

Forze Armate e di Polizia

Collana a cura di Patrizia Nissolino

**TEORIA E
TEST
II EDIZIONE**

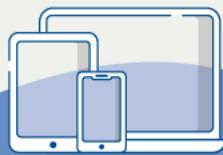
CONCORSO

ACCADEMIA MILITARE ARMA DEI CARABINIERI

Prova orale di Matematica

Indicazioni sul concorso

Tutto il programma d'esame



**+ ESTENSIONI ONLINE
SOFTWARE DI SIMULAZIONE**



 **EdiSES**
edizioni

TEORIA E TEST

II EDIZIONE

CONCORSO

ACCADEMIA MILITARE

ARMA DEI CARABINIERI

Accedi ai servizi riservati

Il codice personale contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a:

SOFTWARE DI SIMULAZIONE E CONTENUTI AGGIUNTIVI

CODICE PERSONALE

Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.
Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate nella pagina seguente.
Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile.
L'accesso ai servizi riservati ha la **durata di 18 mesi** dall'attivazione del codice
e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.



Istruzioni per accedere ai contenuti e ai servizi riservati

SEGUICI QUESTE SEMPLICI ISTRUZIONI

SE SEI REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



inserisci email e password



inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN,
riportato in basso a destra sul retro di
copertina



inserisci il tuo **codice personale** per
essere reindirizzato automaticamente
all'area riservata

SE NON SEI GIÀ REGISTRATO AL SITO

clicca su **Accedi al materiale didattico**



registra al sito



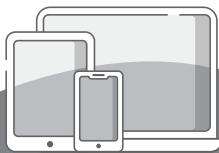
attendi l'email di conferma
per perfezionare
la registrazione



torna sul sito **edises.it** e segui la
procedura già descritta per
utenti registrati



CONTENUTI AGGIUNTIVI



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei
supporti multimediali e per informazioni sui
nostri servizi puoi contattarci sulla piattaforma
assistenza.edises.it

CONCORSO

ACCADEMIA MILITARE

ARMA DEI CARABINIERI

Prova orale di Matematica



Concorso Accademia Militare Arma dei Carabinieri – Prova orale di Matematica – II Edizione
Copyright © 2021, 2019, EdiSES edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2025 2024 2023 2022 2021

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.

L'Editore



Cover Design and Front Cover Illustration: Digital Followers S.r.l.

Fotocomposizione: doma book di Massimo Di Grazia

Stampato presso PrintSprint S.r.l. – NA

Per conto della EdiSES edizioni S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edises.it

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma *assistenza.edises.it*.

Sommario

Parte Prima Diventare Ufficiale dell'Arma dei Carabinieri

Capitolo 1 L'Ufficiale dell'Arma dei Carabinieri.....	3
---	---

Parte Seconda Matematica

Capitolo 1 Insiemi, relazioni e funzioni	15
Capitolo 2 Gli insiemi numerici e le operazioni fondamentali	33
Capitolo 3 Monomi e polinomi	42
Capitolo 4 Radicali.....	60
Capitolo 5 Equazioni algebriche	73
Capitolo 6 Disequazioni algebriche	103
Capitolo 7 Funzioni esponenziali e logaritmiche.....	122
Capitolo 8 Geometria piana.....	131
Capitolo 9 Geometria analitica.....	200
Capitolo 10 Equazioni e disequazioni: con termini in valore assoluto e parametriche.....	231
Capitolo 11 Goniometria.....	238
Capitolo 12 Trigonometria.....	283
Capitolo 13 Elementi di calcolo delle probabilità.....	296
Capitolo 14 Elementi di statistica	302
Appendice degli argomenti delle tesi	313



Premessa

Il volume si rivolge a coloro che devono prepararsi ai concorsi per l'accesso ai corsi per Ufficiale del ruolo normale dell'Accademia dell'Arma dei Carabinieri.

Il testo tratta la fase della *prova orale di Matematica*.

Nelle prime pagine sono fornite indicazioni sulla figura professionale dell'Ufficiale, sulle prove che ciascun concorrente dovrà affrontare partecipando al concorso.

Nelle Parte Seconda, il volume sviluppa, argomento per argomento, il programma della prova orale per tesi di **Matematica**, come previsto dal bando di concorso.

Il contenuto di questo volume è, quindi, completo ed esauritivo per la preparazione alla prova orale di Matematica per l'accesso ai corsi per Ufficiale del ruolo normale dell'Accademia dell'Arma dei Carabinieri.

Gli autori, infatti, si sono impegnati a sviluppare il programma d'esame nel modo più pertinente possibile alle richieste delle Amministrazioni, Militari e di Polizia, e a presentarlo nelle forme più semplici per l'apprendimento; inoltre, hanno arricchito i contenuti inserendo delle rubriche che puntano direttamente alle nozioni che interessano i candidati.

