Comprende versione **ebook**

Oscar **Adriani** • Leonardo **Banchi** • Massimo **Lenti**

# Metodi risolutivi di esercizi di **Meccanica Newtoniana**

EdiSES università

# 4 Urti

I fenomeni di urto riguardano la collisione tra due o più corpi che si scontrano in un piccolo lasso di tempo. Il loro studio richiede varie schematizzazioni che, in generale, vanno studiate caso per caso. Nel piccolo lasso di tempo in cui avviene l'urto si sviluppano delle forze impulsive che possono essere sia interne che esterne al sistema composto dai corpi che collidono. I dettagli microscopici che causano queste forze vengono trascurati, così come eventuali deformazioni dei corpi stessi. L'intero processo viene separato in un *prima* e un *dopo* l'urto e l'obiettivo dell'esercizio è trovare le velocità dei corpi un istante immediatamente dopo l'urto.

Tenuto conto di queste approssimazioni, negli esercizi con urti è fondamentale leggere attentamente il testo dell'esercizio, visto che questo solitamente contiene informazioni cruciali per il corretto svolgimento. Difatti, per schematizzare correttamente il problema è necessario capire quali sono le ipotesi in gioco, ad esempio se si tratta di urto elastico, anelastico o completamente anelastico e quali forze possono essere impulsive. Dopo aver compreso le ipotesi sarà possibile capire quali quantità sono conservate, per esempio energie cinetiche, quantità di moto lungo certe direzioni e/o momenti angolari.

I passi principali per arrivare alla corretta schematizzazione sono i seguenti:

1. Nel caso in cui il testo dell'esercizio non dia come dato le velocità dei corpi immediatamente prima dell'urto, occorre trovare quali siano i vettori velocità dei corpi in tale istante. Ad esempio, nel caso di un urto tra un oggetto fermo ed uno che cade dall'alto, si devo trovare la velocità che il corpo acquista durante la caduta. Si passa poi alla schematizzazione del processo di urto stesso.

2. Si procede facendo un disegno con i due corpi che urtano in contatto tra loro, si disegna il diagramma delle forze come descritto nella sezione 1.2, e si cerca di individuare quali di queste forze, interne od esterne, possono essere impulsive.

   - Tra le forze interne sono sicuramente impulsive quelle di contatto tra i due corpi che collidono.

   - Tra le forze esterne *possono* essere impulsive le reazioni vincolari dovute al contatto tra i corpi in collisione ed oggetti esterni, come piani di appoggio, scalini e perni.

- Nel caso siano presenti forze di attrito, queste possono essere impulsive. Difatti, nel caso statico la forza di attrito $F_{\text{attr}}$ soddisfa $F_{\text{attr}} \leq \mu_s N$ mentre nel caso dinamico $F_{\text{attr}} = \mu_d N$ dove $N$ è la componente normale della reazione vincolare. Se $N$ è impulsiva, allora anche $F_{\text{attr}}$ può o deve essere impulsiva, rispettivamente nel caso di attrito statico o dinamico.

3. Si identificano le quantità conservate dal sistema composto dai due corpi in collisione, ad esempio:

   - Se l'urto è di tipo elastico si conserva l'energia cinetica totale.

   - In mancanza di forze esterne impulsive, si conserva il vettore quantità di moto del sistema. In alternativa, anche in presenza di forze esterne impulsive, se queste hanno componente nulla lungo una particolare direzione identificata dal versore $\hat{u}$, allora la componente della quantità di moto totale lungo $\hat{u}$ si conserva.

   - Se le forze esterne impulsive sono applicate ad un punto $\Omega$, allora si conserva il vettore momento angolare totale rispetto al polo $\Omega$. Più in generale, il momento angolare del sistema rispetto ad un polo $\Omega$ si conserva durante l'urto ogniqualvolta il momento delle forze esterne impulsive rispetto ad $\Omega$ è nullo. Questo può accadere anche quando la forza non è applicata in $\Omega$, ma ha comunque braccio nullo rispetto ad $\Omega$.

4. In alcuni esercizi con più gradi di libertà, le equazioni trovate sfruttando le leggi di conservazione del sistema non sono sufficienti a trovare tutte le componenti delle velocità dei corpi dopo l'urto. In questi casi può essere utile concentrarci sulle forze interne che si sviluppano durante il contatto, valutando se sia possibile prevedere la loro direzione. In caso affermativo, sappiamo che tali forze sono le uniche responsabili della variazione della quantità di moto dei singoli corpi in collisione. Pertanto, si trova che la quantità di moto del singolo corpo lungo le direzioni ortogonali alle forze interne impulsive saranno conservate.

