  è un sottoinsieme di  $B$ . Simbolicamente si scrive:

$$\text{Codominio di } \mathcal{R} = \{b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in G\}$$



**Esempi**

1) Considerati gli insiemi:

$$A = \{x, y\} \quad B = \{a, b, c\}$$

Il prodotto cartesiano di  $A \times B$  ha come elementi tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad  $A$  e il secondo appartiene a  $B$ .

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

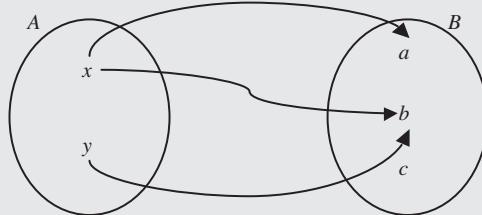
Si può considerare una relazione  $\mathcal{R}$  che individua il seguente sottoinsieme  $G$ :

$$G = \{(x, a), (x, b), (y, b)\}$$

In pratica la relazione  $\mathcal{R}$  mette in relazione  $x$  con  $a$  ed anche con  $b$  e mette in relazione  $y$  con la sola  $b$ ; quindi si può scrivere:

$$x \mathcal{R} a, x \mathcal{R} b, y \mathcal{R} b$$

Si può considerare una rappresentazione grafica della relazione  $\mathcal{R}$ , come mostrata in figura.



2) Considerati gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

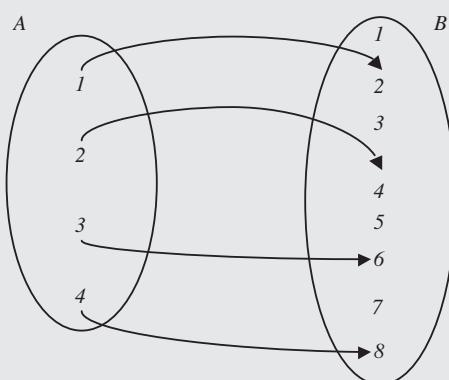
Si può considerare una relazione  $\mathcal{R}$  che associa a un numero di  $A$ , il suo doppio, contenuto in  $B$ .  $\mathcal{R}$  individua il seguente sottoinsieme:

$$G = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

Si può anche scrivere:

$$1 \mathcal{R} 2, 2 \mathcal{R} 4, 3 \mathcal{R} 6, 4 \mathcal{R} 8$$

La rappresentazione grafica della relazione  $\mathcal{R}$  è mostrata in figura.



## 1.7 Relazioni di equivalenza

In generale, una relazione binaria mette in relazione elementi di insiemi distinti. È possibile comunque considerare una relazione che associa a un elemento di un insieme, un altro elemento dell'insieme stesso.

Particolari tipi di relazione che agiscono all'interno di un insieme sono le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine.

Sia  $A$  un generico insieme e siano  $a, b$  e  $c$  tre elementi di  $A$ .

Una **relazione di equivalenza**  $\mathcal{R}$  ha le seguenti proprietà:

- **Riflessiva** – Ogni elemento  $a$  dell'insieme  $A$  è in relazione con se stesso;  
 $\forall a \in A : a \mathcal{R} a$ .
- **Simmetrica** – Per qualsiasi elemento  $a$  che è in relazione con  $b$  ne deriva che  $b$  è in relazione con  $a$ ;  
 $\forall a, b \in A : a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$ .
- **Transitiva** – Per tutti gli elementi  $a, b$  e  $c$ , tali che  $a$  è in relazione con  $b$  e  $b$  è in relazione con  $c$  ne deriva che  $a$  è in relazione con  $c$ ;  
 $\forall a, b, c \in A : a \mathcal{R} b \quad b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$ .

Quando due elementi di un insieme sono in relazione di equivalenza, essi si dicono **equivalenti**.

### Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutti gli alunni di una scuola. Ciascun alunno è collocato in una classe. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici alunni. Si può considerare la relazione di equivalenza  $\mathcal{R}$  = “è nella stessa classe di”.

Questa relazione di equivalenza nell'insieme degli alunni è riflessiva in quanto:

– Antonio è nella stessa classe di Antonio

Tale relazione è simmetrica:

– Se Antonio è nella stessa classe di Biagio, allora Biagio è nella stessa classe di Antonio.