L'obiettivo è quello di fornire, ai concorrenti che desiderano intraprendere una carriera in divisa, strumenti particolarmente efficaci per raggiungere una preparazione ottimale e poter affrontare le prove selettive di ciascun concorso con l'adeguata serenità, sicuri di aver studiato in modo incisivo gli specifici argomenti richiesti.

Per una preparazione completa di tutte le fasi del concorso per l'accesso all'Accademia dell'Arma dei Carabinieri, si consigliano, inoltre, i volumi:

- Concorso Accademia Carabinieri – Teoria e test per preselezione, prova scritta di lingua italiana e prova di lingua inglese (**CC 1.1**)
- Concorso Accademia Militare Arma dei Carabinieri – Prova orale di Storia, Costituzione e cittadinanza italiana, Geografia (**CC 1.3**)
- Concorso Arma dei Carabinieri – Prove di efficienza fisica, accertamenti psico-fisici e accertamenti attitudinali (**CC 4.0**).



Ulteriori **materiali didattici, simulazioni di prove e aggiornamenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Eventuali errata-corrigé saranno pubblicati sul sito *edises.it*, nell'apposita sezione "Aggiornamenti" della scheda prodotto.

Altri aggiornamenti saranno disponibili sui nostri profili social.

Facebook.com/infoConcorsi

Clicca su  (Facebook) per ricevere gli aggiornamenti
blog.edises.it

Indice

Parte Prima Diventare Ufficiale dell'Arma dei Carabinieri

Capitolo 1 – L’Ufficiale dell’Arma dei Carabinieri

1.1	Le Accademie militari	3
1.2	La struttura organizzativa delle Forze Armate e il personale militare	4
1.3	L’Arma dei Carabinieri	5
1.4	Compiti istituzionali dell’Arma	6
1.5	Dipendenze gerarchiche e funzionali	6
1.6	Ordinamento e la categoria degli Ufficiali	7
1.7	La Scuola Ufficiali dell’Arma	8
1.8	Il concorso e le prove di selezione	9
1.8.1	Requisiti di partecipazione	9
1.8.2	Iter concorsuale	9

Parte Seconda Matematica

Capitolo 1 – Insiemi, relazioni e funzioni

1.1	Insiemi	15
1.2	Rappresentazioni degli insiemi	16
1.3	Insiemi uguali – insiemi disgiunti	16
1.4	Operazioni con gli insiemi	17
1.4.1	Sottoinsiemi di un insieme	17
1.4.2	Intersezione di insiemi	18
1.4.3	Unione di insiemi	19
1.4.4	Differenza di due insiemi	19
1.5	Insieme delle parti: partizione e ricoprimento	20
1.6	Relazione tra insiemi	21
1.7	Relazioni di equivalenza e di ordine	24
1.8	Equipotenza tra insiemi; insiemi finiti e insiemi infiniti	24
1.9	Classi di equivalenza e insieme quoziante	25
1.10	Prodotto cartesiano di due insiemi	25
1.11	Relazioni funzionali: applicazioni	26
1.12	Grafici di funzione	28
1.12.1	Gli zeri e il segno di una funzione	29
1.12.2	Grafici di funzioni iniettive	29



1.12.3 Grafici di funzioni suriettive.	30
1.12.4 Grafici di funzioni invertibili (bigettive).	31
Capitolo 2 – Gli insiemi numerici e le operazioni fondamentali	
2.1 Insiemi numerici (N , Z , Q , I e R)	33
2.2 Potenze	35
2.3 Potenza di un numero reale ad esponente naturale	35
2.4 Potenza di un numero reale ad esponente relativo	37
2.5 Estrazione di radice	38
2.6 Divisibilità tra numeri; m.c.m. e M.C.D.	39
2.6.1 Criteri di divisibilità	39
2.6.2 Scomposizione di un numero in fattori primi	39
2.6.3 Massimo comune divisore (M.C.D.) e minimo comune multiplo (m.c.m.)	40
2.7 Espressioni	41
Capitolo 3 – Monomi e polinomi	
3.1 Introduzione all'algebra	42
3.2 Le regole del calcolo algebrico e le relative operazioni	42
3.3 Definizioni e proprietà dei monomi	44
3.3.1 Grado di un monomio - Monomi simili - Monomi opposti	45
3.4 Operazioni con i monomi	45
3.4.1 Somma algebrica di monomi	45
3.4.2 Riduzione di termini simili	46
3.4.3 Prodotto di monomi	46
3.4.4 Quoziente di due monomi	46
3.4.5 Potenza di monomi	47
3.5 Definizioni e proprietà dei polinomi	47
3.5.1 Grado relativo e assoluto di un polinomio	47
3.6 Operazioni con i polinomi	48
3.6.1 Addizione e sottrazione di polinomi	48
3.6.2 Prodotto di un monomio per un polinomio	48
3.6.3 Prodotto di due polinomi	49
3.6.4 Divisione di un polinomio per un monomio	49
3.6.5 Divisione di due polinomi	49
3.7 Prodotti notevoli	50
3.8 Teorema e regola di Ruffini	52
3.8.1 Divisibilità di un polinomio intero per il binomio $x - k$	52
3.8.2 Regola di Ruffini	52
3.9 Divisibilità dei binomi notevoli	53
3.10 Scomposizione dei polinomi	53
3.11 M.C.D. e m.c.m. di monomi e polinomi	55
3.11.1 M.C.D. e m.c.m di monomi	55
3.11.2 M.C.D. e m.c.m di polinomi	56
3.12 Principio di identità di due polinomi	56
3.13 Le frazioni algebriche e le operazioni fra esse	57
Capitolo 4 – Radicali	
4.1 Radice ennesima aritmetica di un numero reale assoluto	60

