

Franco Ciccacci

# Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica

III Edizione





**FRANCO CICCACCI**

*Politecnico di Milano*

FONDAMENTI DI  
**FISICA ATOMICA E QUANTISTICA**  
III ED.

Franco Ciccacci  
Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica - III ed.  
Copyright © 2019, EdiSES Università S.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0  
2023 2022 2021 2020 2019

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,  
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

*L'Editore*

*L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere  
il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare  
del copyright e resta comunque a disposizione di tutti  
gli eventuali aventi diritto*

*Stampato presso:* Vulcanica srl Nola - Napoli

*Per conto della*  
EdiSES Università S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli  
Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705

**PREFAZIONE**

<b>1 INTRODUZIONE</b>	
1.1 Quantizzazione ovvero atomismo del mondo	1
1.2 Campi e particelle	5
1.3 Cenni storici: tappe fondamentali	10
<b>2 COMPLEMENTI DI FISICA CLASSICA</b>	
2.1 Formalismo Lagrangiano	13
2.2 Formalismo Hamiltoniano	18
2.3 Distribuzione di Boltzmann ed equipartizione dell'energia	20
2.4 Complementi, applicazioni, esempi	22
2.4.1 Oscillatore armonico 1D	
2.4.2 Sistema di due corpi interagenti con forza centrale; centro di massa	
2.4.3 Particella in campo di forza $\sim r^{-2}$	
2.4.4 Parentesi di Poisson	
2.4.5 Calori specifici	
<b>3 ATOMI, PARTICELLE, RADIAZIONI</b>	
3.1 Atomi: massa e dimensioni	39
3.2 Altre particelle e radiazioni	45
3.3 Sezione d'urto	49
3.4 Modelli atomici	52
3.5 Complementi, applicazioni, esempi	59
3.5.1 Angolo solido	
3.5.2 Misura del numero di Avogadro	
3.5.3 La scoperta di nuove particelle e radiazioni	
3.5.4 Raggio classico dell'elettrone	
3.5.5 Derivazione della formula di Rutherford	
<b>4 LUCE: ONDE ELETTRONAGNETICHE E FOTONI</b>	
4.1 Radiazione termica	71
4.2 Il corpo nero	75
4.3 Dalla formula di Rayleigh-Jeans a quella di Planck	78
4.4 L'effetto fotoelettrico	83
4.5 La diffusione Compton	89
4.6 Onde o particelle?	92
4.7 Complementi, applicazioni, esempi	93
4.7.1 Richiamo sui principali fenomeni ondulatori	
4.7.2 Diffrazione dei raggi X	
4.7.3 Radiazione cosmica di fondo	
4.7.4 Oscillatori quantizzati: da Planck a Einstein	
4.7.5 Congelamento dei gradi di libertà nei calori specifici	
4.7.6 Calore specifico dei solidi	
4.7.7 Derivazione dello spostamento Compton	

<b>5 ATOMO DI BOHR</b>	
5.1 Principi base della spettroscopia	105
5.2 Spettro dell'atomo di idrogeno	106
5.3 Postulati e modello di Bohr	109
5.4 Moto del nucleo	114
5.5 La "vecchia" Fisica dei Quanti	116
5.6 Complementi, applicazioni, esempi	117
5.6.1 Esperimento di Franck ed Hertz	
5.6.2 Regole di quantizzazione di Sommerfeld-Wilson	
5.6.3 Modello atomico di Sommerfeld: effetti relativistici nell'idrogeno	
5.6.4 Atomo di Bohr e principio di corrispondenza	
5.6.5 Sviluppi recenti: atomi di Rydberg e anti-idrogeno	
<b>6 ONDE DI MATERIA</b>	
6.1 Lunghezza d'onda di de Broglie	127
6.2 Difrazione degli elettroni	130
6.3 Dualismo onda-particella	132
6.4 Pacchetti d'onda	143
6.5 Princípio di indeterminazione di Heisenberg	147
6.6 Complementi, applicazioni, esempi	154
6.6.1 Lunghezza d'onda di de Broglie e atomo di Bohr	
6.6.2 Il microscopio elettronico	
6.6.3 Natura ondulatoria delle particelle: esperimenti moderni	
6.6.4 Princípio di indeterminazione e stati legati	
6.6.5 Princípio di indeterminazione e stati eccitati	
6.6.6 Particelle instabili	
<b>7 FUNZIONE D'ONDA</b>	
7.1 Equazione per le onde di materia	163
7.2 Interpretazione della funzione d'onda	166
7.3 Proprietà della funzione d'onda	169
7.4 Valori di aspettazione	171
7.5 Osservabili e operatori	174
7.6 Funzione d'onda nello spazio dei momenti	179
7.7 Complementi, applicazioni, esempi	181
7.7.1 Densità di corrente di probabilità	
7.7.2 Limite classico: teorema di Ehrenfest	
7.7.3 La delta di Dirac	
7.7.4 Commutatori notevoli	
<b>8 AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI</b>	
8.1 Equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo	191
8.2 Stati stazionari	193
8.3 Problema agli autovalori per particella confinata su segmento	197
8.4 Espansione sulla base delle autofunzioni	204
8.5 Quantizzazione dell'energia	206

8.6	Autofunzioni del momento e particella libera	208
8.7	Complementi, applicazioni, esempi	215
8.7.1	Effetti gravitazionali in Fisica dei Quanti	
8.7.2	Buca infinita e onde su corda	
8.7.3	Particella confinata in 1D: limite classico e densità di stati	
8.7.4	Normalizzazione nella scatola	
<b>9</b>	<b>PROBLEMI UNIDIMENSIONALI</b>	
9.1	Fenomeni ondulatori per particelle	223
9.2	Gradino di potenziale	226
9.3	Barriera di potenziale	235
9.4	Buca di potenziale di profondità finita	239
9.5	Oscillatore armonico	242
9.6	Complementi, applicazioni, esempi	246
9.6.1	Onde piane e flusso di probabilità	
9.6.2	Esempi di effetto tunnel	
9.6.3	Limite classico per l'oscillatore armonico	
9.6.4	Soluzione dell'equazione per l'oscillatore armonico	
<b>10</b>	<b>SISTEMI 3D E ATOMO DI IDROGENO</b>	
10.1	Funzione d'onda in tre dimensioni	255
10.2	Particella confinata in una scatola	256
10.3	Particelle libere e densità di Stati in 3D	259
10.4	Campo centrale	263
10.5	Armoniche sferiche	268
10.6	Momento angolare	273
10.7	Equazione di Schrödinger per l'atomo di idrogeno	280
10.8	Atomo di idrogeno: autovalori e autofunzioni	284
10.9	Complementi, applicazioni, esempi	293
10.9.1	Modello degli elettroni liberi nei metalli	
10.9.2	Problema dei due corpi in meccanica quantistica	
10.9.3	Hamiltoniana in campo centrale: caso classico e quantistico	
10.9.4	Polinomi e funzioni associate di Legendre	
\	10.9.5 Armoniche sferiche in forma reale	
	10.9.6 Armoniche sferiche e simmetria sferica	
	10.9.7 Rotatore rigido	
	10.9.8 Gas nobili e atomi alcalini	
<b>11</b>	<b>FORMALISMO DELLA TEORIA DEI QUANTI</b>	
11.1	Misura: incertezza e perturbazione	307
11.2	Misure ideali e stati quantistici	309
11.3	Aampiezza di probabilità	312
11.4	Osservabili e insieme completo di ampiezze	315
11.5	Spazi vettoriali: ket e bra	317
11.6	Interpretazione statistica generalizzata	326
11.7	Teoria delle rappresentazioni:	

11.7.1	Operatori con spettro discreto	334
11.7.2	Operatori con spettro continuo: spazi funzionali	338
11.7.3	Rappresentazione posizione	340
11.7.4	Rappresentazione momento	346
11.8	Evoluzione temporale	349
11.9	Sommario dei postulati	352
11.10	Complementi, applicazioni, esempi	353
11.10.1	Sistema a due livelli	
11.10.2	Sistema a simmetria sferica	
11.10.3	Autovalori del momento angolare con metodi operatoriali	
11.10.4	Operatori innalzamento e abbassamento per l'oscillatore armonico	
11.10.5	Dimostrazione del principio di indeterminazione generalizzato	
11.10.6	Operatore momento nella rappresentazione posizione	
<b>12</b>	<b>SPIN</b>	
12.1	Spire e dipoli magnetici	371
12.2	Dipoli magnetici elementari: esperimento di Stern e Gerlach	376
12.3	Spin 1/2	386
12.4	Somma di momenti angolari	389
12.5	Momento angolare totale	393
12.6	Complementi, applicazioni, esempi	394
12.6.1	Esperimenti SG in serie	
12.6.2	Elettrone in campo magnetico	
12.6.3	Effetto Einstein-de Haas	
12.6.4	Spin del fotone e regola di selezione per $j$	
<b>13</b>	<b>SISTEMI CON PIU' PARTICELLE</b>	
13.1	Approssimazione di particelle indipendenti	403
13.2	Indistinguibilità di particelle identiche	407
13.3	Bosoni e fermioni	410
13.4	Obbligo di simmetrizzazione e spin	411
13.5	Complementi, applicazioni, esempi	414
13.5.1	Distanza media tra particelle indistinguibili	
13.5.2	Determinanti di Slater	
<b>14</b>	<b>ATOMI A MOLTI ELETTRONI</b>	
14.1	Impostazione del problema	419
14.2	Atomo di elio e interazione di scambio	422
14.3	Approssimazione di campo centrale	430
14.4	Sistema periodico degli elementi chimici	437
14.5	Metodo autoconsistente di Hartree	444
14.6	Spettri di emissione di raggi X	449
14.7	Complementi, applicazioni, esempi	454
14.7.1	Correzione al prim'ordine delle energie per l'atomo di He	
14.7.2	Spin e antisimmetria per il campo centrale: metodo di Hartree-Fock	
14.7.3	Spettri di assorbimento di raggi X	

<b>15. INTERAZIONE ATOMO-RADIAZIONE E.M.</b>	
15.1 Campo di radiazione nel vuoto	463
15.2 Particella carica in campo elettromagnetico	466
15.3 Teoria quantistica dell'interazione radiazione materia	469
15.4 Assorbimento ed emissione	475
15.5 Elemento di matrice e regole di selezione	478
15.6 Complementi, applicazioni, esempi	482
15.6.1 Interazione radiazione-materia: modello dell'oscillatore di Lorentz	
15.6.2 Sistema a due livelli: coefficienti di Einstein	
15.6.3 Integrazione sugli angoli, regole di selezione e spin del fotone	
15.6.4 Regola d'oro, pacchetti d'onda e transizioni nel continuo	
15.6.5 Utilità dell'allargamento di riga: raffreddamento laser.	
<b>16. MULTIPLETTI E STRUTTURA FINE</b>	
16.1 Oltre l'approssimazione di campo centrale	497
16.2 Interazione spin-orbita	498
16.3 Accoppiamento LS e regole di Hund	503
16.4 Complementi, applicazioni, esempi	508
16.4.1 Il doppietto giallo del sodio	
16.4.2 Struttura fine dell'idrogeno	
16.4.3 Momento di dipolo magnetico totale e fattore di Landè	
16.4.4 Livelli energetici dell'atomo di carbonio	

**APPENDICE A MECCANICA STATISTICA CLASSICA**

**APPENDICE B MECCANICA STATISTICA QUANTISTICA**

**APPENDICE C RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE**

**BIBLIOGRAFIA**

**INDICE ANALITICO**

**COSTANTI FISICHE FONDAMENTALI**

## Prefazione

*Questo libro, ormai giunto alla terza edizione, nasce dall'esperienza maturata in molti anni di insegnamento in corsi dedicati all'introduzione dei concetti base della fisica moderna rivolti agli studenti della Laurea Triennale delle Facoltà di Ingegneria. Si tratta in particolare dell'elaborazione di note preparate per diversi corsi che si sono susseguiti negli anni sotto vari titoli (Fondamenti di Meccanica Quantistica, Fondamenti di Fisica della Materia, Struttura della Materia, Introduzione alla Fisica dei Quanti) e che ho tenuto per gli studenti del Corso di Sudi in Ingegneria Fisica presso il Politecnico di Milano.*

*L'utenza di riferimento è costituita da studenti universitari che siano già stati sufficientemente esposti a corsi di fisica di base, da cui ci aspetta una discreta conoscenza dei fondamenti della meccanica (del punto e dei sistemi) della termodinamica, dell'elettromagnetismo e ottica, dei fenomeni ondulatori in genere. Per quanto riguarda le conoscenze matematiche, è sufficiente una discreta familiarità con i numeri complessi, l'algebra lineare e il calcolo differenziale e integrale, anche se al solito conoscenze ulteriori (equazioni differenziali, analisi di Fourier, spazi funzionali), pur se non necessarie, risultano senz'altro utili. Poiché in ogni caso ci si rivolge a studenti relativamente alle prime armi, si è scelto di dare un'impostazione molto fenomenologica alla trattazione, privilegiando per quanto possibile gli aspetti sperimentali e introducendo i concetti quantistici in maniera molto graduale.*