Tale relazione è transitiva:

– Se Antonio è nella stessa classe di Biagio e Biagio è nella stessa classe di Carlo, allora Antonio è nella stessa classe di Carlo.

Considerata una relazione di equivalenza  $\mathcal{R}$  in un insieme di definizione  $A$ , si può definire il grafico  $G$ , per cui  $\mathcal{R} = (A \times A, G)$ . Si definisce **classe di equivalenza** di  $X$  rispetto a  $\mathcal{R}$ , l'insieme di quegli elementi appartenenti all'insieme  $A$  che sono equivalenti a  $x$ , ossia che sono in relazione con  $x$ .

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x \mathcal{R} y\}$$

In pratica si individua una classe di equivalenza scegliendo un elemento  $x$  ed inserendo nella classe tutti gli elementi che sono equivalenti a  $x$ . Di seguito si riportano alcune proprietà delle classi di equivalenza:



1. L'elemento  $x$  appartiene alla propria classe di equivalenza  $x \in [x]_{\mathcal{R}}$
2. Presa una coppia di elementi  $x$  e  $y$  di  $A$ , o le loro classi di equivalenza coincidono, oppure hanno intersezione pari al vuoto.  
 $\forall x, y \in A \Rightarrow [x] = [y] \text{ o } [x] \cap [y] = \emptyset$ .
3. L'unione di tutte le classi di equivalenza dell'insieme  $A$  coincide con l'insieme  $A$ .

L'**insieme quoziente** di  $A$  rispetto alla relazione  $\mathcal{R}$  è l'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza di  $A$ ; esso si indica con  $A/\mathcal{R}$ .

$$A/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}$$

## 1.8 Relazioni d'ordine largo

Sia  $A$  un generico insieme e siano  $a, b$  e  $c$  tre elementi di  $A$ .

Una **relazione d'ordine largo**  $\mathcal{R}$  ha le seguenti proprietà:

- **Riflessiva** – Ogni elemento  $a$  dell'insieme  $A$  è in relazione con se stesso;  $a\mathcal{R}a$ .
- **Antisimmetrica** – Per qualsiasi elemento  $a$  che è in relazione con  $b$  tale che  $a \neq b$  ( $a$  diverso da  $b$ ), ne deriva che  $b$  non è in relazione con  $a$ ; se  $a\mathcal{R}b$  ( $a \neq b$ ), allora  $b\not\mathcal{R}a$ .
- **Transitiva** – Per tutti gli elementi  $a, b$  e  $c$ , tali che  $a$  è in relazione con  $b$  e  $b$  è in relazione con  $c$  ne deriva che  $a$  è in relazione con  $c$ ; se  $a\mathcal{R}b$  e  $b\mathcal{R}c$ , allora  $a\mathcal{R}c$ .

### Esempio

Si consideri un insieme costituito da tutte le tessere di una biblioteca. Ciascuna tessera è caratterizzata da un numero identificativo diverso da tutti gli altri numeri, ossia da un identificativo univoco. Siano Antonio, Biagio e Carlo tre generici utenti tesserati della biblioteca. Si può considerare la relazione di ordine largo  $\mathcal{R} =$  “non ha un numero di tessera più alto di”, la cui negazione è  $\mathcal{R}^c =$  “ha un numero di tessera più alto di”.

Questa relazione di ordine largo nell'insieme dei tesserati è riflessiva in quanto:

– Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Antonio

Tale relazione è antisimmetrica:

– Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio, allora Biagio *ha un numero di tessera più alto di* Antonio.

Tale relazione è transitiva:

– Se Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Biagio e Biagio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo, allora Antonio *non ha un numero di tessera più alto di* Carlo.

# Capitolo 4

## Informatica

### 4.1 Modi di funzionamento di calcolatori elettronici ed elaboratori dati

#### 4.1.1 Porte logiche e bit

L'informatica, in quanto scienza che si occupa del trattamento dell'informazione mediante procedure automatizzate, è strettamente legata ai **calcolatori**, intesi come macchine programmabili in grado di elaborare dati numerici, testi, immagini, suoni e filmati. Le prime macchine meccaniche per il calcolo risalgono al XVII secolo, fino alla Macchina di Turing e all'architettura di Von Neumann che negli anni '50 del secolo scorso hanno dato le linee guida sull'architettura sulla quale è basata ancora oggi il funzionamento dei computer moderni.