4.2	Proprietà invariantiva e trasformazioni di radicali	61
4.2.1	Teoremi fondamentali sui radicali	62
4.3	Operazioni sulle radici aritmetiche (radicali ed espressioni irrazionali)	63
4.3.1	Trasporto di fattori o divisori fuori dal segno di radice	63
4.3.2	Trasporto di fattori o divisori sotto il segno di radice	63
4.3.3	Addizione e sottrazione dei radicali	64
4.3.4	Moltiplicazione e divisione dei radicali	64
4.3.5	Elevazione a potenza ed estrazione di radice	65
4.4	Razionalizzazione del denominatore di una frazione	65
4.5	Potenza con esponente razionale di un numero reale	66
4.5.1	Le operazioni	66
4.5.2	Confronto tra potenze	68
4.6	La radice nel campo dei numeri relativi. Radicali algebrici	71
4.7	Conclusioni	72

Capitolo 5 – Equazioni algebriche

5.1	Principi della teoria delle equazioni	73
5.2	Nozioni di equivalenza e principi di equivalenza	74
5.3	Equazioni di primo grado ad una incognita ($ax + b = 0$)	76
5.4	Equazioni di primo grado a due incognite	78
5.5	Sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite	79
5.6	Problemi di primo grado	82
5.6.1	Problemi di primo grado ad un'incognita	82
5.6.2	Problemi di primo grado a due o più incognite	82
5.7	Equazioni di secondo grado ad una incognita ($ax^2 + bx + c = 0$)	83
5.8	Relazioni tra radici e coefficienti di un'equazione di secondo grado e proprietà (trinomio di secondo grado)	86
5.9	Regola di Cartesio	90
5.10	Sistemi di equazioni in due incognite di secondo grado	90
5.10.1	Sistemi simmetrici	91
5.11	Equazioni di grado superiore al secondo	93
5.11.1	Metodo generale di risoluzione e regola di Ruffini	93
5.11.2	Equazioni binomie	94
5.11.3	Equazioni trinomie. L'equazione biquadratica	95
5.12	Equazioni razionali fratte	96
5.13	Equazioni reciproche	98
5.14	Equazioni irrazionali	99
5.14.1	Equazioni irrazionali fratte	102

Capitolo 6 – Disequazioni algebriche

6.1	Diseguaglianze e relative proprietà - Intervalli	103
6.2	Disequazioni, definizioni e proprietà	105
6.2.1	Definizioni	105
6.2.2	Proprietà fondamentale delle disequazioni	107
6.3	Disequazioni lineari (di primo grado)	107
6.4	Disequazioni di secondo grado	109
6.5	Disequazioni razionali fratte (frazionarie)	114
6.6	Disequazioni irrazionali	116
6.6.1	Le disequazioni irrazionali risolte attraverso la geometria analitica	121



Capitolo 7 – Funzioni esponenziali e logaritmiche

7.1	Funzione esponenziale	122
7.2	Definizione di logaritmo	123
7.3	Teoremi sui logaritmi	124
7.4	Funzione logaritmica	126
7.5	Equazioni esponenziali	127
7.6	Equazioni logaritmiche	130

Capitolo 8 – Geometria piana

8.1	Teorie assiomatiche e geometria euclidea	131
8.1.1	Teorie assiomatiche	131
8.1.2	La geometria euclidea	133
8.2	Figure geometriche piane: proprietà e definizioni	134
8.2.1	Figure geometriche	134
8.2.2	La retta	134
8.2.3	Rette parallele	136
8.2.4	Rette perpendicolari	137
8.2.5	La semiretta	138
8.2.6	I segmenti	138
8.2.7	Piano e semipiano	138
8.2.8	Angoli	138
8.2.9	Luoghi geometrici	140
8.2.10	Linea spezzata	141
8.3	Grandezze geometriche e loro misura: confronto tra grandezze	141
8.3.1	La relazione di congruenza	141
8.3.2	Nozione di equivalenza (equistensione)	142
8.3.3	Equivalenza delle superfici piane	142
8.3.4	Classi di grandezze geometriche	143
8.3.5	Misura delle grandezze geometriche	144
8.3.6	Grandezze proporzionali	144
8.3.7	Lunghezza di un segmento	147
8.3.8	Aampiezza di un angolo	148
8.3.9	Estensione di una superficie	149
8.4	Poligoni	149
8.4.1	Definizioni	149
8.4.2	Proprietà	150
8.4.3	Triangoli	151
8.4.4	Quadrilateri	154
8.4.5	Poligoni regolari	155
8.4.6	Calcolo dell'area e dei perimetri dei poligoni	156
8.5	La congruenza nei poligoni	157
8.5.1	Congruenza	157
8.5.2	Criteri di congruenza nei triangoli	157
8.5.3	Congruenza nei triangoli rettangoli	159
8.5.4	Proprietà del triangolo isoscele	159
8.6	Il teorema di Talete e la similitudine nei poligoni	161
8.6.1	La relazione di similitudine	161
8.6.2	La corrispondenza di Talete	161