*Il libro si apre con un capitolo introduttivo in cui le idee quantistiche vengono presentate in una prospettiva storica, volto sia a richiamare i fenomeni classici rilevanti che a familiarizzare con il radicale cambiamento della visione del mondo imposto dalle nuove scoperte e relative interpretazioni teoriche. Segue un capitolo dedicato ai metodi e risultati della fisica classica (formalismo lagrangiano e hamiltoniano, teorema dell'equipartizione dell'energia), tradizionalmente non coperti nei corsi di fisica di base. Nonostante il taglio volutamente semplificato e non formale (o forse proprio per questo), ritengo che la presenza di tali argomenti, per quanto solo accennati, sia utile per favorire la comprensione delle tematiche più propriamente di fisica dei quanti affrontate nel seguito.*

*L'impostazione fenomenologica torna protagonista nel Cap. 3, dedicato alla discussione del concetto di atomo, basata sull'analisi di numerosi fatti sperimentali. Lo stesso vale per il successivo Cap. 4, in cui, dopo aver discusso la termodinamica della radiazione (altro argomento che tradizionalmente ha sempre faticato a trovare spazio nei corsi di base) e il corpo nero, si introduce il concetto di fotone e si affronta il problema del dualismo onda-particella. Il Cap. 5 tratta in dettaglio del modello atomico di Bohr, uno dei massimi risultati dell'approccio fenomenologico, e si chiude con una discussione sulla “vecchia fisica dei quanti”, che per quanto ormai superata permette tuttavia una visualizzazione dei vari fenomeni e processi, a mio modo di vedere molto utile per chi affronta temi quantistici per la prima volta, come appunto il pubblico cui il libro è rivolto.*

*La meccanica quantistica vera e propria, nella formulazione di meccanica ondulatoria, viene affrontata nei successivi cinque capitoli, con il Cap. 6, contenente la descrizione ondulatoria della materia a partire dall'ipotesi di de Broglie e il Cap. 7, dedicato alla funzione d'onda, all'equazione di Schrödinger e a una prima discussione del concetto di operatore. Nel Cap. 8 partendo dall'equazione di Schrödinger non dipendente del tempo si introducono a livello esemplificativo autofunzioni e autovalori, mentre nel Cap. 9 vengono discussi semplici ma rilevanti problemi unidimensionali. Si passa poi al caso tridimensionale nel Cap. 10, in cui vengono trattati in particolare i sistemi a simmetria sferica introducendo l'operatore momento angolare. Nello stesso capitolo, si riprende anche lo studio degli atomi, fornendo una giustificazione teorica basata sull'equazione di Schrödinger dei risultati del modello di Bohr e discutendo le funzioni d'onda per l'atomo di idrogeno e idrogenoidi. A questo punto, quando il lettore dovrebbe aver acquisito un certo grado di familiarità con i concetti quantistici, viene presentato nel Cap. 11 il formalismo generale della teoria dei quanti. Questa è la parte in cui la presente edizione più si discosta da quelle precedenti, essendo caratterizzata da un maggior spazio dato al formalismo e in particolare all'uso della notazione di Dirac con ket e bra. Lo scopo è quello di mettere in risalto come la descrizione del sistema basata sulla funzione d'onda non sia univoca ma solo una delle possibili (quella in cui si sceglie la rappresentazione posizione) e che altre rappresentazioni (per esempio quelle matriciali) possono risultare più utili, come succede molto spesso nelle applicazioni più avanzate. Questa scelta ha comportato l'introduzione di molti concetti*

*in maniera esemplificativa già nei primi capitoli (autofunzioni e autovalori, funzione d'onda nello spazio dei momenti, proprietà dei commutatori, interpretazione statistica generalizzata). Concetti che vengono poi ripresi e inquadrati nel contesto generale del formalismo degli spazi vettoriali e funzionali nel Cap. 11, che è stato completamente riscritto. Anche in questo caso, fedele all'impostazione fenomenologica, si è tenuto a sottolineare come l'introduzione di nuovi concetti e relativi strumenti matematici sia strettamente legata al processo di misura: è essenziale prendere atto dei limiti e delle possibilità dell'indagine sperimentale, che è alla base di ogni discorso di tipo scientifico.*

*Lo spin, nuova grandezza puramente quantistica senza analogo classico, viene introdotto nel successivo Cap. 12, mentre i sistemi a molte particelle sono l'oggetto del Cap. 13, in cui vengono analizzate le conseguenze dell'indistinguibilità delle particelle. Gli atomi a molti elettroni nell'approssimazione di campo centrale sono l'oggetto del Cap. 14, in cui si arriva a discutere e giustificare la tavola periodica degli elementi chimici. Nel successivo Cap. 15 viene trattata con un certo dettaglio l'interazione radiazione materia, le transizioni ottiche e le conseguenti regole di selezione. Il Cap. 16 è infine dedicato agli effetti che vanno oltre l'approssimazione di campo centrale: struttura a multipletti e struttura fine, in cui trova spazio la discussione dell'interazione spin-orbita. Il libro contiene numerosi esempi, in buona parte numerici, in cui, tra l'altro, si è cercato di sottolineare l'importanza dei conti quantitativi, con l'obiettivo di richiamare l'attenzione degli studenti su questo aspetto troppo spesso trascurato, ritenendo essenziale che ci si renda conto del valore numerico dei risultati, almeno come ordine di grandezza. Approfondimenti vari vengono poi trattati nel paragrafo “Complementi, applicazioni, esempi” che chiude ogni capitolo.*

*Il materiale qui presentato copre una serie di argomenti di fisica atomica e quantistica che possono essere trattati a un buon livello di approfondimento in un corso da 10 crediti formativi unitari (o cfu, l'unità di misura per i corsi universitari introdotta dalla riforma del 2000). Questo è il caso del corso di Laurea Triennale in Ingegneria Fisica al Politecnico di Milano, che prevede appunto un corso da 10 cfu dedicato a queste tematiche (al secondo semestre del secondo anno), il cui programma ricalca il contenuto del presente libro. A seconda delle esigenze didattiche, si può anche utilizzare solo la prima parte del volume (orientativamente i primi 9 capitoli) per un*

*corso introduttivo da 5 cfu, che possa servire o come unica esposizione alle idee moderne della fisica (auspicabile per tutti i corsi di Laurea a carattere scientifico-tecnologico in genere e di Ingegneria in particolare), oppure come primo avvicinamento in vista di corsi ulteriori.*

*Argomenti di sicuro interesse, quali la meccanica statistica classica e quantistica, presenti nella prima versione del libro, ma non più parte del programma del corso come si è andato strutturando negli ultimi anni, sono stati rimossi dal testo vero e proprio: la loro trattazione è riportata per motivi di completezza in Appendice, che include anche una parte dedicata a richiami di algebra lineare. È poi previsto un minimo di bibliografia, scelta con criteri del tutto personali tra le opere di più facile accesso, per chi volesse andarsi a rivedere concetti appena richiamati oppure approfondire gli argomenti trattati o in ogni caso guardarli da un altro punto di vista. Infine, si è cercato di porre (parziale) rimedio a uno dei difetti più evidenti della prima edizione (l'assenza di problemi con relativa soluzione) con la pubblicazione di un altro breve testo anch'esso edito da EdiSES (F. Ciccacci, A. Benfenati, R. Farinaro: *Introduzione alla Fisica dei Quanti: Temi d'esame risolti*), in cui sono riportate le soluzioni a numerosi problemi tratti da temi di esame da me preparati negli scorsi anni, e che costituisce un naturale completamento del presente libro.*

*Milano, Novembre 2019*



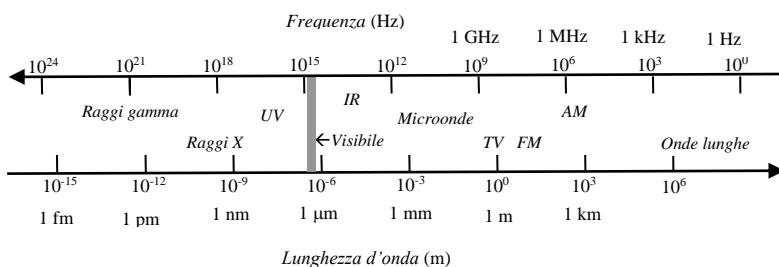
## 4. LUCE: ONDE ELETTROMAGNETICHE E FOTONI

### 4.1 Radiazione termica

Come detto più volte, lo spartiacque tra fisica classica e fisica dei quanti è rappresentato dal lavoro di Planck sulla radiazione emessa dal corpo nero, cioè su un ambito piuttosto specialistico e abbastanza marginale al giorno d'oggi (vedremo però che *non è* proprio così). Per comprendere questa problematica è necessario affrontare almeno qualitativamente lo studio della *termodinamica della radiazione*, un problema molto in voga per tutta la seconda metà dell'Ottocento. Alla base di tale interesse, come sempre, c'erano anche motivazioni di tipo applicativo-tecnologico, come quelle relative alla misura e controllo della temperatura nelle fornaci e nei forni (per esempio gli altiforni per produzione di acciai, che alimentavano la rivoluzione industriale), nonché la necessità di sviluppare nuove sorgenti di radiazione. La termodinamica della radiazione si occupa di quel tipo di radiazione le cui caratteristiche dipendono solo dalla temperatura  $T$  della sorgente che le emette, proprietà che definisce appunto la *radiazione termica*, e quindi governate da considerazioni di tipo termodinamico-statistico. E' ben precisare che ciò non è affatto vero sempre, per citare solo alcuni casi non vale ad esempio né per i laser o per le stazioni radio, per l'emissione dalla scarica nei gas, o quella di fluorescenza. Nei casi più comuni, la radiazione termica cade in gran parte nella regione spettrale dell'infrarosso.

---

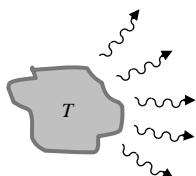
**Esempio 4.1: spettro della radiazione elettromagnetica.** Prima di procedere oltre, è bene richiamare lo spettro delle onde elettromagnetiche, con nomenclatura nonché ordini di grandezza delle frequenze  $\nu$  e delle lunghezze d'onda  $\lambda$  nelle varie regioni spettrali, ricordando che vale la relazione  $\lambda \nu = c$ , con  $c$  velocità della luce (che nel vuoto vale  $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ).



**Figura 4.1:** Spettro delle onde elettromagnetiche; notare che le scale sono logaritmiche.

La porzione visibile dello spettro copre l'intervallo 400÷700 nm in lunghezza d'onda (dal violetto al rosso); scendendo in lunghezza d'onda troviamo i raggi ultravioletti (UV), poi quelli X ( $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$ ) e infine i raggi  $\gamma$  ( $\lambda \sim 0.01 \text{ \AA}$ ). Nell'altra direzione abbiamo l'infrarosso (IR), le microonde ( $\lambda \sim 1 \text{ cm}$ ), le onde TV, quelle radio (FM e poi AM) e infine le onde lunghe ( $\lambda \sim 10^6 \text{ m}$ ).

Un corpo caldo, cioè portato a una temperatura  $T$  superiore a quella ambiente, emette onde elettromagnetiche a diverse  $\nu$  (e  $\lambda$ ): è il noto processo di *irraggiamento* mediante il quale il corpo ritorna all'equilibrio raffreddandosi. Se la radiazione emessa è nel visibile (almeno in parte non insignificante) può essere vista dall'occhio umano, come nel caso di un pezzo di rame a  $600^\circ\text{C}$  (cioè 873 K) che appare rossiccio, altrimenti si deve ricorrere ad altri tipi di rivelatori. Per esempio il corpo umano ( $T \sim 310 \text{ K}$ ) emette radiazione principalmente nell'IR intorno a  $10 \mu\text{m}$ , e quindi visibile solo con opportuni rivelatori IR (usati ad esempio in ambito militare).



**Figura 4.2** Irraggiamento da un corpo caldo.

Cominciamo col definire alcune grandezze necessarie per un'analisi quantitativa. Fissata la temperatura, la potenza  $dW$  emessa dal corpo per unità di superficie nell'intervallo di frequenze  $\nu \div \nu + d\nu$  vale

$$dW = e(\nu, T) d\nu \quad (4.1),$$

relazione che definisce il *potere emissivo*  $e(\nu, T)$ . Se poi il corpo è investito da radiazione proveniente dal mondo esterno, parte ne assorbe ( $a$ ), parte ne trasmette ( $t$ ) parte ne riflette ( $r$ ). Il *potere assorbente*  $a(\nu, T)$  è definito proprio come la frazione di potenza che il corpo assorbe dall'ambiente esterno: si tratta di una quantità adimensionale ed essendo ovviamente  $a + r + t = 1$ ,  $a(\nu, T) \leq 1$ . Se il corpo è più caldo dell'ambiente circostante,  $T_{\text{corpo}} > T_{\text{ambiente}}$ , allora emette più di quanto assorbe (e nel farlo si raffredda), e viceversa; all'equilibrio termico c'è bilancio energetico tra emissione e assorbimento: in tale condizione il corpo non è più visibile, cioè distinguibile dall'ambiente (un uomo a bagno in acqua calda è invisibile anche per militari con sofisticati rivelatori nell'infrarosso).