5. Infine, nel caso più complesso in cui non sia possibile identificare un numero sufficiente di quantità conservate, si procede studiando direttamente le equazioni cardinali per i singoli costituenti del sistema, trascurando le forze non impulsive in modo da trovare relazioni tra le quantità in gioco.

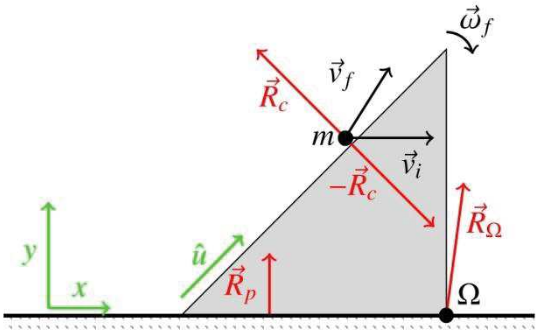



***Figura 6:*** *Un punto materiale di massa m e velocità iniziale $\vec{v}_i$ orizzontale urta in modo elastico contro un cuneo triangolare vincolato a ruotare senza attrito attorno al polo Ω. Per effetto dell'urto il punto materiale acquista una velocità finale $\vec{v}_f$, mentre il cuneo inizia a ruotare attorno a Ω con velocità angolare $\vec{\omega}_f$. Non sono presenti forze di attrito. Nel disegno vengono anche mostrate le reazioni vincolari, interne od esterne, che potrebbero essere impulsive: la forza interna $\vec{R}_c$ di contatto tra m ed il cuneo, la reazione vincolare $\vec{R}_p$ del piano d'appoggio orizzontale sul cuneo e la reazione $\vec{R}_\Omega$ del perno su cuneo, quest'ultima di direzione ignota.*

Come esempio si consideri il problema mostrato in figura 6. Il problema richiede il calcolo di tre quantità incognite: $\omega_f$, ossia l'unica componente non nulla del vettore $\vec{\omega}_f$, lungo l'asse $z$ ortogonale al piano $xy$, e le componenti $v_{fx}$ e $v_{fy}$ del vettore velocità finale $\vec{v}_f = v_{fx}\hat{\imath} + v_{fy}\hat{\jmath}$ del punto materiale. Per risolvere il problema servono quindi tre equazioni, che possono essere identificate nel modo seguente, considerando sia le ipotesi dell'esercizio che le forze impulsive:

1. La prima equazione viene dall'assunzione di urto elastico, per la quale l'energia cinetica del sistema composto da cuneo e punto materiale si conserva durante l'urto

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{fx}^2 + v_{fy}^2\right) + \frac{1}{2}I_\Omega\omega_f^2,$$

   dove $I_\Omega$ è il momento d'inerzia del cuneo rispetto ad un asse passante per $\Omega$ e ortogonale al piano $xy$.

2. Considerando il sistema composto da cuneo e punto materiale, le reazioni vincolari esterne sono solo $\vec{R}_p$ e $\vec{R}_\Omega$. Vista la natura dell'urto, ci aspettiamo che $\vec{R}_\Omega$ sia impulsiva e che $\vec{R}_p$ non lo sia. Difatti, ci

aspettiamo che il cuneo dopo l'urto inizi a ruotare a causa del vincolo introdotto dal perno. In assenza di tale vincolo, il cuneo probabilmente traslerebbe lungo la direzione orizzontale. Siccome il cuneo si oppone a questo tipo di moto, la forza $\vec{R}_\Omega$ sarà sicuramente impulsiva. La componente orizzontale della quantità di moto sicuramente non sarà conservata durante l'urto, mentre per quanto riguarda la componente verticale il discorso è più complesso, data la presenza dell'altra forza $\vec{R}_p$. In generale, non potendo prevedere quale sia la direzione di $\vec{R}_\Omega$, non possiamo scrivere un'equazione di conservazione per la quantità di moto lungo una direzione particolare. Per quanto riguarda il ruolo di $\vec{R}_p$, per la geometria del problema ci *aspettiamo* che $\vec{R}_p$ non sia impulsiva. Difatti, ci aspettiamo che l'urto faccia ruotare in senso orario il cuneo e la forza $\vec{R}_p$ né aiuta né si oppone a questa rotazione. Pertanto, considerando che la sola forza esterna impulsiva è applicata ad $\Omega$, possiamo imporre che il momento totale della quantità di moto del sistema rispetto ad $\Omega$ si conservi durante l'urto:

$$(P-\Omega)\times m\vec{v}_i = (P-\Omega)\times m\vec{v}_f + I_\Omega\vec{\omega}_f,$$

dove $P$ identifica la posizione di $m$ nel momento in cui avviene l'urto.