8.6.3	Il teorema di Talete	161
8.6.4	Conseguenze ed applicazioni del teorema di Talete	163
8.6.5	La similitudine nei triangoli	166
8.6.6	Poligoni simili	169
8.7	L'equivalenza nei poligoni	171
8.7.1	Equiscomponibilità	171
8.7.2	Equivalenza tra parallelogrammi	171
8.7.3	Equivalenza tra triangoli	172
8.7.4	Equivalenza tra triangoli e quadrilateri	173
8.8	I teoremi di Euclide e di Pitagora	174
8.8.1	Teorema 1° di Euclide (similitudine)	174
8.8.2	Teorema 1° di Euclide (equivalenza)	174
8.8.3	Teorema di Pitagora	175
8.8.4	Teorema 2° di Euclide (similitudine)	176
8.8.5	Teorema 2° di Euclide (equivalenza)	177
8.8.6	Espressioni metriche dei teoremi di Pitagora e di Euclide	177
8.8.7	Applicazioni del Teorema di Pitagora	178
8.8.8	Applicazioni dei Teoremi di Euclide	180
8.9	La circonferenza	180
8.9.1	Definizioni e proprietà	180
8.9.2	Posizione reciproca di due circonferenze	182
8.9.3	Posizione reciproca tra circonferenza e retta	183
8.9.4	Angoli al centro e angoli alla circonferenza	184
8.9.5	Poligoni inscritti e poligoni circoscritti	186
8.9.6	Lunghezza della circonferenza	188
8.9.7	La circonferenza e il cerchio	190
8.10	Applicazioni della similitudine	191
8.10.1	Teorema delle corde	191
8.10.2	Teorema delle secanti	192
8.10.3	Teorema della tangente e della secante	192
8.10.4	Sezione aurea di un segmento	193
8.10.5	Teorema sul lato del decagono regolare	193
8.11	Punti notevoli di un triangolo	194
8.11.1	Teorema: gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto circoncentro	194
8.11.2	Teorema: le bisettrici degli angoli di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto incentro	194
8.11.3	Teorema: le altezze di un triangolo si incontrano in un punto detto ortocentro	195
8.11.4	Teorema: le mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto detto barycentro che divide ognuna di esse in due parti; delle due quella che per estremo ha un vertice è doppia dell'altra	195
	Appendice di geometria	197

Capitolo 9 – Geometria analitica

9.1	Coordinate cartesiane sulla retta	200
9.1.1	Ascisse	200
9.1.2	Distanza tra due punti su una retta	200
9.1.3	Punto medio di un segmento su una retta	200



9.2	Coordinate cartesiane nel piano	201
9.2.1	Ascisse e ordinate	201
9.2.2	Distanza fra due punti nel piano	202
9.2.3	Punto medio di un segmento nel piano	203
9.2.4	Trasformazione di coordinate (traslazione degli assi)	204
9.3	Equazione della retta: funzione lineare.	204
9.3.1	La funzione lineare	204
9.3.2	Equazione esplicita: $y = mx + q$	205
9.3.3	Distanza di un punto da una retta	207
9.3.4	Rette per un punto dato	208
9.3.5	Retta per due punti dati	208
9.3.6	Fasci di rette	210
9.4	Equazione cartesiana (o generale)	211
9.5	Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette.	212
9.5.1	Equazione di rette parallele	212
9.5.2	Equazioni di rette perpendicolari	212
9.5.3	Intersezione tra rette	213
9.6	Luoghi geometrici nel piano cartesiano	214
9.7	Le coniche	215
9.8	Circonferenza (equazione cartesiana e canonica)	216
9.8.1	Fascio di circonferenze	219
9.9	Parabola.	220
9.9.1	Definizione	220
9.9.2	Parbole di equazione: $y = ax^2$	221
9.9.3	Parbole di equazione: $y = ax^2 + c$	223
9.9.4	Parbole di equazione: $y = ax^2 + bx$	224
9.9.5	Parbole di equazione: $y = ax^2 + bx + c$	224
9.10	Ellisse (equazione canonica)	225
9.11	Iperbole (equazione canonica)	227
9.11.1	Caso particolare $a = b \Rightarrow$ iperbole equilatera	229