A partire da queste definizioni e con ragionamenti di tipo puramente termodinamico, e quindi del tutto generali, intorno al 1860 Kirchhoff arriva a dimostrare che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T) \quad (4.2),$$

dove  $f(\nu, T)$  è una *funzione universale* indipendente dai dettagli specifici dei singoli materiali e/o delle configurazioni sperimentali. Il teorema afferma in pratica che *un corpo emette solo le frequenze che è in grado di assorbire*: là dove il potere assorbente è piccolo deve esserlo anche quello emissivo per mantenere costante il rapporto.

Nella seconda metà dell'Ottocento si registrano notevoli progressi in questo campo anche dal punto di vista sperimentale. Nel 1879, sulla base di accurate misure, Stefan osservò che la potenza totale  $W$  emessa da un corpo caldo dipende fortemente dalla sua temperatura, risultando proporzionale, oltre che alla superficie del corpo  $S$ , alla quarta potenza di  $T$ . Poco dopo, nel 1884, Boltzmann diede una motivazione termodinamica per tale andamento, giustificando l'aggiunta del suo nome alla legge nota come *legge di Stefan-Boltzmann* (SB)

$$W = \sigma S T^4 \quad (4.3),$$

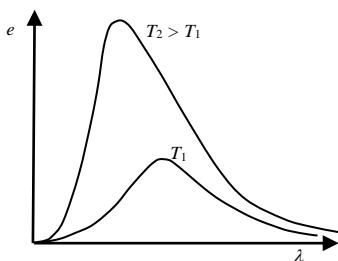
in cui compare la costante di proporzionalità  $\sigma$ , detta appunto costante di SB, il cui valore (sperimentale) è  $\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ . La legge di SB non dice nulla sull'andamento spettrale della radiazione emessa, infatti dalla definizione (4.1) si trova che, superficie emittente a parte, la potenza totale emessa è pari all'integrale su tutte le frequenze del potere emissivo

$$W = S \int_0^{\infty} e(\nu, T) d\nu \quad (4.4)$$

La dipendenza dalla frequenza, cioè il colore, della radiazione emessa è invece al centro della legge ricavata da Wien nel 1893, che interpreta i dati sperimentali che si vanno via via accumulando basandosi anche in questo caso su argomenti termodinamici. La legge di Wien afferma che la temperatura del corpo è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda per cui si ha il massimo di emissione:

$$\lambda_{\max} T = \text{costante} \quad (4.5).$$

La costante presente nella (4.5) vale circa  $3000 \mu\text{m} \times \text{K}$ , di modo che per avere il picco di emissione nel visibile ( $\lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$ ) la temperatura del corpo deve essere  $\sim 6000 \text{ K}$ , una temperatura tipica della superficie delle stelle. In pratica aumentando la temperatura un corpo emette molto di più (con la quarta potenza di  $T$ ) ed emette a  $\lambda$  più piccole: solo se sufficientemente caldo (tipicamente  $T \geq 600^\circ\text{C}$ ) emette qualcosa nel visibile (anche se il picco è nell'infrarosso). Tutte queste informazioni sono contenute nel grafico in funzione della frequenza (ossia lo *spettro*) della funzione  $e(\nu, T)$ . Molto spesso, per motivi sperimentali è più conveniente lavorare con le lunghezze d'onda invece che con le frequenze, per cui tale spettro è espresso dalla funzione  $e(\lambda, T)$ , cioè dall'emissività specifica compresa nell'intervallo  $\lambda \div \lambda + d\lambda$ , legata alla funzione precedente da  $e(\nu, T)d\nu = -e(\lambda, T)d\lambda$ , dove il segno meno deriva dal fatto che se la frequenza cresce la lunghezza d'onda diminuisce (cioè  $d\nu$  e  $d\lambda$  hanno segni opposti). Questa funzione ha un tipico andamento a campana, come mostrato in maniera del tutto qualitativa in Fig. 4.3 a due diverse temperature.



**Figura 4.3** Andamento qualitativo della potenza emessa da un corpo caldo in funzione della lunghezza d'onda a due diverse temperature.

Al crescere della temperatura cresce di molto l'area sotto la curva, cioè la potenza totale emessa, come dalla (4.3), mentre il massimo si sposta verso lunghezze d'onda minori, come dalla (4.5).

---

**Esempio 4.2: l'effetto serra.** E' ben noto che è possibile coltivare piante e fiori che in genere richiedono bel tempo e temperature primaverili-estive anche in periodi dell'anno o climi non particolarmente adatti, utilizzando le *serre*. Si tratta di coprire la zona coltivata con teloni di plastica o, in caso di grandi produzioni, con strutture similari più sofisticate, che lascino passare la radiazione solare. Il funzionamento delle serre si spiega proprio in termini dell'andamento spettrale della radiazione termica. Brevemente, il Sole ha una temperatura superficiale di circa  $6000 \text{ K}$  e quindi emette onde elettromagnetiche con un gran contributo delle lunghezze d'onda nella regione del visibile (Fig. 4.3), regione in cui la plastica è trasparente, e quindi la

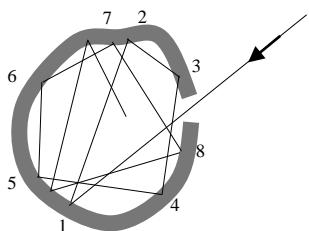
radiazione passa e arriva sulla terreno sottostante riscaldandolo. Anche quest'ultimo emette a sua volta radiazione ma, essendo a temperatura molto più bassa ( $\sim 300$  K) il grosso dell'emissione è a lunghezze d'onda molto maggiori, in una regione in cui la plastica è invece fortemente assorbente: la radiazione non passa più e l'energia rimane intrappolata sotto il telone. In pratica all'interno della serra entra più energia di quanta ne esca: il tutto si riscalda e noi possiamo mangiare pomodori anche d'inverno. Lo stessa cosa accade anche alla Terra presa come un tutto in cui l'atmosfera svolge il ruolo del telo di plastica. La temperatura terrestre infatti è molto maggiore di quella che si avrebbe senza atmosfera, come succede sui pianeti che ne sono privi. Attualmente pare che l'aumento a livello globale dei cosiddetti *gas serra* (soprattutto CO<sub>2</sub>) di origine antropica, cioè generati da attività umane, stia provocando un riscaldamento del pianeta.

## 4.2 Il corpo nero

Con riferimento alla (4.2), è evidente che se trovassimo un corpo tale da assorbire tutto a tutte le frequenze, caratterizzato cioè da

$$a(\nu, T) = 1 \quad \forall \nu \quad \text{e} \quad \forall T \quad (4.6),$$

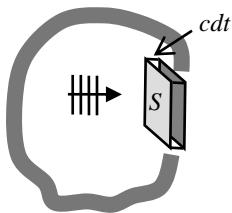
allora il suo potere emissivo sarebbe proprio uguale alla funzione universale  $f$ . E' qui che entra in gioco il *corpo nero*. Il corpo nero è appunto definito dalla relazione (4.6), e la sua importanza risiede proprio nel carattere universale delle sue proprietà. Un corpo che assorbe tutto non riflette nulla della luce che vi incide, e quindi appare appunto *nero*. Come spesso accade in fisica, si tratta di un concetto limite, nel senso che nessun sistema fisico è un corpo nero perfetto, ma molti ci si avvicinano con ottima approssimazione, e realizzarne uno in pratica è abbastanza facile. Consideriamo, infatti, una cavità con piccolo foro che la collega con l'esterno (Fig. 4.4).



**Figura 4.4.** Modello di corpo nero: un piccolo foro mette in comunicazione la cavità con l'esterno.

La luce che entra prima di riemergere dovrà subire numerose riflessioni sulle pareti interne della cavità. In ogni singola riflessione la radiazione viene, almeno in parte, assorbita dalle pareti stesse: moltiplicando per il gran numero di riflessioni risulta evidente che alla fine verrà assorbita praticamente tutta. Tra l'altro questo è il motivo per cui una grotta o una stanza vista da fuori appare buia (sempre che non ci siano

sorgenti di luce all'interno, ovviamente). Quanto più è piccolo il foro d'ingresso rispetto alle dimensioni della cavità tanto migliore è l'approssimazione di corpo nero. Questo è quindi il modello di corpo nero che utilizzeremo, in particolare consideriamo che la cavità e le pareti siano mantenute a una temperatura costante: in tal caso ci sarà equilibrio termico tra la radiazione emessa e quella assorbita dalle pareti, in una situazione dinamicamente uniforme, cioè proprio la situazione cui si applicano bene i metodi della termodinamica e della meccanica statistica. In tale condizioni all'interno della cavità ci sarà un'energia associata alle onde elettromagnetiche uniforme e costante, che dipenderà solo dalla temperatura del sistema. Si definisce densità di energia spettrale del corpo nero (detta anche *spettro del corpo nero*, notazione che per brevità useremo spesso) la funzione  $u(\nu, T)$ , tale che  $u(\nu, T)d\nu$  rappresenti l'energia per unità di volume all'interno della cavità compresa nell'intervallo  $\nu \div \nu + d\nu$ . La radiazione emessa da un corpo nero (per esempio dalla bocca di un forno mantenuto ad alta temperatura) è ovviamente direttamente legata alla densità di energia presente nella cavità. Esiste infatti una relazione diretta tra la funzione universale  $f(\nu, T)$ , cioè il potere emissivo del corpo nero, e la funzione  $u(\nu, T)$ . Poiché la radiazione viaggia a velocità  $c$ , nell'intervallo di tempo  $dt$  attraverso la superficie  $S$  passa una quantità di energia pari a quella contenuta nel volume  $Scdt$ , cioè  $uScdt$ , come mostrato in Fig. 4.5.



**Figura 4.5.** Radiazione uscente dalla bocca della cavità che costituisce il corpo nero.

La potenza emessa per unità di superficie a frequenza  $\nu \div \nu + d\nu$  sarà pertanto:

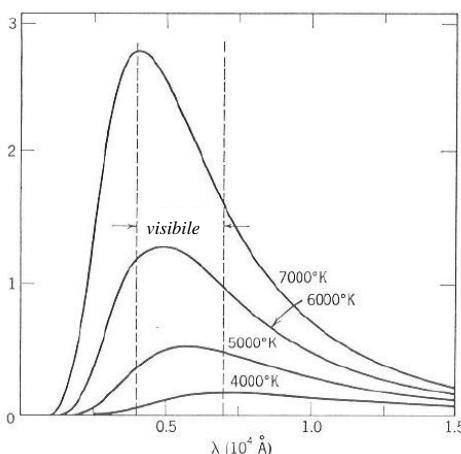
$$dW = \frac{S c dt u(\nu, T) d\nu}{S dt} = c u(\nu, T) d\nu \quad (4.7),$$

il confronto con la (4.1) permette l'identificazione del poter emissivo  $e(\nu, T)$  del corpo nero, ossia la funzione universale  $f(\nu, T)$ , con la  $u(\nu, T)$  moltiplicata per la velocità della luce. In realtà le cose sono un po' più complicate in quanto bisogna tener conto che non tutta la radiazione viaggia in direzione perpendicolare alla superficie, come

assunto in Fig. 4.5, e che ci sono anche onde che vanno in verso opposto. Il tener conto di ciò, che si fa con opportune medie su termini di tipo coseno su cui non vale la pena dilungarsi, introduce un fattore  $\frac{1}{4}$  nella relazione di sopra, ottenendo infine

$$\text{funzione universale } f(\nu, T) = e_{\text{c.n.}}(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) \quad (4.8),$$

Anche in questo caso risulta spesso utile lavorare con le lunghezze d'onda: lo spettro del corpo nero è dato allora dalla funzione  $u(\lambda, T)$ , cioè la densità di energia compresa nell'intervallo  $\lambda \div \lambda + d\lambda$ . La funzione  $u(\lambda, T)$  è mostrata in Fig. 4.6.



**Figura 4.6.** Spettro del corpo nero (le unità sono  $J/m^3$ ) in funzione della lunghezza d'onda, a varie temperature. La potenza emessa dal corpo per unità di superficie e di lunghezza d'onda si ottiene moltiplicando per  $c/4$ .

Risulta a questo punto chiara l'importanza del corpo nero: una volta noto il suo spettro sappiamo praticamente tutto sull'irraggiamento. Per esempio misurando la radiazione emessa da un corpo qualunque, e conoscendo quindi il suo potere emissivo, dalla (4.8) possiamo immediatamente conoscere anche come assorbe la radiazione elettromagnetica a tutte le temperature e a tutte frequenze (o meglio a quelle per cui si è misurata l'emissione):

$$a = \frac{e}{f} = 4 \frac{e}{c u} \quad \forall \nu \quad \text{e} \quad \forall T$$

Oppure si può sfruttare la conoscenza dello spettro del corpo nero per misurare la temperatura di un corpo senza neanche entrarci in contatto: proprio su questo principio è basato il *pirometro*, uno strumento che permette di misurare la temperatura di un corpo a distanza. Nel far ciò, è bene però ricordare che un corpo qualunque emette molto

meno di un corpo nero alla stessa temperatura, dato che il suo potere assorbente è senz’altro minore di uno.