Una calcolatrice o un elaboratore elettronico possono essere visti come esempi di reti logiche, vale a dire come un insieme di dispositivi chiamati **porte logiche** opportunamente connessi. Le porte logiche sono dei dispositivi capaci di eseguire operazioni logiche su segnali binari, i quali possono essere definiti come dei segnali digitali che rappresentano le informazioni sotto forma di un **bit** (termine derivato dalla fusione di *binary digit*).

Il concetto di bit è stato introdotto nel 1948 da Claude Shannon, fondando la teoria dell'informazione, nel suo articolo *A Mathematical Theory of Communication* in cui definisce un bit come *la quantità di informazione necessaria e sufficiente a rimuovere l'incertezza relativa al realizzarsi di uno tra due eventi equiprobabili e mutualmente esclusivi*.

In ambito informatico il bit indica la quantità minima di informazione che può essere gestita da qualsiasi elaboratore e per questo può essere definito come l'unità di misura fondamentale in Informatica.

I segnali binari sono livelli di tensione: ogni volta che in una parte del circuito è presente della corrente elettrica la calcolatrice "scrive" il numero 1, altrimenti "scrive" 0.

Dato che l'informazione pari ad 1 bit è piuttosto ridotta, per codificare informazioni più elaborate, come lettere, numeri e immagini, si utilizzano gruppi di 8 bit, che vengono definiti **byte**.

Poiché un bit può assumere solo due valori, il byte può assumere  $2^8 = 256$  valori. L'associazione tra i valori del byte e i caratteri alfanumerici, permettendo la comunicazione tra utenti e calcolatori senza dover ricorrere al codice binario, avviene a partire dal 1964 tramite il **sistema di codifica ASCII**.



Nel sistema decimale, definito come standard internazionale dall'*International Standardization Organization (ISO)*, il primo multiplo del byte è il kilobyte ed equivale a  $10^3$  byte (1.000 byte). Riportiamo di seguito i principali multipli:

Nome	Sigla	Valore
Kilobyte	KB	$10^3$ byte
Megabyte	MB	$10^6$ byte
Gigabyte	GB	$10^9$ byte
Terabyte	TB	$10^{12}$ byte
Petabyte	PB	$10^{15}$ byte
Exabyte	EB	$10^{18}$ byte

### 4.1.2 L'algebra di Boole

L'algebra Booleana (o *Switching Algebra*) prende il nome dal matematico inglese George Boole (1815-1864) autore del testo *The mathematical analysis of logic* ed è il fondamento per la progettazione di circuiti logici digitali. Si tratta del ramo dell'algebra in cui le variabili possono assumere solamente i due valori logici codificati nel bit e denotati con 0 e 1.

Nell'algebra booleana le operazioni fondamentali sono effettuate tramite gli **operatori logici**:

- **AND** = congiunzione (prodotto logico);
- **OR** = disgiunzione (somma logica);
- **NOT** = negazione (complementazione).

La combinazione di AND, OR e NOT permette di sviluppare qualsiasi **funzione booleana**. Le funzioni booleane sono caratterizzate da una o più variabili di ingresso (variabili indipendenti) e una variabile di uscita (variabile dipendente). Una **porta logica** è un circuito digitale in grado di effettuare una particolare operazione logica di una o più variabili booleane. In base al numero di ingressi, che rappresentano il numero di variabili che una porta logica può ricevere in input, le porte logiche si possono classificare in:

- porte a due variabili: AND, OR, EXOR, NOR, NAND e EXNOR;
- porte a singola variabile: NOT.

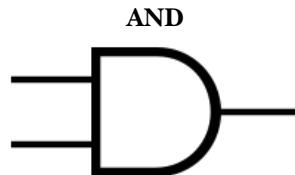
In particolare, le porte OR, AND e NOT costituiscono un insieme funzionalmente completo, nel senso che attraverso gli operatori logici che implementano è possibile generare qualsiasi funzione logica.

Gli operatori booleani si possono rappresentare attraverso una:

- *rappresentazione algebrica*: utilizzando dei simboli;
- *rappresentazione circuitale*: rappresentazione grafica dove gli operatori sono rappresentati attraverso porte collegate da segmenti.