Capitolo 10 – Equazioni e disequazioni: con termini in valore assoluto e parametriche

10.1	Valore assoluto	231
10.2	Equazioni e disequazioni in valore assoluto	231
10.3	Equazioni parametriche	234
10.3.1	Equazioni parametriche di primo grado	234
10.3.2	Equazioni parametriche di secondo grado	235
10.4	Disequazioni parametriche	235
10.4.1	Disequazioni parametriche di primo grado	235
10.4.2	Disequazioni parametriche di secondo grado	236

Capitolo 11 – Goniometria

11.1	Introduzione	238
11.1.1	Definizione di angolo	239
11.1.2	Riduzione di un arco o di un angolo al primo giro	239
11.2	Misura degli archi e degli angoli circolari	240
11.2.1	Definizione di arco	240
11.2.2	Archi orientati	240

11.2.3 Misura degli archi	240
11.2.4 Passaggio da un sistema di misura ad un altro	241
11.3 Funzioni goniometriche	241
11.3.1 Circonferenza goniometrica	241
11.3.2 Funzioni goniometriche	241
11.3.2.1 Seno	241
11.3.2.2 Coseno	244
11.3.2.3 Tangente	246
11.3.2.4 Cotangente	249
11.3.3 Relazioni tra le funzioni goniometriche	251
11.3.4 Relazione tra le funzioni goniometriche di uno stesso arco, valori particolari (18°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e 360°)	253
11.3.5 Relazione tra le funzioni goniometriche di archi superiori a 360°, di archi supplementari, complementari, esplementari, opposti e di archi che differiscono di 90°, 180°, 270°	258
11.4 Formule di addizione e sottrazione degli angoli	262
11.5 Formule di duplicazione	264
11.6 Formule di bisezione	264
11.7 Formule di Prostaferesi	265
11.8 Formule di Werner	266
11.9 Identità goniometriche	267
11.10 Equazioni goniometriche	268
11.10.1 Equazioni elementari con il seno	268
11.10.2 Equazioni elementari con il coseno	269
11.10.3 Equazioni elementari con la tangente	271
11.10.4 Equazioni elementari con la cotangente	271
11.11 Equazioni riducibili a equazioni elementari	272
11.11.1 Equazioni lineari in seno e coseno	273
11.11.2 Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno	274
11.11.3 Equazioni simmetriche rispetto a $\sin x$ e $\cos x$	275
11.12 Sistemi di equazioni goniometriche	276
11.13 Disequazioni goniometriche	278
11.13.1 Disequazioni elementari	279

Capitolo 12 – Trigonometria

12.1 Definizione	283
12.2 Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo	283
12.3 Risoluzione dei triangoli rettangoli	284
12.4 Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualunque	286
12.5 Risoluzione di un triangolo qualunque	290
12.6 Altre formule	292
12.7 Esercizi svolti	293

Capitolo 13 – Elementi di calcolo delle probabilità

13.1 Introduzione	296
13.2 Definizione classica di probabilità	296
13.3 Definizione soggettiva di probabilità	297
13.4 Definizione frequentista di probabilità (Probabilità statistica)	297



13.5 Somma logica di eventi e prodotto logico di eventi	298
13.5.1 Somma logica di eventi	298
13.5.2 Prodotto logico di eventi	299
Capitolo 14 – Elementi di statistica	
14.1 La rilevazione dei fenomeni statistici	302
14.2 Rappresentazione dei dati	303
14.2.1 Rappresentazione tabellare	303
14.2.2 Rappresentazione grafica delle distribuzioni semplici	305
14.3 Le medie	308
14.3.1 La media aritmetica	308
14.3.2 La media geometrica	310
14.3.3 La mediana	310
14.3.4 La moda	311
Appendice degli argomenti delle tesi	313

Parte Seconda

Matematica

SOMMARIO

Capitolo 1	Insiemi, relazioni e funzioni
Capitolo 2	Gli insiemi numerici e le operazioni fondamentali
Capitolo 3	Monomi e polinomi
Capitolo 4	Radicali
Capitolo 5	Equazioni algebriche
Capitolo 6	Disequazioni algebriche
Capitolo 7	Funzioni esponenziali e logaritmiche
Capitolo 8	Geometria piana
Capitolo 9	Geometria analitica
Capitolo 10	Equazioni e disequazioni: con termini in valore assoluto e parametriche
Capitolo 11	Goniometria
Capitolo 12	Trigonometria
Capitolo 13	Elementi di calcolo delle probabilità
Capitolo 14	Elementi di statistica

Capitolo 12

Trigonometria

12.1 DEFINIZIONE

Per **trigonometria** intendiamo quell'insieme di regole e formule che consentono di determinare alcuni degli elementi (angoli e/o lati) di un triangolo qualsiasi, noti gli altri.