Passiamo ora, dopo averne discusso l’importanza, a discutere l’espressione dello spettro del corpo nero, cioè la funzione  $u(\nu, T)$ , che ricordiamo essere la densità spettrale di energia contenuta in una cavità le cui pareti sono a temperatura costante. Come notato sopra, all’equilibrio termico lo scambio di energia tra pareti e cavità fa sì che in quest’ultima ci sia una certa quantità di energia associata al campo elettromagnetico delle onde ivi presenti: la densità di energia presente tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} u(\nu, T)d\nu &= \\ &= \frac{1}{V} \times (\text{numero di onde in } \nu \div \nu + d\nu) \times (\text{energia media di ciascuna}) \end{aligned} \quad (4.9),$$

dove  $V$  è il volume della cavità. Vediamo quindi che per il calcolo sono necessari due termini: il conteggio di numero di onde indipendenti e l’energia media trasportata da ogni singola onda.

### 4.3 Dalla formula di Rayleigh-Jeans a quella di Planck

Il problema di contare il numero di onde indipendenti presenti in una cavità (primo termine nella 4.9) si presenta molto spesso in fisica, sotto le diverse terminologie di onde stazionarie nelle cavità risonanti, densità di stati, *analisi dei modi normali*<sup>1</sup>. Rientrano in questa categoria, per esempio, le onde stazionarie su corda, gli studi sulla generazione dei suoni negli strumenti musicali (onde sonore), sulle cavità e dispositivi a microonde oppure laser (onde elettromagnetiche), sugli stati elettronici nei metalli (onde di materia, o meglio *funzioni d’onda*, onde di cui ci occuperemo diffusamente nel corso del libro). Rimandando al Par. 9.3 per un calcolo dettagliato, si trova che le onde indipendenti sono caratterizzate da un vettore d’onda  $k$  che può assumere solo determinati valori (risulta cioè quantizzato), con una spaziatura  $\delta$  inversamente proporzionale alle dimensioni lineari  $L$  della cavità in cui le onde sono confinate.

Se, per fissare le idee, consideriamo una cavità con  $L = 10$  cm, si ha  $\delta \sim 10 \text{ m}^{-1}$ , d’altra parte per onde elettromagnetiche nel visibile  $\lambda \sim 0.6 \text{ }\mu\text{m}$  e  $k = 2\pi/\lambda \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ , da cui si

---

<sup>1</sup> I termini onde indipendenti, onde stazionarie e modi normali di vibrazione vengono usati in maniera del tutto intercambiabile, cioè come fossero sinonimi.

vede che la spaziatura è molto piccola rispetto ai tipici valori del vettore d'onda (ci sono 6 ordini di grandezza). Ci troviamo perciò nella condizione descritta alla fine del Par. 1.1 e possiamo trattare la variabile  $k$  come se fosse continua; inoltre la sua variazione anche molto piccola (al limite infinitesima,  $dk$ ) può ancora risultare molto maggiore della spaziatura,  $dk \gg \delta$ . Si può quindi definire una funzione continua  $\mathcal{D}(k)$ , detta *densità di stati* nello spazio  $k$ , tale che  $\mathcal{D}(k)dk$  fornisce il numero di onde indipendenti nell'intervallo  $k \div k + dk$ . Per un sistema di onde libere in una cavità tridimensionale di volume  $V$  risulta (*cf.* Par. 10.3)

$$\mathcal{D}(k) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \quad (4.10),$$

Questo risultato va poi moltiplicato per un fattore 2 per tener conto delle due direzioni indipendenti del campo elettromagnetico nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione (si ricordi che le onde e.m. sono trasversali!), corrispondenti alle due polarizzazioni lineari ortogonali.

Volendo infine lavorare in termini di frequenze invece che di vettori d'onda, tenendo presente la relazione  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ , possiamo scrivere con ovvio significato dei termini:

$$\mathcal{D}(\nu)d\nu = \mathcal{D}(k)dk = 2 \times \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} \left( \frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \frac{2\pi}{c} d\nu = V \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (4.11),$$

da cui otteniamo il primo dei due ingredienti richiesti nella (4.9).

Il secondo ingrediente della (4.9) è l'energia media associabile a ciascuna delle onde indipendenti presenti nella cavità, all'interno della quale la radiazione è continuamente emessa e assorbita dalle pareti, in modo da assicurare l'equilibrio termico. Come noto, le onde elettromagnetiche sono emesse da cariche accelerate e il sistema più semplice cui si può pensare come emettitore (e assorbitore) è il dipolo elettrico oscillante. Le pareti sono quindi schematizzate come un insieme di tanti oscillatori armonici con frequenza  $\nu$ , che assorbono ed emettono onde elettromagnetiche della stessa frequenza. L'equilibrio termico tra pareti e radiazione in cavità viene così ricondotto all'equilibrio tra i dipoli oscillanti e le onde elettromagnetiche stazionarie, o modi normali. Possiamo pensare ogni modo normale “accoppiato” con un dipolo alla stessa frequenza, di modo

che la condizione di equilibrio si traduce nel richiedere che l'energia media dei due sistemi sia la stessa. In questo modo il problema di trovare l'ingrediente mancante per il calcolo della funzione  $u(\nu, T)$  è ricondotto a quello dell'energia media di un oscillatore armonico a temperatura costante. Considerando che l'energia di un oscillatore armonico contiene due termini quadratrici, uno nel momento (energia cinetica) e uno nella posizione (energia potenziale), come nella (2.16), il teorema di equipartizione dell'energia fornisce per la media

$$\langle E \rangle_{\text{oscillatore}} = 2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T \quad (4.12).$$

Arriviamo così a concludere che *ogni modo normale della cavità (onda elettromagnetica stazionaria) ha in media un'energia pari a  $k_B T$ .* Inserendo quest'ultimo risultato insieme con la (4.11) nella (4.9) si arriva infine alla seguente espressione, nota come *formula di Rayleigh-Jeans (RJ):*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (4.13).$$

Questo risultato riproduce abbastanza bene i dati sperimentali sull'emissione di radiazione da corpi caldi disponibili a fine Ottocento (misure di Paschen), che erano soprattutto relativi alla regione spettrale più facilmente accessibile dell'infrarosso (basse frequenze ossia grandi lunghezze d'onda). Al crescere della frequenza, però, la formula RJ non poteva essere considerata valida, pur in assenza di misure del tutto affidabili. Infatti la (4.13) mostra un andamento monotono crescente con la frequenza in netto disaccordo con l'andamento a campana dell'emissione sperimentale (*cf.* Fig. 4.6). Inoltre secondo la (4.13), l'energia emessa dalla cavità per grandi frequenze cresce indefinitamente e questo, in virtù della (4.4), implica l'emissione di una potenza *infinita* da parte della cavità, il che è senza dubbio non fisico. È questa la famosa *catastrofe ultravioletta* (il contributo predominante deriva dalle componenti della radiazione ad alte frequenze), un andamento del tutto non realistico previsto dalla teoria, basata sulla fisica classica, che ne sancisce il fallimento.

Il lavoro di Planck del 1900 nasce proprio per ovviare a questi problemi. Come si è visto, la trattazione teorica della radiazione di corpo nero è basata da una parte sul conteggio dei modi normali, una procedura ben testata in diversi campi, dall'acustica all'elettrodinamica, e dall'altra sul teorema di equipartizione dell'energia, di cui

avevamo già fatto notare l'inadeguatezza per esempio nel calcolo del calore specifico dei solidi (*cf.* Par. 2.4.5). La trattazione di Planck non fa più uso di tale teorema ma introduce una nuova ipotesi che si rivelerà rivoluzionaria: egli assume che l'energia di un oscillatore non sia una variabile continua ma che proceda a salti. Essa non può più assumere valori qualunque, ma solo valori multipli interi del *quantum* fondamentale che è pari alla frequenza  $\nu$  dell'oscillatore moltiplicato per una costante, la costante di Planck  $h$ , come nella (1.3) che per comodità qui riportiamo

$$E = nh\nu = n\hbar\omega$$

E' questa la famosa *quantizzazione dell'energia*, di cui si è parlato nel Cap. 1. Ricordiamo anche che Planck non intendeva dare alcun significato fisico a tale relazione, da usarsi solo come tecnicismo matematico utile per fare i conti per poi rientrare alla fine nel consueto ambito con energia continua facendo il limite per  $h \rightarrow 0$ . Tornando al nostro problema, Planck rinuncia al teorema dell'equipartizione dell'energia e ricalcola l'energia media dell'oscillatore secondo la meccanica statistica, con la nuova ipotesi di energia quantizzata, trovando

$$\langle E \rangle_{osc} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.14)$$

che si può anche scrivere

$$\langle E \rangle_{osc} = \langle n \rangle h\nu \quad (4.15)$$

dove si è introdotto il valor medio del numero di quanti di energia

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.16).$$

Il risultato (4.14) è chiaramente diverso da quello fornito dal teorema di equipartizione dell'energia, (4.12), cui tende solo per  $\beta h\nu$  molto piccolo, cioè a basse frequenze e/o alte temperature (ricordiamo che  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ):

$$\beta h\nu = \frac{h\nu}{k_B T} \rightarrow 0 \Rightarrow \langle E \rangle_{osc} \rightarrow \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = k_B T \quad (4.17),$$

che è appunto l'espressione classica.

Inserendo la (4.14) per l'energia media dell'oscillatore nella (4.9) insieme con la (4.11), si arriva infine alla famosa *formula di Planck per lo spettro del corpo nero*:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.18).$$

A basse frequenze la formula di Planck presenta un andamento del tipo  $\nu^2$  come quella RJ, ma a frequenze alte la (4.18) decresce in maniera esponenziale, eliminando così il problema della catastrofe ultravioletta. Come notato più volte, questo risultato viene però raggiunto al prezzo di un completo sconvolgimento della visione classica. Il risultato di Planck era anche in ottimo accordo con nuovi dati sperimentali presi in un ampio intervallo di frequenze (misure di Lummer e Pringsheim del 1900, su forni a 1646, 1449 e 1259 K). La (4.18) è ovviamente confermata anche da tutte le misure più recenti negli ambiti più svariati, utilizzanti tecniche e apparecchiature sofisticate.

**Esempio 4.3: derivazione del valore di costanti fondamentali.** Una volta ricavata la formula per lo spettro del corpo nero, Planck fu in grado di dare una valutazione numerica di alcune importanti costanti fondamentali. Infatti integrando la (4.18) su tutte le frequenze si ottiene.

$$\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^3} T^4,$$

che in virtù delle (4.8) e (4.4) fornisce per la potenza totale emessa dal corpo nero

$$W = S \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = S \times \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^2} T^4,$$

che è proprio la legge di Stefan-Boltzmann, con la costante  $\sigma$  data da

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \quad (4.19).$$

Invece derivando la (4.18), o meglio l'espressione corrispondente per la funzione  $u(\lambda, T)$ , e ponendo uguale a zero la derivata si ottiene il massimo della curva, ritrovando la legge di Wien

$$\lambda_{\max} T \equiv \frac{hc}{5k_B} \quad (4.20).$$

Essendo noti i valori sperimentali delle due costanti, di SB e di Wien, dalle (4.19) e (4.20) Planck poté ricavare i valori incogniti di  $h$  e di  $k_B$ . La determinazione diretta della costante di Boltzmann fu uno dei maggiori successi dell'epoca (siamo nel 1901). Da  $k_B$  e conoscendo la costante  $R$  dei gas (dall'equazione di stato per una mole  $pV = RT$ , con  $R = N_A \times k_B$ ), ricavò il numero di Avogadro, ottenendo  $N_A \sim 6.2 \times 10^{23}$ , molto vicino al valore accettato oggi. Conoscendo inoltre la costante di Faraday, dalla relazione (1.1) ottenne il valore di  $1.56 \times 10^{-19} C$  per la carica elettrica elementare, anch'esso molto vicino al valore attuale. Inizialmente nessuno diede credito a un valore così piccolo, ma poi gli esperimenti del gruppo di Rutherford ( $\sim 1908$ ) fornirono un valore per la carica delle particelle  $\alpha$  pari a circa il doppio di quanto trovato da Planck:

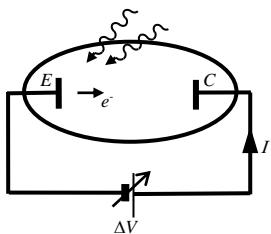
dopo di ciò i numeri di Planck furono accettati in pieno. Tra questi, ovviamente c'è il valore della nuova costante  $h$ ,

$$\begin{aligned} h &= 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \times \text{s} \\ \frac{h}{2\pi} &= \hbar \approx 1 \times 10^{-34} \text{ J} \times \text{s} \end{aligned} \quad (4.21),$$

che rappresenta il *quanto di azione*. Il valore di questa nuova costante fondamentale della natura è molto piccolo, ma non infinitesimo. L'idea di Planck di fare il limite  $h \rightarrow 0$  non risulta fattibile: considerare  $h$  nullo corrisponde alla fisica classica, mentre è proprio la sua differenza dallo zero che dà luogo alla fisica dei quanti.

#### 4.4 L'effetto fotoelettrico.

Quando si invia della radiazione luminosa su una superficie metallica quest'ultima emette elettroni. Questo fatto, noto come *effetto fotoelettrico*, osservato per primo da Hertz nel 1887<sup>2</sup>, fu studiato in dettaglio successivamente da Lenard, che mise in luce l'importanza di usare radiazione ultravioletta, e infine da Millikan, le cui accurate misure del 1911-1914 gli fruttarono il premio Nobel per la Fisica nel 1923 (insieme con quelle sulla carica elementare, *cf.* ES. 3.3). La Fig. 4.7 presenta lo schema dell'apparato sperimentale utilizzato per studiare l'effetto fotoelettrico.

