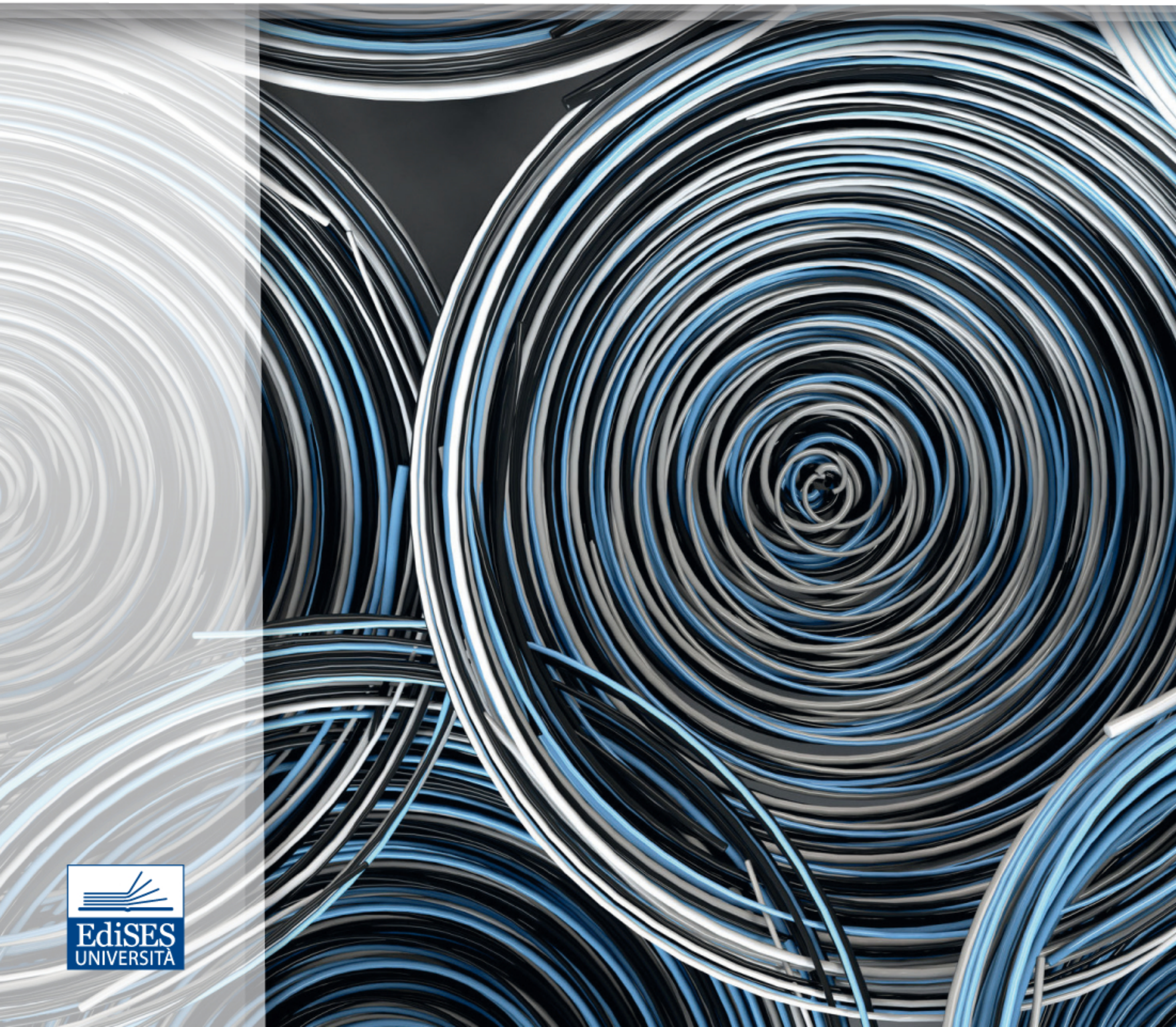
Luigi Verolino

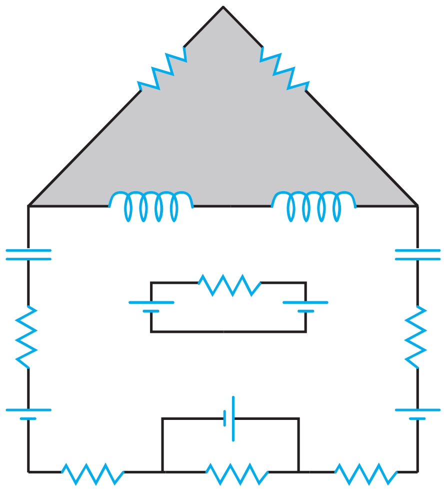
Esercizi e Complementi sulle Reti Elettriche



EdiSES UNIVERSITÀ

ESERCIZI E COMPLEMENTI SULLE RETI ELETTRICHE

Luigi Verolino



Ohm sweet Ohm

EdiSES UNIVERSITÀ

Esercizi e Complementi sulle Reti Elettriche

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2024 2023 2022 2021 2020

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Fotocomposizione:
doma book di Di Grazia Massimo – Napoli