Dai criteri di congruenza dei triangoli sappiamo che è possibile replicare un triangolo rispetto ad un altro se sono noti tre elementi su sei di questo; nei triangoli esistono quindi relazioni tra le misure degli angoli e dei lati che consentono di calcolare gli elementi incogniti a partire da quelli noti ed i relativi procedimenti prendono il nome di **risoluzione dei triangoli**. Per individuare in modo univoco un triangolo distinguiamo tre diversi casi a seconda degli elementi noti:

- risoluzione a partire dalla conoscenza di due lati e l'angolo compreso (dal 1° criterio di congruenza);
- risoluzione a partire dalla conoscenza di un lato e degli angoli ad esso adiacenti (2° criterio);
- risoluzione a partire dalla conoscenza dei tre lati (3° criterio).

Nei triangoli rettangoli la misura di un angolo è nota a priori; sono quindi sufficienti due soli elementi noti:

- due cateti;
- un cateto e l'ipotenusa;
- l'ipotenusa ed un angolo acuto;
- un cateto ed un angolo acuto.

12.2 RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Alla luce di quanto visto a proposito delle funzioni goniometriche consideriamo la porzione di circonferenza goniometrica racchiusa nel primo quadrante (fig. 1).

Indicato con ABC un triangolo rettangolo in C , siano a , b e c le misure dei lati rispettivamente opposti ai vertici A , B e C .

Siano inoltre α e β gli angoli relativi ai vertici A e B del triangolo ABC .

Abbiamo visto che le definizioni delle funzioni goniometriche di un angolo orientato non dipendono dal raggio della circonferenza goniometrica.

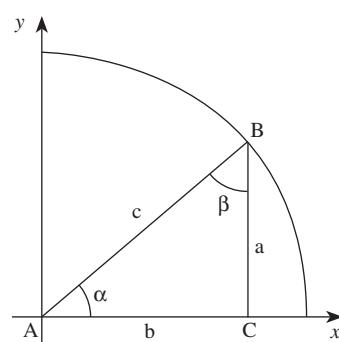


fig. 1



Pertanto assunto come raggio della circonferenza l'ipotenusa \overline{AB} del triangolo, dalle definizioni di seno, coseno e tangente, ricaviamo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \\ \operatorname{cos}\alpha = \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Da tali definizioni si possono ricavare agevolmente i cateti del triangolo in funzione dell'angolo α e dell'ipotenusa, poiché:

$$\begin{cases} a = c \operatorname{sen}\alpha \\ b = c \operatorname{cos}\alpha \\ a = b \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \quad (*)$$

Inoltre, essendo la somma degli angoli interni di un triangolo 180° , ne consegue che β è il complementare di α , essendo ABC rettangolo, cioè:

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

ricordando pertanto le formule degli angoli associati abbiamo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \operatorname{cos}\beta \\ \operatorname{cos}\alpha = \operatorname{cos}(90^\circ - \beta) = \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{ctg}\beta \end{cases}$$

e sostituendo nelle (*) otteniamo le espressioni dei cateti del triangolo rettangolo ABC in funzione dell'angolo β :

$$\begin{cases} a = c \operatorname{cos}\beta \\ b = c \operatorname{sen}\beta \\ a = b \operatorname{ctg}\beta \Leftrightarrow b = a \operatorname{tg}\beta \end{cases} \quad (**)$$

Queste relazioni ci permettono di risolvere i triangoli rettangoli come vedremo nei paragrafi successivi quando affronteremo i problemi della trigonometria.

12.3 RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI

Per la risoluzione di un triangolo rettangolo dobbiamo fare riferimento a quanto detto a proposito delle relazioni tra i suoi elementi.

La risoluzione del triangolo rettangolo in trigonometria prevede quattro casi che andremo a schematizzare tenendo conto della figura 2.

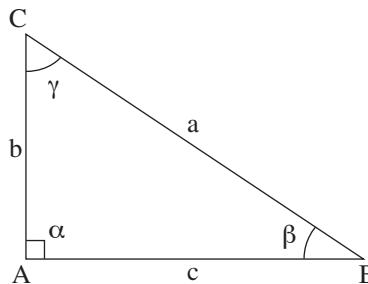


fig. 2

I quattro casi sono:

CASO	ELEMENTI NOTI	ELEMENTI INCOGNITI
I	cateti b e c	ipotenusa a ed angoli β e γ
II	ipotenusa a e cateto b	cateto c ed angoli β e γ
III	cateto b ed angolo β	ipotenusa a , cateto c ed angolo γ
IV	ipotenusa a ed angolo β	cateti b e c ed angolo γ

I Caso

Ricordiamo che nel triangolo rettangolo $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$; da ciò ricaviamo immediatamente l'angolo β attraverso la formula inversa $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)$.

Adesso γ lo ricaviamo tenendo conto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° ; essendo $\alpha = 90^\circ$:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta$$

Per avere infine il valore dell'ipotenusa a , ricordiamo che $b = a \operatorname{sen}\beta$ e quindi: $a = b / \operatorname{sen}\beta$.