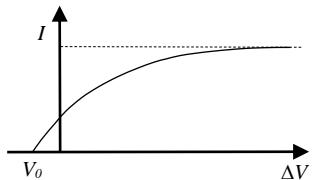


**Fig. 4.7.** Apparato per la misura dell'effetto fotoelettrico. La differenza di potenziale è positiva se il collettore è posto a potenziale maggiore dell'emettitore. Notare che il verso della corrente è opposto a quello di moto degli elettroni.

Tra i due elettrodi  $E$  (emettitore) e  $C$  (collettore) è posta una differenza di potenziale  $\Delta V$ , variabile in maniera controllata, e il tutto è posto nel solito tubo a vuoto. Un fascio di luce ultravioletta monocromatica (per lasciarla passare il tubo a vuoto è fatto in quarzo) viene inviato su  $E$ , provocando l'emissione di elettroni (*fotoemissione*) che vengono raccolti su  $C$ : nel circuito passa la corrente  $I$  che viene misurata. E' inoltre

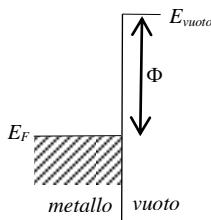
<sup>2</sup> Hertz osservò che la radiazione ultravioletta poteva favorire la scarica tra due elettrodi nel corso degli esperimenti che dimostrarono l'esistenza delle onde e.m. confermando la teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo. E così, con uno dei paradossi più notevoli della storia della scienza, mentre da una parte confermava appieno la teoria ondulatoria della luce, dall'altra scopriva l'effetto in seguito utilizzato da Einstein per metterla in crisi introducendo il concetto di fotone.

possibile variare sia la lunghezza d'onda (o frequenza) che l'intensità della radiazione incidente. Un primo tipo di misura consiste nello studio della *caratteristica* del sistema, cioè il grafico tensione-corrente, a lunghezza d'onda e intensità della luce fissate. Il risultato è riportato schematicamente in Figura 4.8.



**Fig. 4.8.** Caratteristica tensione corrente per una cella fotoelettrica illuminata con luce monocromatica.

Per valori di  $\Delta V$  positivi la corrente tende a un valore di saturazione: quando il potenziale positivo del collettore  $C$  è sufficientemente alto tutti gli elettroni fotoemessi sono raccolti e un suo ulteriore aumento non cambia la corrente. Cambiando il segno della differenza di potenziale, nel circuito continua a passare corrente (nello stesso verso) fino a un valore  $\Delta V = -V_0$  oltre il quale la corrente si annulla, il che definisce il *potenziale di arresto*  $V_0$ . Dal punto di vista qualitativo questo risultato è facilmente spiegabile anche in termini della teoria ondulatoria. In condizioni ordinarie, all'equilibrio, gli elettroni non possono uscire dal metallo in quanto vedono una barriera di potenziale che li tiene legati all'interno del solido. Come vedremo meglio in uno dei capitoli successivi, all'interno del metallo gli elettroni occupano infatti livelli energetici fino a un valore massimo  $E_F$  detto *livello di Fermi*, posto più in basso in energia del *livello di vuoto* ( $E_{vuoto}$ ) cioè l'energia di un elettrone fermo ma libero dal metallo..



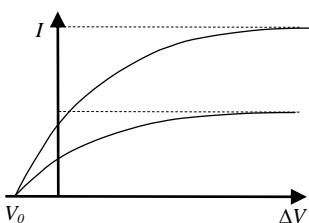
**Fig. 4.9.** Schema dei livelli energetici per gli elettroni in un metallo, in cui il livello di Fermi  $E_F$  rappresenta l'energia massima. Valori tipici della funzione lavoro  $\Phi$  sono intorno ai 3-4 eV.

L'altezza della barriera, cioè la differenza tra  $E_{vuoto}$  ed  $E_F$ , è per definizione la *funzione lavoro*  $\Phi$  del metallo. Detto altrimenti, la funzione lavoro è l'energia che si deve dare a un elettrone del metallo per portarlo a distanza infinita (cioè molto grande, dove gli effetti delle forze di attrazione da parte del metallo, di natura elettrica, si annullano) con energia cinetica nulla. Nell'effetto fotoelettrico, l'energia è appunto fornita dalla luce.

Arrivando sull'emettitore la radiazione elettromagnetica cede agli elettroni del metallo energia, che viene in parte utilizzata per superare la barriera di potenziale che li tiene legati all'interno del solido, e in parte si ritrova come energia cinetica degli elettroni fotoemessi. Pertanto alcuni elettroni raggiungeranno il collettore anche se questo ha un potenziale negativo e quindi repulsivo, almeno fino a un certo punto. Considerando infatti la conservazione dell'energia tra i punti  $E$  e  $C$ ,  $K_E = K_C + (-e)\Delta V$ , troviamo che i fotoelettroni più energetici possono raggiungere il collettore al limite con velocità nulla ( $K_C = 0$ ) se sono emessi con energia cinetica massima ( $K_E = K_{\max}$ ) pari al potenziale di arresto (moltiplicato per la carica), cioè

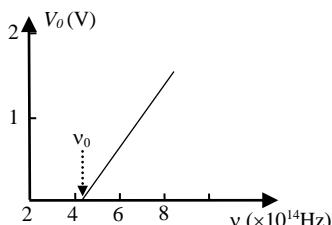
$$K_{\max} = eV_0 \quad (4.22).$$

Se si vanno a guardare le cose in dettaglio, però, la teoria classica non risulta più adeguata. Infatti aumentando l'intensità della luce incidente su  $E$ , ci si aspetta che, trasportando più energia, l'onda elettromagnetica ne ceda di più ai fotoelettroni che dovrebbero quindi uscire con energia cinetica maggiore. Sperimentalmente si osserva invece che il potenziale d'arresto non varia al variare dell'intensità luminosa (a parità di frequenza). Come mostrato in Figura 4.10, è solo la corrente di saturazione che varia ma non  $V_0$ , varia cioè solo il numero totale di fotoelettroni, ma non l'energia cinetica massima con cui sono emessi. Per far cambiare il potenziale d'arresto è necessario variare la frequenza della radiazione.



**Fig. 4.10.** Caratteristica tensione corrente per due diversi valori dell'intensità luminosa: la curva superiore corrisponde a intensità doppia.

Il secondo tipo di misura è proprio lo studio della dipendenza di  $V_0$  dalla frequenza  $\nu$  della luce incidente sull'emettitore. I risultati sono riportati nella Figura 4.11. Si osserva innanzitutto che per frequenze inferiori a un valore di soglia  $\nu_0$  non c'è affatto fotoemissione: in tale regione non viene emesso alcun elettrone qualunque sia l'intensità luminosa incidente. Superata la soglia,  $V_0$  cresce linearmente con la frequenza.



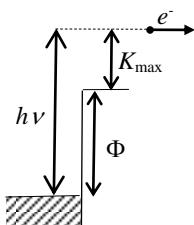
**Fig. 4.11.** Potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce per il sodio metallico (Millikan 1914).

I risultati principali messi in luce dalle Fig. 4.10 e 4.11, cioè la presenza di un potenziale di arresto costante e di una soglia in frequenza, entrambi indipendenti dall'intensità della radiazione, sono del tutto inspiegabili con la teoria ondulatoria classica. Inoltre, in tale ambito, tra illuminazione e passaggio di corrente nella cella ci si attenderebbe un ritardo, tanto maggiore quanto minore è l'intensità della luce. Sarebbe cioè necessario un certo lasso di tempo per permettere agli elettroni dell'emettitore di assorbire dal campo di radiazione, che trasporta la potenza in maniera continua distribuita su tutta la superficie illuminata, l'energia sufficiente per sfuggire dal metallo. L'evidenza sperimentale invece mostra che non c'è ritardo alcuno, almeno entro i limiti sperimentali di circa 1 ns, molti ordini di grandezza inferiori a quanto previsto dalla teoria classica<sup>3</sup>. In questo quadro si colloca il lavoro rivoluzionario di Einstein del 1905, citato nel Cap. 1, in cui introduce l'idea che luce abbia una natura non ondulatoria, con energia trasportata in maniera continua, ma corpuscolare, con energia quantizzata in pacchetti elementari. Essa è cioè composta da particelle, i fotoni, ciascuno dei quali possiede un'energia che, seguendo Planck, è posta pari ad  $h\nu$ . Lo scambio di energia con la superficie illuminata risulta anch'esso quantizzato: ciascun fotone può eccitare un elettrone del metallo che lo assorbe aumentando la propria energia proprio di  $h\nu$ . E' bene sottolineare che in una visione quantizzata l'elettrone non può assorbire solo una frazione del *quantum* di energia: non si può assorbire solo una parte di un fotone, se lo si fa lo si fa del tutto. Se l'elettrone, così eccitato, ha acquisito energia superiore alla barriera può uscire dal solido ed essere fotoemesso, altrimenti no. L'esistenza della soglia in frequenza risulta a questo punto del tutto

<sup>3</sup> Secondo la teoria ondulatoria, una sorgente luminosa di 12 W, posta a un metro di distanza dall'emettitore, è in grado di cedere a un elettrone localizzato su una superficie dell'ordine del quadrato del raggio atomico,  $\sim 10^{-20} \text{ m}^2$ , una potenza di circa  $10^{-20} \text{ W}$  (ossia  $10^{-20} \text{ J/s}$ ). Se l'elettrone l'assorbe tutta è necessario aspettare un tempo di 30 s affinché accumuli l'energia necessaria per sfuggire dal metallo, che vale almeno 2 eV, cioè appunto circa  $3 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

naturale: si avrà fotoemissione solo se il fotone possiede l'energia sufficiente ad eccitare l'elettrone fin sopra la barriera, cioè se  $h\nu > \Phi$ . In caso contrario il processo non sarà possibile, anche aumentando di molto l'intensità della luce. Ciò corrisponde infatti a un aumento del numero di fotoni ma, se la frequenza è sotto la soglia  $\nu_0 = \frac{\Phi}{h}$ , per quanto numerosi nessuno di essi possiederà l'energia necessaria per portare un elettrone sopra la barriera. Oltre la soglia  $\nu > \nu_0$ , cioè per  $h\nu > \Phi$ , il fotone sarà in grado di conferire al fotoelettrone anche energia cinetica. Gli elettroni fotoemessi con energia cinetica massima saranno quelli che nel metallo sono più energetici, cioè quelli al livello di Fermi (Fig. 4.12), secondo la famosa equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico, che altrimenti non è che la legge di conservazione dell'energia

$$h\nu = \Phi + K_{\max} \quad (4.23).$$



**Fig. 4.12.** Conservazione dell'energia per l'effetto fotoelettrico: l'elettrone che prima dell'eccitazione si trovava ad  $E_F$  viene fotoemesso con energia cinetica  $K_{\max}$ .

L'energia massima con cui gli elettroni sono emessi, quindi, dipende solo dalla frequenza (e da  $\Phi$  che è una proprietà del metallo con cui è fatto l'emettitore) ma non dall'intensità della luce. La teoria di Einstein risponde pertanto con efficacia a tutte le obiezioni sollevate dalla teoria ondulatoria. Abbiamo già discusso dell'esistenza della soglia, ora vediamo che l'indipendenza del potenziale d'arresto  $V_0$  dall'intensità della luce segue naturalmente dalla precedente osservazione per via della (4.23). Raddoppiare l'intensità, come in Fig. 4.10, corrisponde semplicemente a raddoppiare il numero di fotoni e quindi raddoppia la corrente fotoemessa; questo però *non cambia l'energia* dei singoli fotoni e di conseguenza l'energia massima con cui sono emessi gli elettroni. Infine, nessun ritardo risulta necessario: per quanto debole sia il fascio di luce incidente, sull'emettitore arriverà almeno un fotone. Esso sarà assorbito immediatamente da un qualche atomo con conseguente emissione immediata di un fotoelettrone.

Mettendo insieme le (4.22) e (4.23) si ottiene la dipendenza di  $V_0$  dalla frequenza della luce:

$$V_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) \quad , \quad \text{con} \quad \nu_0 = \frac{\Phi}{h} \quad (4.24).$$

Quest'ultima relazione, oltre a spiegare i dati sperimentali (*cf.* Fig. 4.11), permette di ricavare dagli stessi anche nuove informazioni. L'intercetta della curva sperimentale, infatti, fornisce il valore della funzione lavoro dell'emettitore, grandezza fondamentale per descrivere le proprietà dei metalli. La pendenza dà invece il rapporto  $h/e$  e, nota la carica elementare, fornisce il valore della costante di Planck, come appunto ottenuto da Millikan.

Dall'analisi dell'effetto fotoelettrico emerge quindi un quadro in cui una radiazione elettromagnetica monocromatica va vista come un insieme di tante particelle, i fotoni, ciascuno con energia  $h\nu$ , e il cui numero è legato all'intensità della radiazione stessa.