Diverso sarebbe stato il ruolo di $\vec{R}_p$ nel caso in cui l'urto fosse avvenuto in un punto più in basso del cuneo, ad esempio nelle vicinanze dello spigolo di sinistra. In tal caso l'urto avrebbe favorito la rotazione del cuneo in senso antiorario, ma tale rotazione sarebbe stata impossibile a causa del piano di appoggio. In questo secondo caso quindi ci saremmo potuti aspettare che $\vec{R}_p$ fosse impulsiva e che il momento totale della quantità di moto rispetto a $\Omega$ non fosse conservato.

3. Avendo considerato il sistema composto da cuneo e punto materiale siamo stati in grado di scrivere soltanto due equazioni scalari, a fronte delle tre richieste per risolvere il problema. Difatti, il momento della quantità di moto risulta non-banale solo nella direzione ortogonale al piano $xy$. Per trovare una terza equazione è necessario abbandonare la schematizzazione di sistema e concentrarci sui singoli corpi che lo compongono. Viste le reazioni vincolari in gioco, è più semplice concentrarci sul punto materiale, dato che questo subisce la sola forza impulsiva $\vec{R}_c$. Tale forza non è stata considerata nei due punti precedenti in quanto interna al sistema composto da cuneo e punto materiale. Date le ipotesi dell'esercizio, in cui vengono trascurate tutte le forze di attrito, sappiamo che $\vec{R}_c$ è normale al piano del cuneo.

Siccome tale forza è l'unica capace di cambiare la quantità di moto del punto materiale, possiamo concludere che la quantità di moto del punto materiale lungo la direzione $\vec{u}$ parallela al piano inclinato definito dal cuneo si conservi durante l'urto

$$m\vec{v}_i \cdot \hat{u} = m\vec{v}_f \cdot \hat{u}.$$

In conclusione, avendo considerato le ipotesi del problema e le leggi di conservazione compatibili con le forze impulsive in gioco, siamo stati in grado di scrivere un numero di equazioni sufficienti a risolvere il problema. La loro risoluzione esplicita viene lasciata per esercizio.

# 5 Esercizi

## Dinamica del Punto Materiale. Esercizio n.1 "Molla e Urto"

(Forza Elastica, Urti, Conservazione dell'Energia, Traiettoria Ellittica)

Si consideri il sistema descritto nella Figura di sinistra, composto da un punto materiale di massa $m$, collegato a un estremo di una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla è sospeso al soffitto nel punto $O$.

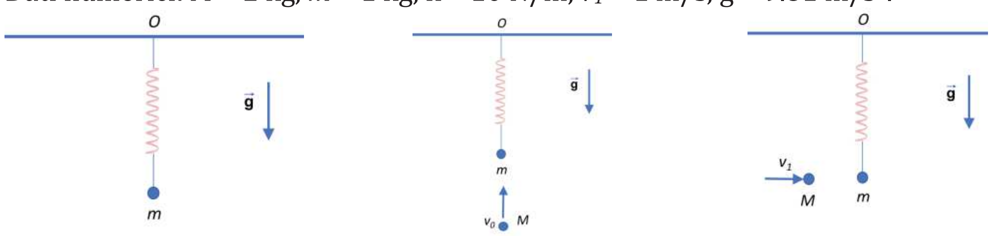
a) Si determini la lunghezza della molla nella posizione di equilibrio.

b) In una seconda fase la massa $m$ viene urtata in maniera completamente anelastica da un punto materiale di massa $M$, che si muove con una velocità $v_0$ diretta lungo la verticale (vedi Figura centrale). Si determini il minimo valore della velocità $v_0$ ($v_0^{min}$) affinché la massa $m$ urti il soffitto.

c) Si consideri ora $v_0 = v_0^{min}/2$. Si studi il moto della massa $m$, determinandone in particolare la legge oraria.

d) Si consideri la situazione descritta nella figura di destra, in cui la massa $m$ viene urtata in maniera completamente anelastica da un punto materiale di massa $M$, che si muove con una velocità $v_1$ diretta lungo l'orizzontale. Si studi il moto della massa $m$, determinandone le leggi orarie per il moto lungo la verticale e lungo l'orizzontale, e determinandone la traiettoria.