Nella rappresentazione circuitale, il valore delle variabili è un *segnale* (attività elettrica), che può essere *presente* o *assente*.

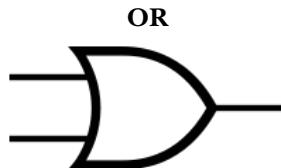
Le **tabelle di verità** sono un metodo semplice per capire tutte le possibili combinazioni che possiamo avere in ingresso.



AND è una porta logica che riceve in ingresso almeno due valori e restituisce 1 solo se tutti i valori di ingresso hanno valore 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

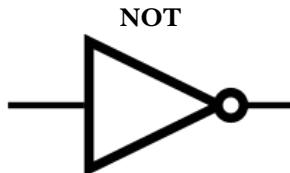
*Tavola di verità dell'operatore AND*



OR è una porta logica che riceve in ingresso almeno 2 valori e restituisce 1 se almeno un valore di ingresso ha valore 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

*Tavola di verità dell'operatore OR*

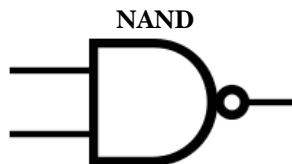


Porta logica che inverte il segnale in ingresso.

Questa porta logica ha un solo ingresso ed una uscita che sarà 1 se l'ingresso è 0 o 0 se l'ingresso è 1.

INPUT	OUTPUT
A	NOT A
0	1
1	0

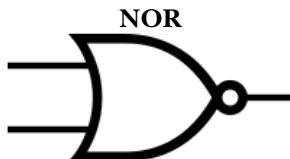
*Tavola di verità dell'operatore NOT*



Al contrario la porta NAND restituisce la negazione di una porta AND e quindi restituisce 1 quando negli ingressi è presente lo 0, e 0 solo quando tutti i valori in ingresso sono 1.

INPUT		OUTPUT
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

*Tavola di verità dell'operatore NAND*



La porta NOR restituisce la negazione di una porta OR e quindi restituisce 1 solo quando tutti i valori in ingresso sono 0.

INPUT		OUTPUT
A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore NOR

EXOR



EXOR (EXCLUSIVE OR) è una porta logica che riceve in ingresso  $n$  valori e restituisce “1” in uscita se, e solo se, vi è almeno un ingresso che differisce dagli altri. Segue la tavola di verità di una porta XOR a “n=2” ingressi:

INPUT		OUTPUT
A	B	$\text{o A o B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tavola di verità dell'operatore EXOR

EXNOR



EXNOR (EXCLUSIVE NOR) è una porta logica che riceve in ingresso  $n$  e restituisce “1” in uscita se, e solo se, tutti gli ingressi hanno il medesimo valore logico. In breve, è equivalente alla negazione della porta EXOR.

# il **nuovo** concorso a cattedra

## MANUALE

Scienze **Matematiche applicate** nella **scuola secondaria**  
per la **preparazione al concorso**

Manuale completo per la **preparazione al Concorso a Cattedra** per la **classe di concorso A47** (Scienze matematiche applicate) nella scuola secondaria.

Il volume è diviso in Parti.

La **Prima Parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di andare incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte.

La **Seconda Parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**, con una utile **Appendice** recante le figure principali della storia della matematica e della matematica applicata e un intero **capitolo dedicato all'informatica** specifica per la matematica applicata.

La **Terza Parte**, accessibile **online**, comprende esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il testo è completato da un **software di simulazione**, mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite, oltre che da eventuali **materiali didattici, approfondimenti e risorse** disponibili, anch'essi, **online**.

### PER COMPLETARE LA PREPARAZIONE:

CC1/I • PARTE GENERALE - LEGISLAZIONE SCOLASTICA PER TUTTE LE CLASSI DI CONCORSO



**IN OMAGGIO**  
ESTENSIONI ONLINE

Software di  
**simulazione**

Contenuti  
**extra**

Le **risorse di studio** gratuite sono accessibili per 18 mesi dalla propria area riservata, previa registrazione al sito [edises.it](http://edises.it).



**EdiSES**  
edizioni



[blog.edises.it](http://blog.edises.it)



[infoconcorsi.edises.it](http://infoconcorsi.edises.it)



€ 40,00



9 791256 021352