**Esempio 4.4.** Consideriamo una cella fotoelettrica con emettitore costituito da un elettrodo di sodio di superficie  $A = 1 \text{ cm}^2$ , posto a una distanza  $D = 1 \text{ m}$  da una debole sorgente puntiforme di potenza  $P_0 = 1 \text{ W}$ , che emette radiazione elettromagnetica monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.45 \mu\text{m}$ . In queste condizioni

nella cella passa corrente. Infatti la frequenza della radiazione,  $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.45 \times 10^{-6} \text{ m}} = 6.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , è

superiore alla soglia di fotoemissione per il sodio, che vale  $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , come si vede dalla Fig. 4.11.

In termini di energia, la soglia, cioè la funzione lavoro del sodio, vale  $\Phi = h\nu_0 = 6.63 \times 10^{-34} \times 5.6 \times 10^{14} \text{ J} = 3.7 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.3 \text{ eV}$ . Per determinare quanta corrente passa nella cella, valutiamo innanzitutto il numero di fotoni che arrivano sull'emettitore. La sorgente puntiforme emette in maniera isotropa, distribuendo la potenza su una sfera. A distanza  $D$  l'intensità della radiazione, cioè la potenza emessa per unità di superficie, vale  $P_0/(4\pi D^2)$ , per cui sull'emettitore arriva un'energia per unità di tempo

$$\frac{P_0}{4\pi D^2} \times A = \frac{1 \text{ W}}{4\pi \text{ m}^2} \times 10^{-4} \text{ m}^2 \approx 8 \times 10^{-6} \text{ J/s}.$$

In una descrizione corpuscolare della luce, tale grandezza è pari all'energia del singolo fotone,  $h\nu = 4.4 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.75 \text{ eV}$ , per il numero  $R_{\text{tot}}$  di fotoni che arrivano sulla superficie per unità di tempo, da cui

$$R_{\text{tot}} = \frac{\text{potenza incidente}}{h\nu} = \frac{8 \times 10^{-6} \text{ J/s}}{4.4 \times 10^{-19} \text{ J}} = 1.8 \times 10^{13} \text{ fotoni/s}.$$

Il numero di fotoni presenti nella radiazione emessa da una sorgente anche molto debole come quella considerata è molto alto, il che corrisponde a una intensità (ossia ampiezza del campo) sufficientemente grande e misurabile, che rappresenta il limite classico della visione ondulatoria. In questo caso il fatto che

l'energia dell'onda non sia continua ma granulare non viene evidenziato negli esperimenti ordinari (*cf.* discussione a fine Par. 1.1).

Non tutti i fotoni che arrivano sull'emettitore vengono però assorbiti; se indichiamo con  $\alpha$  la probabilità che un elettrone assorba un fotone e venga fotoemesso (nel linguaggio del Par. 3.3  $\alpha$  è la sezione d'urto del processo), il numero di elettroni emessi per unità di tempo vale  $R_{el} = \alpha R_{far}$ , che moltiplicando per la carica fornisce infine la corrente  $I$  che passa nella cella. Usando un tipico valore di  $\alpha$  pari a  $\sim 3\%$  si ottiene

$$I = 3 \times 10^{-2} \times 1.8 \times 10^{13} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C/s} = 8.6 \times 10^{-8} \text{ C/s} = 0.86 \mu\text{A},$$

che è un valore facilmente misurabile.

Se poi ripetessimo il tutto con una sorgente di pari potenza ma con lunghezza d'onda maggiore, ossia frequenza minore, diciamo  $v = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$  (corrispondente a fotoni di energia 2 eV), nella cella *non passerebbe affatto corrente*, nonostante il gran numero di fotoni incidenti sull'emettitore (sarebbe circa lo stesso, anzi maggiore: 2.4 invece che  $1.8 \times 10^{13}$  al secondo). La corrente resterebbe nulla anche aumentando di molto la potenza: l'onda elettromagnetica trasporterebbe molta energia ma non ci sarebbero fotoni in grado di indurre l'effetto photoelettrico.

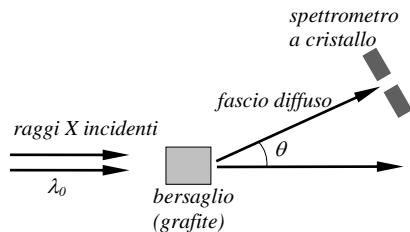
---

## 4.5 La diffusione Compton.

Come già discusso nel Par. 3.2, un fenomeno tipico delle onde è la diffusione, che si osserva quando l'onda interagisce con un qualche tipo di mezzo materiale, che costituisce appunto il centro di diffusione. Questo processo fa variare la direzione e il modo di propagazione dell'onda, ma in ogni caso non ne modifica la frequenza (e la lunghezza d'onda). Si parla in tal caso di *diffusione elastica*, che nel caso delle onde elettromagnetiche è nota come diffusione Rayleigh. Come discusso nei testi di elettromagnetismo e ottica, la sezione d'urto per questo processo va come la quarta potenza della frequenza. Questo andamento, fortemente dipendente dalla frequenza, fa sì che le onde con alto valore di  $v$  subiscano una notevole diffusione, il che rende conto, tra l'altro, del colore blu del cielo, nonché del prevalere delle tonalità rosso-arancio all'alba e al tramonto.

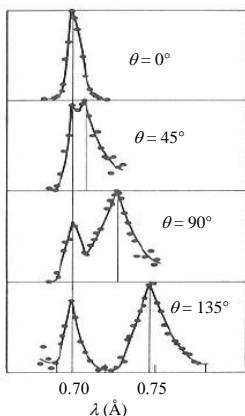
Se si usano onde elettromagnetiche di piccola lunghezza d'onda (raggi X), si può osservare un fenomeno del tutto inspiegabile dalla teoria ondulatoria classica, cioè una diffusione con variazione della frequenza, detta *diffusione anelastica*. Tale fenomeno, osservato per la prima volta nel 1923, è noto come *diffusione Compton*, dal nome del suo scopritore. L'esperimento consiste nell'inviare un fascio di raggi X collimato e monocromatico con lunghezza d'onda  $\lambda_0$  contro un bersaglio (nella misura originale

costituito da grafite), e nella misura dell'intensità diffusa in funzione dell'angolo di diffusione  $\theta$  e della lunghezza d'onda (Fig. 4.13).



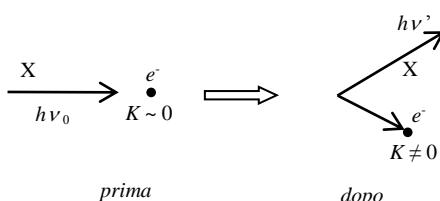
**Fig. 4.13.** Disposizione sperimentale per la misura dell'effetto Compton. La radiazione X diffusa da un blocco di grafite all'angolo  $\theta$  viene inviata in uno spettrometro a cristallo per l'analisi dell'intensità in funzione della lunghezza d'onda.

Il risultato della misura è mostrato in Fig. 4.14: accanto al picco *elastico* corrispondente alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$  ne compare un altro a lunghezza d'onda maggiore  $\lambda'$  (picco *anelastico*).



**Fig. 4.14.** Risultati dell'esperimento di Compton: intensità raccolta per quattro diversi valori dell'angolo di diffusione. La linea verticale a sinistra corrisponde alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , quella a destra a  $\lambda'$ .

Come già notato, è proprio la presenza di questo secondo picco a essere incompatibile con una descrizione ondulatoria della radiazione. La separazione  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0$  tra i due picchi, detta spostamento Compton, varia con l'angolo di diffusione; sperimentalmente si ricava la relazione  $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$ , dove la *lunghezza d'onda di Compton*  $\lambda_C$  è una costante che vale 0.024 Å. Il fenomeno fu interpretato da Compton considerando la radiazione X come composta da un fascio di fotoni, ciascuno con energia  $h\nu$ , e che avvenissero collisioni tra di essi e gli elettroni del bersaglio, tipo un urto tra palle di biliardo (Fig. 4.15).



**Fig. 4.15** Schema dell'urto tra un fotone X e un elettrone del bersaglio, considerato come inizialmente libero e con energia cinetica nulla. Nell'urto il fotone cede energia all'elettrone.

In quest'ottica, il picco anelastico risulta dai fotoni che nell'urto hanno ceduto parte della propria energia agli elettroni del bersaglio e che quindi ne emergono con energia ridotta. Si trovano così ad avere minore frequenza ( $E = h\nu$ ), il che implica maggiore lunghezza d'onda. Il processo può essere analizzato come l'urto tra due particelle, il fotone e l'elettrone, imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Gli elettroni sono in realtà legati agli atomi del bersaglio, ma, se si considerano quelli più esterni, l'energia di legame è in genere molto minore di tutte le altre energie coinvolte (quella del fotone X e quella cinetica acquisita dall'elettrone dopo l'urto), di modo che è una buona approssimazione considerarli come liberi. Considerate le alte energie in gioco, è necessario utilizzare la formulazione relativistica. Il risultato del conto dettagliato, per cui rimandiamo al paragrafo 4.7.7, fornisce per lo spostamento Compton la relazione:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (4.25),$$

dove  $m$  è la massa a riposo dell'elettrone, che permette di ricavare la lunghezza d'onda di Compton da grandezze fondamentali:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{9 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \text{ m} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.024 \text{ Å}$$

in ottimo accordo con i dati sperimentali.

**Esempio 4.5: origine del picco elastico.** La discussione precedente spiega la presenza negli spettri del picco anelastico, ma non rende conto del fatto che si continua sempre a osservare anche il picco elastico a  $\lambda_0$  (Fig. 4.14). Come detto sopra, l'analisi che porta alla (4.25) assume gli elettroni liberi, il che può essere ben giustificato per quelli più esterni. Negli atomi, però, esistono anche elettroni fortemente legati, che rimangono nell'atomo anche dopo l'interazione con i raggi X. In tal caso l'urto avviene tra il fotone X e l'atomo nel suo insieme. In pratica si arriva a una relazione tipo la (4.25) in cui però si deve sostituire alla massa dell'elettrone  $m$  quella dell'intero atomo  $M$ . Nel caso di un bersaglio di grafite, formato da atomi  $^{12}\text{C}$ ,  $M \sim 12 \times 1830 \times m$  e

quindi lo spostamento Compton diventa circa  $2 \times 10^4$  volte più piccolo, cioè  $\lambda' \rightarrow \lambda_0$ , da cui l'origine del picco elastico.

---

**Esempio 4.6: effetto Compton nel visibile.** Come si vede dalla (4.25), lo spostamento Compton non dipende dalla lunghezza d'onda incidente, per cui si dovrebbe avere lo stesso effetto anche nel visibile, dove però non era mai stato osservato. Le lunghezze d'onda della luce visibile sono dell'ordine di mezzo micrometro, per cui la variazione relativa di  $\lambda$  dovuta all'effetto Compton vale  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \frac{\lambda_C}{\lambda_0} \approx \frac{2 \times 10^{-12} \text{ m}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}} = 4 \times 10^{-6}$ , il che significa

che per osservarlo servirebbe una risoluzione di poche parti per milione, di molto superiore a quanto sperimentalmente accessibile a inizio '900. Diverso è il caso dei raggi X, per i quali  $\lambda_0 \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ , e quindi è sufficiente una risoluzione molto minore, dell'ordine del 2%.

---

## 4.6 Onde o particelle?

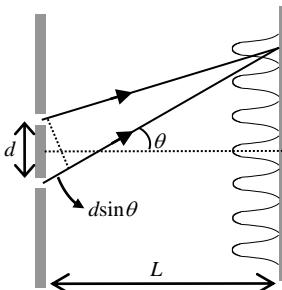
L'effetto Compton e quello fotoelettrico (nel Par. 4.7.4 vedremo che anche l'ipotesi di Planck sulla quantizzazione dell'energia dell'oscillatore armonico va nella stessa direzione) sono spiegati ricorrendo al concetto di quanto di luce o fotone. In pratica alla descrizione ondulatoria della radiazione se ne sostituisce una corpuscolare, rivitalizzando la vecchia diaatriba seicentesca tra sostenitori della luce come particelle (Newton) e luce come onda (Huygens). D'altra parte però la teoria ondulatoria era fondata su un numero molto grande di esperimenti (come richiamato nel seguente Par. 4.7.1), riuscendo a render conto di una grande varietà di fenomeni. Nei primi anni del Novecento, perciò, la situazione era tutt'altro che soddisfacente: alcuni esperimenti (l'interferenza e la diffrazione su tutti) potevano essere spiegati solo con l'ipotesi di un carattere ondulatorio della luce, altri invece (come quelli discussi in precedenza) dovevano essere interpretati ricorrendo a una sua struttura corpuscolare. A seconda delle situazioni, la luce sembrava assumere caratteri completamente opposti. La sensazione di smarrimento tra gli scienziati del tempo è ben riassunta nelle seguenti parole di un eminente fisico: *“lunedì, mercoledì e venerdì la luce è un'onda, martedì, giovedì e sabato è una particella, la domenica si riposa”* (Bragg).

Come vedremo nei prossimi capitoli la soluzione al dilemma avrebbe portato in una direzione del tutto inattesa, con un'ironia che possiamo ben apprezzare solo a posteriori. Di fronte a un tipico problema logico con due sole opzioni senza altra via di uscita (dilemma a due corna), la giusta condotta, con atteggiamento tipicamente zen, consisterà nel rifiutarsi di scegliere e trovare una scappatoia a un livello superiore.