Dati numerici: $M$ = 2 kg, $m$ = 1 kg, k = 10 N/m, $v_1$ = 1 m/s, g = 9.81 m/s$^2$.




### Soluzione

a) Sulla massa $m$ agiscono la forza peso e la forza elastica. All'equilibrio la risultante delle forze deve essere nulla. Scelto l'asse X verticale verso il basso con origine in O

$$-kx_{eq} + mg = 0, \qquad x_{eq} = \frac{mg}{k} = 0.981\ m$$

b) La forza peso e la forza elastica non sono forze impulsive e possiamo considerare l'urto unidimensionale con conservazione della quantità di moto totale lungo l'asse X. Essendo l'urto completamente anelastico

$$Mv_0 = (M+m)v_{m+M}, \qquad v_{m+M} = \frac{M}{M+m}v_0$$

Per trovare la velocità minima perché $m$+$M$ raggiunga il soffitto possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto imponendo che $m$+$M$ arrivi al soffitto con velocità nulla

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{m+M}^2 + \frac{1}{2}kx_{eq}^2 - (m+M)gx_{eq} = 0$$

$$|v_0^{min}| = \frac{m+M}{M}\sqrt{2gx_{eq} - \frac{k}{m+M}x_{eq}^2} = \frac{g}{M}\sqrt{\frac{m(m+M)(2M+m)}{k}} = 6.01\ m/s$$

diretta in senso opposto all'asse X, $v_0^{min} = -|v_0^{min}|$.

c) Usiamo ancora la conservazione dell'energia ma questa volta con $v_0 = v_0^{min}/2$

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - (m+M)gx + \frac{1}{2}kx^2$$

Deriviamo rispetto al tempo ($E$ è una costante), dividiamo per $\dot{x}$ e semplifichiamo

$$\ddot{x} + \omega^2 x - g = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

É un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui soluzione è data dalla somma della soluzione dell'omogenea associata (equazione del moto armonico) e dalla soluzione particolare.

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{(m+M)g}{k}$$

Le costanti di integrazione si determinano con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_{eq} = \frac{mg}{k} = B + \frac{(m+M)g}{k} \qquad B = -\frac{Mg}{k}$$

$$\dot{x}(0) = \frac{M}{m+M}\frac{v_0^{min}}{2} = -\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m(2M+m)}{k(m+M)}} = A\omega \qquad A = -\frac{g}{2k}\sqrt{m(2M+m)}$$

d) Subito dopo l'urto anelastico la velocità è $v_{10} = \frac{M}{m+M}v_1$ diretta orizzontalmente.

Scegliamo l'asse X sempre verticale verso il basso e l'asse Y orizzontale verso destra. Le equazioni di moto sono

$$(m+M)\ddot{x} = -kx + (m+M)g$$
$$(m+M)\ddot{y} = -ky$$

le cui soluzioni sono

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) + \frac{(m+M)g}{k}, \quad y = A_y \sin(\omega t + \varphi_y), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

Le costanti di integrazione si determinano con le condizioni inziali

$$x(0) = x_{eq} = \frac{mg}{k}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_{10} = \frac{M}{m+M} v_1$$

da cui $\varphi_x = \varphi_y = 0$, $A_x = -\frac{Mg}{k}$, $A_y = \frac{Mv_1}{\sqrt{k(m+M)}}$

La traiettoria è un'ellisse di asse maggiore $A_x$, asse minore $A_y$ centrato in $x = \frac{(m+M)g}{k}$

$$\left(\frac{x - \frac{(m+M)g}{k}}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1$$

## Dinamica dei Sistemi. Esercizio n.1 “Carrucola Mobile”

(Forza Elastica, Momento d’Inerzia, Conservazione dell’Energia, Rotolamento Puro)

Si consideri il sistema mostrato nella figura a sinistra, composto da una massettina di massa $m$, una carrucola ideale, un disco di massa $M$ e raggio $R$ ed una molla ideale di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla. Il disco è fissato al perno $O$ e può ruotare senza attrito attorno ad esso. L’elongazione massima della molla è minore della distanza di O dal soffitto. Un filo ideale (inestensibile e di massa trascurabile) collega la massettina $m$ alla carrucola, al disco, ed infine alla molla come mostrato in figura. L’altra estremità della molla è fissata al soffitto.