II Caso

Dalla formula $b = a \operatorname{sen}\beta$, otteniamo $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}$ e quindi $\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a}\right)$.

L'angolo γ si ricava in modo analogo al I caso cioè $\gamma = 90^\circ - \beta$.

Infine, per avere il cateto c ricordiamo la formula: $c = a \operatorname{cos}\gamma$.

III Caso

L'angolo γ si ricava in modo analogo al I caso cioè $\gamma = 90^\circ - \beta$; inoltre, essendo $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$, risulta $c = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$.

Infine, sapendo che $b = a \operatorname{sen}\beta$, si ricava agevolmente: $a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$.

IV Caso

L'angolo γ si ricava in modo analogo al I caso cioè $\gamma = 90^\circ - \beta$, inoltre $b = a \operatorname{sen}\beta$ ed infine $c = a \operatorname{cos}\beta$.



12.4 RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Teorema dei seni

In un triangolo qualunque i lati sono proporzionali ai seni degli angoli ad essi opposti.

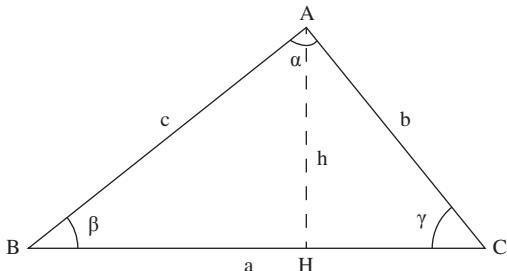


fig. 3

Nel triangolo acutangolo di vertici ABC di figura 3, l'altezza \overline{AH} , relativa al lato \overline{BC} , individua su \overline{BC} il piede H, dividendo il triangolo in due triangoli rettangoli, AHB e AHC.

Se indichiamo con h il segmento \overline{AH} , per tali triangoli potremo scrivere le relazioni seguenti:

per il triangolo AHB

$$h = c \operatorname{sen} \beta$$

per il triangolo AHC

$$h = b \operatorname{sen} \gamma$$

per la proprietà transitiva sarà:

$$\operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \gamma$$

ovvero: $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$.

È possibile ripetere lo stesso procedimento con gli altri vertici, ad esempio con il vertice B per il quale avremo:

$$c \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \gamma \quad \text{da cui: } \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

di nuovo per la transitività delle uguaglianze avremo:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Anche se avessimo considerato un triangolo ottusangolo saremmo giunti alle stesse identiche conclusioni potendo scrivere per gli stessi triangoli rettangoli AHB ed AHC (vedi fig. 4):

per il triangolo AHB

$$h = c \operatorname{sen} \beta$$

per il triangolo AHC

$$h = b \operatorname{sen}(\pi - \gamma) = b \operatorname{sen} \gamma$$

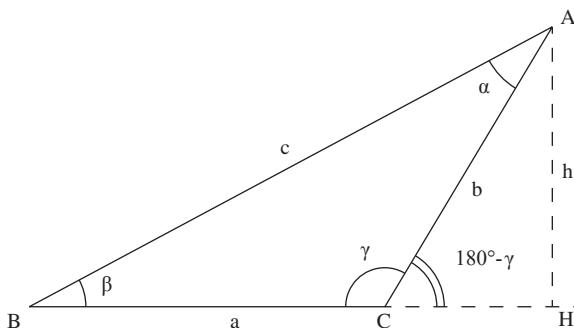


fig. 4

Proprietà: in un triangolo il rapporto tra ogni lato ed il seno dell'angolo ad esso opposto è costante ed è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo stesso.

Come da fig. 5 consideriamo il triangolo di vertici ABC inscritto nella circonferenza di diametro $2r$ dove andiamo ad inscrivere anche un triangolo di vertici ADC che condivide quindi con ABC i due vertici A e C ed ha un lato coincidente con il diametro $\overline{AD} = 2r$ della circonferenza. Tale triangolo è necessariamente rettangolo in C ed ha l'angolo in D congruente con l'angolo in B del triangolo dato perché gli angoli alla circonferenza \hat{B} e \hat{D} insistono sulla stessa corda $\overline{AC} \equiv b$; per il triangolo rettangolo il teorema dei seni fornisce la seguente relazione:

$$\overline{AC} = \overline{AD} \operatorname{sen}\beta \quad \text{ovvero: } \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2r$$

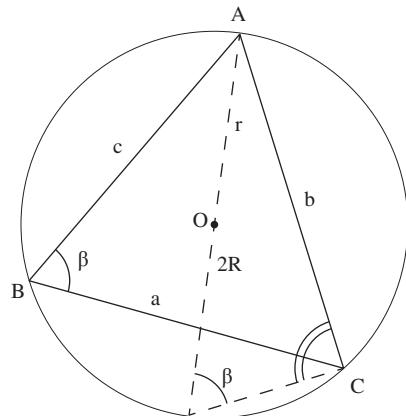


fig. 5

Definizione: dato un angolo, definiamo proiezione di uno dei lati sul secondo lato dell'angolo il prodotto della misura dei lati per il coseno dell'angolo stesso.