## 4.7 Complementi, applicazioni, esempi

**4.7.1 Richiamo sui principali fenomeni ondulatori.** Riassumiamo brevemente qui, senza pretesa di completezza, alcuni fenomeni ondulatori che dovrebbero essere già noti dai corsi di elettromagnetismo di base, la cui conoscenza è necessaria per una buona comprensione di molti degli argomenti trattati nei capitoli seguenti.

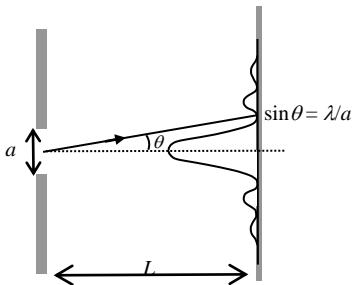
*i) interferenza:* quando onde provenienti da due sorgenti diverse (ma *coerenti*) si sovrappongono in un punto dello spazio, l'intensità dell'onda combinata può risultare maggiore o minore di quella di ogni singola onda. L'esempio più semplice è la classica esperienza di Young (1801) sull'interferenza da doppia fenditura (Fig. 4.16).



**Figura 4.16** Schema dell'esperienza di Young con le due fenditure per l'interferenza tra due sorgenti poste a distanza  $d$ . La figura non è in scala, in quanto  $L \gg d$ .

L'intensità della luce sullo schermo si ottiene sommando le ampiezze dei campi dovuti alle due sorgenti (distanti  $d$ ) e facendone poi il modulo quadro. Se la differenza di cammino ottico,  $\Delta r = d \sin \theta$ , è pari a un multiplo intero di lunghezze d'onda o di mezze lunghezze d'onda, sullo schermo si ottiene rispettivamente un massimo o un minimo di intensità. In termini della differenza di fase,  $\delta = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ , si ottengono massimi per  $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  e minimi per  $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ . Più in generale, l'intensità sullo schermo può essere scritta come  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$ .

*ii) diffrazione:* quando un'onda passa attraverso una fenditura sottile di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda della radiazione, lo schermo posto al di là risulta illuminato anche ben fuori dall'ombra geometrica della fenditura e si osserva un'alternanza di bande chiare e scure. La situazione più semplice è quella di una lunga fenditura sottile, di larghezza  $a$ , investita da un'onda piana, nel qual caso si hanno dei minimi per  $a \sin \theta$  pari a un numero intero di lunghezze d'onda (Fig. 4.17).



**Figura 4.17** Intensità e posizione di minimi nella figura di diffrazione da una fenditura di larghezza  $a$ . La figura non è in scala, in quanto  $L \gg a$ .

Il calcolo dettagliato (per  $L \rightarrow \infty$ ) fornisce per l'intensità  $I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ ,

con  $\beta = \pi a \sin \theta / \lambda$ , il cui andamento è riportato in Fig. 4.17. Ricordiamo anche che è proprio la diffrazione a porre un limite al potere risolutivo di un sistema ottico, per esempio un microscopio (ma anche un telescopio). Dalla Fig. 4.17 si vede infatti che la dimensione minima dell'immagine sullo schermo è dell'ordine della separazione tra il massimo centrale e primo zero di intensità, cioè  $y_1 = Lt \tan \theta \sim L \sin \theta \sim L \lambda / a$ , per cui stringendo la fenditura a un certo punto, quando diventa comparabile alla lunghezza d'onda, l'immagine cresce di dimensioni e non è più possibile risolvere meglio la sorgente (ne ripareremo nel Par. 6.6.2).

*iii) interferenza e diffrazione:* nell'esperimento di Young le due fenditure venivano considerate puntiformi (o meglio molto più piccole della lunghezza d'onda della radiazione), se questo non è il caso bisogna considerare l'effetto combinato dell'interferenza e della diffrazione. In genere, la distanza  $d$  tra le fenditure è molto maggiore della larghezza  $a$  delle stesse. Pertanto la figura di diffrazione, che scala come  $\lambda/a$ , risulta molto più larga di quella d'interferenza, che scala come  $\lambda/d$ : in pratica si osserva una figura d'interferenza modulata da quella della diffrazione.

*iv) reticolni di diffrazione:* si tratta di dispositivi ottici costituiti da molte ( $N$ ) sottili fenditure (larghezza  $a$ ) parallele poste a distanza  $D$  (il *passo* del reticolo). L'interferenza delle  $N$  sorgenti fornisce per l'intensità sullo schermo (posto a distanza infinita, ossia

molto grande)  $I = I_{\max} \left( \frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2$ , dove  $\alpha = \pi D \sin \theta / \lambda$ , cui va aggiunto il fattore

moltiplicativo  $(\sin \beta / \beta)^2$  della modulazione dovuta alla diffrazione di ciascuna fenditura.

Si hanno dei *massimi principali* per

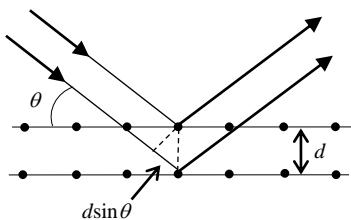
$$D \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.26)$$

la cui intensità va come  $N^2$ , intervallati da massimi secondari. In pratica, nei reticolati  $N$  è sempre molto grande ( $10^3$ - $10^5$ ), sicché l'intensità risulta concentrata quasi esclusivamente nei massimi principali, che risultano anche molto stretti. La modulazione dovuta alla diffrazione fa poi sì che al crescere di  $m$  (detto numero d'ordine del reticolo) l'intensità decresca, di modo che in genere si osservano solo i fasci corrispondenti a valori piccoli di  $m$  (poche unità). I reticolati di diffrazione trovano ampio uso nei *monocromatori*, in cui in base alla (5.26) opportune rotazioni producono in uscita fasci alla lunghezza d'onda desiderata.

**4.7.2 Diffrazione dei raggi X.** Essendo onde elettromagnetiche, anche per i raggi X si può verificare il fenomeno della diffrazione. Però, come si vede dalla (4.26) servirebbe un reticolo con passo paragonabile alla lunghezza d'onda, che per i raggi X è dell'ordine di 1 Å, cioè  $10^{-10}$  m. Nel 1912 von Laue suggerì che le file regolari di atomi in un solido cristallino potessero funzionare come un reticolo di diffrazione per i raggi X. In tali materiali esistono dei *piani reticolari* paralleli, la cui distanza  $d$  è proprio del giusto ordine di grandezza. Un fascio di raggi X incidente con angolo  $\theta$  (misurato dal piano) risulta parzialmente riflesso da ciascuno dei piani. I raggi riflessi da piani successivi daranno luogo a interruzione costruttiva se la differenza di cammino  $2d \sin \theta$  è pari a un multiplo della lunghezza d'onda, cioè (Fig. 4.18)

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.27)$$

che è la *condizione di Bragg* per aver massimi di intensità.

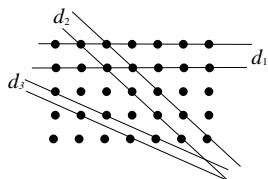


**Figura 4.18** Riflessione di raggi X da due piani cristallini paralleli distanti  $d$ . Il fascio riflesso dal piano inferiore percorre un tratto in più pari a  $2d \sin \theta$ .

Un cristallo può essere usato come monocromatore per selezionare la lunghezza d'onda dei raggi X, proprio come un reticolo di diffrazione per la luce visibile o UV. D'altra parte, la diffrazione dei raggi X può essere utilizzata per lo studio della struttura atomica

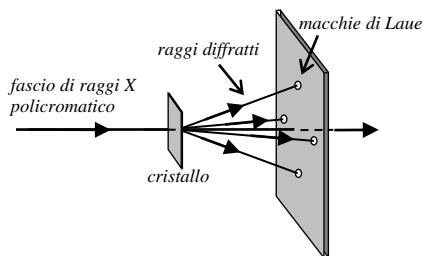
dei cristalli, ed è ormai diventata una tecnica fondamentale anche per lo studio e di complesse strutture molecolari.

Dal punto di vista sperimentale esistono due configurazioni principali per lo studio della diffrazione da cristalli. Nello schema di Laue, un fascio di raggi X collimato policromatico (cioè contenente un intervallo ampio e continuo di lunghezze d'onda) viene inviato su un cristallo singolo, all'interno del quale esistono piani reticolari con diverse distanze interplanari (Fig. 4.19).



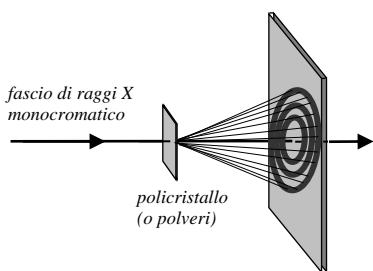
**Figura 4.19.** Sezione di un reticolo cristallino cubico (ogni punto rappresenta un atomo). Le linee indicano piani paralleli con diversa distanza interplanare.

Questo fa sì che diverse lunghezze d'onda possano soddisfare alla condizione di Bragg con diverso valore di  $\theta$  “scegliendosi” ciascuna la famiglia di piani opportuna. Si osservano così sullo schermo delle macchie dovute ai massimi di interferenza, ciascuno corrispondente a una certa lunghezza d'onda (ogni fascio diffratto è monocromatico), con una figura di diffrazione che riflette la simmetria del reticolo cristallino (Fig. 4.20)



**Figura 4.20** Diffrazione X da un cristallo singolo nello schema di Laue.

Nello schema di Debey-Scherrer, invece, si usa un fascio monocromatico che viene inviato su un materiale polimorfico (si possono usare anche polveri). In questo tipo di campione, ogni famiglia di piani reticolari compare con tutte le possibili orientazioni rispetto al fascio incidente (Fig. 4.21), in modo da dare luogo a una simmetria cilindrica con fasci diffratti lungo coni. L'intersezione con lo schermo fornisce delle figure a circonferenze concentriche, ciascuna corrispondente a una particolare serie di piani cristallini contenuti nei microcristalli presenti nel bersaglio.



**Figura 4.21** Diffrazione X da un film policristallino nello schema di Debye-Scherrer.

**4.7.3 Radiazione cosmica di fondo.** Ci sono state diverse dimostrazioni della validità della formula di Planck per lo spettro del corpo nero, ma sicuramente una delle più sbalorditive è quella ottenuta dalla misura della *densità spettrale della radiazione cosmica di fondo*, lasciataci dal *big-bang* che diede inizio al nostro universo, circa 14 miliardi di anni fa. Negli stadi iniziali della vita dell'universo tutta la materia era ionizzata e la radiazione veniva continuamente emessa e riassorbita dalle particelle cariche, fino allo stabilirsi dell'equilibrio termico. Successivamente l'espansione causò il raffreddamento della radiazione al di sotto dei 3000 K e le particelle cariche cominciarono a combinarsi a formare atomi (elettroni e protoni formavano idrogeno, elettroni e particelle alfa formavano elio), cioè sistemi neutri. Dopodiché l'interazione tra radiazione e materia fu molto ridotta. Col tempo la materia si organizzò in galassie e stelle, laddove la radiazione (con energia totale costante) continuò a raffreddarsi mentre l'universo si espandeva. L'intensità e lo spettro di questa radiazione di fondo (non consideriamo la radiazione prodotta dalle stelle) dipende solo dalla sua temperatura. L'espansione è continuata per miliardi di anni e la radiazione ha raggiunto una temperatura di 2.73 K, che sarebbe anche la temperatura della Terra se non fosse per il Sole e per il riscaldamento dovuto ai processi radioattivi interni alla Terra stessa.

La radiazione cosmica di fondo fu scoperta in maniera accidentale da Penzias e Wilson intorno al 1965 (premiati con il Nobel 1978) mentre studiavano segnali elettromagnetici provenienti da satelliti artificiali. Puntando la loro antenna in diverse direzioni dello spazio, essi trovarono un rumore di fondo comunque presente (e lavorarono sodo per eliminare ogni possibile causa che potesse originarlo) non attribuibile a niente di allora conosciuto. Studi accurati dimostrarono che si trattava di una radiazione uniforme che arriva sulla Terra da tutte le direzioni con uno spettro uguale a quello di un corpo nero a 2.73 K, il residuo della radiazione primaria prodotta nel big-bang. Dal 1989 in poi si è

anche utilizzato un satellite artificiale (COBE, COsmic Background Explorer) che ha permesso la raccolta dati molto accurati (Mather 1990), che risultano in ottimo accordo con la formula di Planck. Più recentemente sono state scoperte anisotropie nell'intensità di questa radiazione, corrispondenti a fluttuazioni in temperatura dell'ordine di  $10^{-5}$  K (Smoot 1992), imputabili a fluttuazioni di densità di materia nei primissimi istanti di vita dell'universo. Tali studi hanno fruttato a Mather e Smoot il premio Nobel nel 2006.