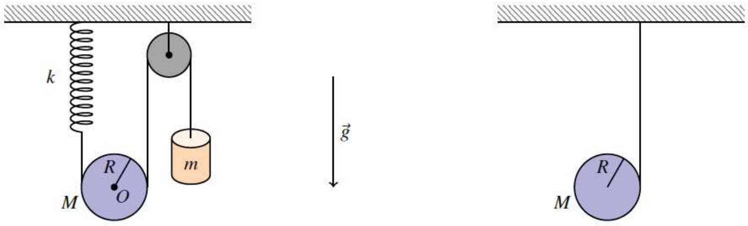
Assumendo che il filo non slitti attorno al disco, si calcolino:

a) l’allungamento della molla quando il sistema si trova all’equilibrio;
b) il periodo di oscillazione del sistema nell’ipotesi che inizialmente la massettina $m$ sia stata spostata di un tratto $\Delta y$ verso il basso rispetto alla posizione di equilibrio trovata nel punto a);
c) le tensioni nei vari punti del filo, nelle ipotesi del punto b), quando la massettina $m$ si trova nel punto più alto della sua traiettoria.

Si faccia ora riferimento alla figura di destra, dove il vincolo in O è stato rimosso. In questo caso il filo è arrotolato attorno al disco e fissato al soffitto nell’altra estremità.

d) Notando che durante la caduta del disco il filo si srotola, si calcoli l’accelerazione del centro di massa del disco.

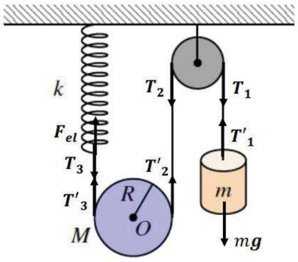
Dati numerici: $m$ = 1 kg, $M$ = 2 kg, $R$ = 10 cm, $k$ = 98 N/m, $\Delta y$ = 5 cm.




### Soluzione

a) Le condizioni di statica applicate al filo ideale impongono che le forze agli estremi di ogni suo segmento si compensino, inoltre la massettina $m$ deve essere in equilibrio. Abbiamo quindi per i moduli delle forze $F_{el} = T_1 = T_2 = mg$. Scegliendo l’asse Y verticale discendente con l’origine nel punto di riposo della molla $ky_{eq} = mg$ da cui

$$y_{eq} = \frac{mg}{k} = 0.1\ m$$




b) Utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica del sistema

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}ky^2 - mgy$$

dove $I$ è il momento d'inerzia del disco, $W$ la sua velocità angolare con la condizione cinematica di rotolamento puro $v$=$RW$ con $v$ velocità di $m$. Utilizzando il risultato di a) possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}k\left(y - y_{eq}\right)^2 + cost.$$

È formalmente analogo ad un oscillatore armonico di pulsazione $\omega^2 = \frac{k}{m+\frac{I}{R^2}} = \frac{k}{m+\frac{M}{2}}$ per cui il periodo di oscillazione è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}} = 0.9\ s$$

c) Per quanto riguarda i moduli delle forze $T_3 = F_{el} = ky$, $T_2 = T_1 = m(g - \ddot{y})$

La posizione di equilibrio è nota dal punto a), da cui $\ddot{y} + \omega^2\left(y - y_{eq}\right) = 0$

Data la posizione iniziale $Dy$ rispetto alla posizione di equilibrio la soluzione è

$$y = \Delta y \cos \omega t + y_{eq}$$

La quota massima di m è raggiunta per $t = t^* = \pi/\omega$ e vale $y^* = y(t^*) = -\Delta y + y_{eq}$ a cui corrisponde l'accelerazione $\ddot{y}^* = \ddot{y}(t^*) = \omega^2 \Delta y$.

Abbiamo quindi $$T_3 = ky^* = k\left(y_{eq} - \Delta y\right) = 4.9\ N$$

$$T_1 = T_2 = mg - m\omega^2 \Delta y = 7.35\ N$$

Oscar **Adriani** • Leonardo **Banchi** • Massimo **Lenti**

# Metodi risolutivi di esercizi di **Meccanica Newtoniana**

Accedi ai **contenuti digitali** › **Espandi** le tue risorse › con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**


All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai **contenuti digitali**.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

EdiSES università

ISBN 978-88-3623-241-3