Il teorema delle proiezioni ed il teorema di Carnot o del coseno

In un triangolo qualunque, ogni lato è uguale alla somma delle proiezioni degli altri due lati su di esso.

Con riferimento ai triangoli rettangoli AHB ed AHC di fig. 3 ed alla definizione di coseno di un angolo possiamo scrivere:

$$\cos\beta = \overline{BH}/\overline{BA}$$

$$\cos\gamma = \overline{CH}/\overline{CA}$$

da cui:

$$\overline{BH} = c \cos\beta \quad \text{e} \quad \overline{CH} = b \cos\gamma$$

Essendo:

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} \quad (1)$$

$$a = c \cos\beta + b \cos\gamma$$

tramite sostituzione:

Con riferimento alla fig. 4 possiamo dimostrare che la relazione vale anche nel caso di triangoli ottusangoli, dovendo essere:

$$\overline{BC} = \overline{BH} - \overline{CH} \quad (2)$$

e:

$$\overline{CH} = b \cos(\pi - \gamma) = -b \cos\gamma$$

Per sostituzione nella precedente, la (1) è confermata come anche per tutti gli altri lati, potendo quindi scrivere:

$$a = c \cos\beta + b \cos\gamma$$

$$b = c \cos\alpha + a \cos\gamma$$

$$c = a \cos\beta + b \cos\alpha$$

Se andiamo ora a moltiplicare la prima relazione per a, la seconda per b e la terza per c, otteniamo:

$$a^2 = ac \cos \beta + ab \cos \gamma$$

$$b^2 = bc \cos \alpha + ba \cos \gamma$$

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha$$

sottraiamo da ogni relazione le altre due:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \alpha$$

$$b^2 - c^2 - a^2 = -2ac \cos \beta$$

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cos \gamma$$

da cui:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Le relazioni esprimono il **teorema di Carnot o del coseno**: in un triangolo qualunque, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto della misura di questi ultimi per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

A fronte di un angolo compreso di tipo retto il coseno si annulla e le formule replicano il teorema di Pitagora; più in generale il teorema del coseno traduce in forma algebrica un teorema sull'equivalenza, ovvero: in un triangolo, il quadrato costruito su di un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati “diminuita” del doppio del rettangolo avente per lati il secondo lato del triangolo e la proiezione del terzo lato sul secondo stesso. Il virgolettato sta ad indicare che trattasi di sottrazione quando l'angolo compreso tra il secondo e terzo lato è acuto, diversamente parleremmo di somma.

Formule di Briggs

Queste formule consentono di calcolare gli angoli di un triangolo partendo dalla conoscenza dei lati; dalle formule che descrivono il teorema di Carnot possiamo ricavare il coseno degli angoli di un triangolo qualunque:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Consideriamo ora le formule di bisezione per coseno e seno:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{\sqrt{2}} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{2}}$$

In tali formule andiamo a sostituire l'espressione di $\cos \alpha$ in funzione dei lati del triangolo ed otterremo dopo rapidi passaggi:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)}}{2\sqrt{bc}} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}}{2\sqrt{bc}}$$

Può tornare comodo esprimere le suddette formule in funzione del semiperimetro p ($2p = a + b + c$):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{bc}}$$



Forze Armate e di Polizia

Manuale consigliato per la prova orale di Matematica.

- Indicazioni sul concorso
- Tutto il programma per la prova orale di Matematica

Il volume è indirizzato a quanti intendono partecipare al concorso per l'ammissione all'**Accademia** per la formazione di base degli **Ufficiali dell'Arma dei Carabinieri**, indetto dal Ministero della Difesa, e intendono prepararsi alla prova orale di **Matematica**.

Il testo è articolato in Parti:

Parte I – Diventare Ufficiale dell'Arma dei Carabinieri

La figura dell'Ufficiale dell'Accademia Militare dell'Arma dei Carabinieri, ruoli, compiti, prospettive di carriera; come si svolge il concorso; consigli per la tutela all'inidoneità.

Parte II – Matematica

Trattazione, argomento per argomento, del programma della prova orale di Matematica, per tesi, come previsto dal bando di concorso.



ESTENSIONI ONLINE SOFTWARE DI SIMULAZIONE

Grazie al **software online** accessibile gratuitamente nell'area riservata, previa registrazione, sarà possibile effettuare **infinite esercitazioni**, utili per il ripasso della materia.

Per completare la preparazione

- CC 1.1** Accademia Carabinieri
Prova scritta di preselezione –
Prova di lingua italiana – Prova di lingua inglese
- CC 1.3** Accademia Carabinieri
Prova orale di Storia, Costituzione e cittadinanza italiana, Geografia
- CC 4.0** Arma dei Carabinieri
Prove di efficienza fisica, accertamenti psico-fisici e attitudinali