**4.7.4 Oscillatori quantizzati: da Planck a Einstein.** Come già ricordato più volte, Planck considerava la quantizzazione dell'energia degli oscillatori come un artificio matematico utile per fare i conti ma privo di ogni significato fisico. A conferire piena dignità di legge fisica all'ipotesi di Planck fu invece Einstein, nel suo lavoro sull'effetto fotoelettrico. Se infatti gli oscillatori avevano un'energia che variava in maniera discontinua con salti tra un livello e l'altro, allora anche il campo di radiazione con cui erano in equilibrio nella cavità doveva seguire lo stesso andamento. Lo scambio di energia tra i due sistemi doveva pertanto comportare l'esistenza di quanti di energia del campo elettromagnetico, o *quanti di luce*: nasceva così il fotone, concetto introducendo il quale Einstein era in grado di spiegare appunto l'effetto fotoelettrico. L'energia del campo non era più da considerarsi continua ma granulare, e la radiazione elettromagnetica perdeva il suo carattere ondulatorio acquisendone uno corpuscolare: l'onda elettromagnetica andava quindi vista come un insieme di tanti fotoni, ciascuno di energia  $h\nu$ , e l'intensità era da collegarsi col numero  $N$  di fotoni:

$$I = \frac{\text{energia}}{\text{superfici e} \times \text{tempo}} \Rightarrow \frac{N h \nu}{\text{superfici e} \times \text{tempo}} .$$

Solo nel caso in cui  $N$  sia molto grande si avrà un'intensità (ovvero un'ampiezza del campo elettromagnetico) misurabile, recuperando la visione classica. In quest'ottica, la radiazione elettromagnetica in cavità poteva essere considerata come dovuta a tanti fotoni con diversa frequenza e il problema del corpo nero ricondotto a quello di un *gas perfetto di fotoni* (perfetto in quanto i fotoni non interagiscono tra loro).

L'idea dei quanti di luce, per quanto efficace, era tuttavia del tutto rivoluzionaria andando contro il paradigma ben consolidato della teoria elettromagnetica basata sulle equazioni di Maxwell, e in quanto tale ben difficile da accettare. A testimonianza di ciò, citiamo la seguente frase tratta dal discorso di Planck durante la cerimonia di

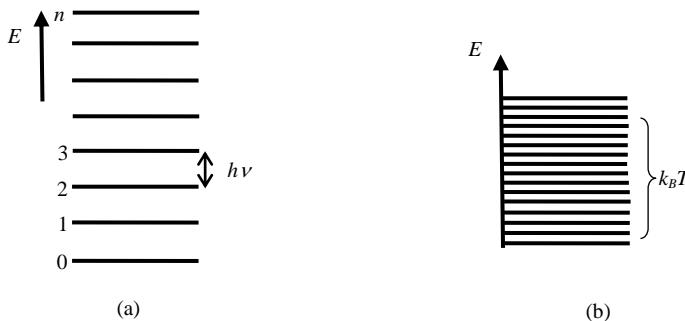
ammissione di Einstein all'Accademia Prussiana delle Scienze (1913): “*Non si vorrà certo ascrivere troppo a colpa di A.E. il fatto che egli abbia occasionalmente mirato troppo in alto sopra il bersaglio, come per esempio con la sua ipotesi dei quanti di luce. Giacché se qualche volta non si vuole rischiare un poco, non si riesce a introdurre alcuna effettiva innovazione nelle scienze esatte*”. In pratica Planck considerava i fotoni come un’idea avventata, se non assurda. E ancora nel 1924, nel suo discorso in occasione del conferimento del premio Nobel (che gli era stato assegnato tra l’altro proprio per gli studi sull’effetto photoelettrico) Millikan diceva: “*Alla luce di questi metodi e risultati credo che la validità dell’equazione di A.E. per l’effetto photoelettrico sia ormai universalmente riconosciuta e a tal fine la realtà dei quanti di luce può considerarsi sperimentalmente accertata. Ma la concezione di quanti di luce localizzati da cui AE ha tratto la sua equazione deve essere considerata ancora ben lontana dall’essere provata*”. Millikan rifiutava l’idea di particelle di luce localizzate, sebbene tale idea portasse a predizioni in completo accordo con l’esperimento. Come sappiamo la storia darà infine ragione a Einstein e i quanti di luce diventeranno una componente fondamentale della fisica.

**4.7.5 Congelamento dei gradi di libertà nei calori specifici.** La quantizzazione dell’energia dell’oscillatore armonico permette anche di dare una risposta soddisfacente al problema del *congelamento dei gradi di libertà* incontrato nella discussione dei calori specifici (*cf.* Par. 2.4.5). Secondo l’ipotesi di Planck (1.3), un oscillatore armonico presenta dei livelli energetici quantizzati separati da un salto pari al quanto di energia  $h\nu$ . D’altra parte, il calore specifico (a volume costante) è definito come la quantità di calore che bisogna fornire a una certa quantità di materiale per innalzarne la temperatura

di un grado:  $C_v = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_v$ . Si tratta cioè di andare a vedere di quanto aumenta l’energia

interna (a volume costante la variazione di energia interna  $\Delta U$  è pari al calore scambiato) di un corpo se si innalza la sua temperatura di  $\Delta T$ , e di farne il rapporto. Dallo schema di Fig. 4.22a si vede però che il sistema può aumentare la sua energia solo a salti, con un incremento minimo pari ad  $h\nu$ . Se si fornisce una quantità di energia minore, con  $\Delta T$  diverso da zero, il sistema non è in grado di assorbirla e la variazione

$\Delta U$  risulta nulla e, essendo  $\Delta U = C_v \Delta T$ , nullo sarà anche il calore specifico. In tali condizioni parleremo di grado di libertà congelato. Abbiamo anche una scala che ci dice qual è la “temperatura di congelamento”: se l’energia termica ( $k_B T$ ), cioè quella che si fornisce innalzando la temperatura, è minore del minimo salto energetico del sistema ( $k_B T < h\nu$ ), allora il grado di libertà è congelato, altrimenti ( $k_B T > h\nu$ ) è attivo. Ovviamente l’essere attivo o meno dipende sia dalla temperatura che dall’ampiezza del salto, cioè dal valore del quanto di energia. Se poi la temperatura è sufficientemente alta e/o il salto sufficientemente piccolo, come in Fig. 4.22b, allora per l’energia dell’oscillatore si può usare il limite (4.17), per cui  $\langle E \rangle_{osc} \rightarrow k_B T$ , il che ci riporta al teorema di equipartizione dell’energia valido in fisica classica.



**Fig. 4.22.** (a) Schema dei livelli energetici di un oscillatore armonico, per cui  $E = nh\nu$ . (b) Sistema con spaziatura tra livelli energetici molto inferiore alla tipica energia termica.

**4.7.6 Calore specifico dei solidi.** Come discusso nel Par. 2.4.5, la legge di Dulong-Petit per il calore specifico dei solidi si discosta notevolmente dai dati sperimentali a bassa temperatura. La discussione precedente chiarisce il motivo di tale discordanza. Fu ancora Einstein, in un lavoro del 1907 che costituisce una delle prime applicazioni delle idee quantistiche (tra l’altro per un *sistema macroscopico*), a ricavare una relazione che rispecchia meglio l’andamento sperimentale che prevede che il calore specifico si annulli quando  $T \rightarrow 0\text{ K}$ . Assumendo per semplicità che i  $3N$  oscillatori costituenti il solido oscillino tutti alla stessa frequenza  $\nu$ , egli utilizzò la (4.14) per l’energia media dell’oscillatore, da inserire nella (2.31) al posto dell’espressione classica derivata dal

teorema di equipartizione dell'energia. In tal modo ottenne per l'energia interna di una mole di solido

$$U = \langle E_{\text{solido}} \rangle = 3N_A \langle E \rangle_{\text{osc}} = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.28),$$

da cui derivando rispetto alla temperatura calcolò il calore specifico molare. Per  $T$  grandi (o meglio per  $h\nu \ll k_B T$ ), si riottiene il risultato classico  $C_v = 3R$ , ma per  $T$  piccole  $C_v$  tende a zero, in accordo con gli esperimenti (*cf.* Fig. 2.15). In realtà il risultato di Einstein prevede che a basse temperature  $C_v$  decresca in maniera esponenziale mentre nei fatti  $C_v \propto T^3$  per  $T \rightarrow 0$ , cioè va a zero molto più lentamente. In effetti in un solido non esiste una sola frequenza di vibrazione (come nell'approssimazione di cui sopra) ma ci sono molte frequenze diverse corrispondenti allo spettro delle onde elastiche che si propagano nel solido. Il tener conto di ciò porta al corretto andamento del calore specifico nei solidi (Debey, 1912). Come le onde elettromagnetiche, anche quelle elastiche (ossia *sonore*) possono essere quantizzate: il quanto corrispondente viene chiamato *fonone*. In analogia a quanto detto per la radiazione in cavità, le vibrazioni in un solido possono essere discusse in termini di un *gas perfetto di fononi*.

**4.7.7 Derivazione dello spostamento Compton.** Consideriamo un urto tra un fotone X e un elettrone del bersaglio (Fig. 4.13) imponendo le condizioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia, utilizzando la cinematica relativistica. Troviamo a tal fine le espressioni dell'energia e della quantità di moto per le due particelle. Per il fotone, particella con massa di riposo nulla, a partire dalla relazione generale (1.4) si ottiene  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \xrightarrow{m=0} E = pc$ . Essendo l'energia del fotone anche pari a  $E = h\nu$ , otteniamo il momento  $p = h\nu/c = h/\lambda$ . Questa, come vedremo meglio nel seguito, è una relazione fondamentale che lega tra loro le proprietà corpuscolari ( $p$ ) e quelle ondulatorie ( $\lambda$ ) di un qualunque sistema. Per quanto riguarda l'elettrone, prima dell'urto lo consideriamo libero (trascuriamo l'energia di legame) e con energia cinetica pressoché nulla, cioè la sua quantità di moto è trascurabile e l'energia è data dalla sola

energia di riposo relativistica,  $p_0^{el} \sim 0$  e  $E_0^{el} \sim mc^2$ . Dopo l'urto il momento è  $\mathbf{p}^{el} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2} = m_v\mathbf{v}$  e l'energia

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{c^2(p^2 + m^2 c^2)} = \sqrt{c^2 \left( \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} + m^2 c^2 \right)} = \\ &= \sqrt{c^2 \frac{m^2 c^2}{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_v c^2 \end{aligned}$$

Notiamo anche che uno dei passaggi precedenti implica che  $m_v^2 v^2 = m_v^2 c^2 - m^2 c^2$ , relazione che verrà comoda fra poco. Riassumendo:

	prima	dopo
<b>fotone</b>	$p_0 = \frac{h\nu_0}{c}$ $E_0 = h\nu_0$	$\longrightarrow$
<b>elettrone</b>	$p_0^{el} = 0$ $E_0^{el} = mc^2$	$\begin{array}{l} p = \frac{h\nu}{c} \\ E = h\nu \end{array}$ $\begin{array}{l} p^{el} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_v v \\ E^{el} = m_v c^2 \end{array}$

Pertanto la conservazione dell'energia si scrive:

$$\begin{aligned} h\nu_0 + mc^2 &= h\nu + m_v c^2 \\ \Rightarrow m_v^2 c^4 &= h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 + m^2 c^4 - 2h^2 \nu_0 \nu - 2hmc^2 \nu + 2h\nu_0 mc^2 \end{aligned}$$

Data la natura vettoriale, le cose sono un po' più complesse per la quantità di moto ( $\mathbf{p}_0 + 0 = \mathbf{p} + \mathbf{p}^{el}$ ). Secondo la regola del parallelogramma per la somma vettoriale, i tre vettori coinvolti (quello iniziale dell'elettrone è nullo) formano un triangolo (Fig. 4.23) e usando il teorema di Carnot si può scrivere:

$$\begin{aligned} m_v^2 v^2 &= \frac{h^2 \nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu^2}{c^2} - 2 \frac{h^2 \nu_0 \nu}{c^2} \cos \theta \\ (m_v^2 v^2 = m_v^2 c^2 - m^2 c^2) \quad \Rightarrow \quad m_v^2 c^4 &= m^2 c^4 + h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \theta \end{aligned}$$

Confrontando le ultime due relazioni si ottiene

$$\begin{aligned} h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 + m^2 c^4 - 2h^2 \nu_0 \nu - 2hmc^2 \nu + 2h\nu_0 mc^2 &= \\ &= m^2 c^4 + h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \theta \end{aligned}$$

da cui eliminando i termini comuni, raccogliendo e semplificando

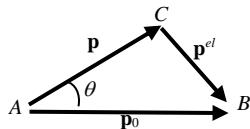
$$(\nu_0 - \nu)mc^2 = h\nu_0\nu(1 - \cos\vartheta).$$

Passando alle lunghezze d'onda ( $\nu = c/\lambda$ ) la relazione diventa

$$c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} mc^2 = h \frac{c^2}{\lambda_0 \lambda} (1 - \cos\vartheta),$$

da cui inserendo lo spostamento Compton  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  si arriva infine alla (4.25)

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad \text{con} \quad \lambda_c = \frac{h}{mc}.$$



**Fig. 4.23.** Conservazione della quantità di moto.  
Dal teorema di Carnot si ricava la relazione:  
 $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{AB} \cos\theta$ .  $\theta$  è l'angolo di diffusione.







Franco Ciccacci

# Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica



€ 35,00