Stampato presso PrintSprint S.r.l. – Napoli

per conto della
Edises Università S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edisesuniversita.it

ISBN 978 88 3623 016 7

INDICE GENERALE

PRESENTAZIONE DEL TESTO

Questo eserciziario è pensato per lo studente che sia già in possesso degli elementi teorici di base: esso vuole dunque mostrare, attraverso esercizi svolti e da svolgere, come si risolvano le reti elettriche o, in altri termini, come si utilizzi concretamente il modello circuitale. Ogni capitolo inizia con un succinto richiamo delle basi teoriche e la presentazione di un argomento affine, mutuato da altre discipline (Fisica, Matematica, Geologia ecc.), con il preciso scopo di mostrare come la gran parte dei metodi utilizzati in questo testo forniscano una base comune anche ad altre discipline.

Ciascun esercizio è pensato come una unità di lavoro e di approfondimento ed offre un esempio dettagliatamente svolto e uno da svolgere, analogo all'esempio svolto o finalizzato all'approfondimento di argomenti matematici, come ad esempio i numeri complessi.

Alcuni degli esercizi proposti sono semplici e basilari, altri, forse la maggior parte, richiedono un certo impegno da parte dello studente, essendo rivolti a chi abbia già affrontato lo studio dei concetti di base. Questi esercizi consentono di effettuare una puntuale verifica di quanto appreso durante lo studio teorico, offrendo all'allievo l'opportunità di allenarsi nella risoluzione delle reti elettriche. In fondo al volume viene fornito un piccolo dizionario di termini anglosassoni, generalmente utilizzati nel linguaggio tecnico e scientifico.

Di tutti gli esercizi proposti viene fornita la risposta e talvolta anche alcuni suggerimenti sul procedimento di risoluzione, nella convinzione che sia compito del docente guidare l'allievo nella soluzione. Per questo motivo, si ritiene che gli esercizi più difficili possano essere proposti per lavori di gruppo o discussi dal docente, al fine di illustrare passaggi teorici particolarmente complicati, che vale sempre la pena approfondire con un buon esempio. Nella pratica professionale, gli ingegneri sono spesso chiamati a risolvere problemi che non sono già stati compiutamente risolti, sia che si cerchi di migliorare le prestazioni di un sistema già esistente, sia che si cerchi di costruirne uno nuovo. Da studenti, invece, si risolvono problemi che hanno già una risposta, magari confrontando il procedimento adottato con la soluzione proposta.

La complessità del modello circuitale e le conoscenze matematiche connesse crescono progressivamente passando da un capitolo all'altro: l'algebra dei sistemi lineari reali è utile nello studio dei circuiti in corrente continua, quella dei sistemi nel campo dei numeri complessi aiuta la soluzione dei circuiti in regime sinusoidale, mentre la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e la trasformata di Laplace sono strumenti indispensabili per lo studio dei cosiddetti transitori.

Seguendo questo percorso, al lettore viene fornito un modello via via più completo dei circuiti elettrici: partendo da casi particolari e più semplici, si arriva allo studio dei casi più generali e di conseguenza più complicati. La strada scelta ha l'unico scopo di essere quella più agevole didatticamente.

Durante la preparazione, molta attenzione è stata spesa per tenere distinti gli aspetti matematici dal modello fisico. Di conseguenza, per facilitare la piena comprensione delle questioni applicative proposte, la sezione di *Complementi* in fondo ad ogni capitolo richiama la matematica necessaria. Ad esempio, nel capitolo relativo ai circuiti in regime sinusoidale è stato inserito un corposo richiamo all'algebra dei numeri complessi, spesso trascurata in altri corsi; allo stesso modo, lo studio dei circuiti con il metodo della trasformata di Laplace deve essere preceduto dalla conoscenza della scomposizione in frazioni parziali. Tuttavia, vale la pena sottolineare che tutti i richiami proposti, per quanto precisi ed efficaci, possono risultare inutili, se non dannosi, per il lettore che non abbia maturato bene i concetti acquisiti nei corsi di Analisi matematica e di Fisica, che rappresentano prerequisiti fondamentali per una buona comprensione dei modelli e dei metodi che l'Elettrotecnica propone.

In ogni caso, per il lettore attento sono stati raccolti alcuni argomenti fondamentali, talvolta trascurati nella preparazione degli allievi ingegneri, ma indubbiamente di fondamentale importanza per le applicazioni. Ciascuno di questi argomenti ha rappresentato una svolta determinante nella Matematica, svolta che ha avuto quale benefica ricaduta la soluzione di tantissimi problemi. Ogni argomento è svolto in maniera piana e comprensibile, proponendo diversi esempi, e inizia con la presentazione di un personaggio chiave. È opinione diffusa che le discipline, come pure gli argomenti della disciplina stessa, siano più comprensibili solo quando vengano proposti in una prospettiva storico-critica e che, specialmente per gli ingegneri, 'sapere' significhi 'saper fare'. Si è posta particolare enfasi sui numeri complessi, presenti in gran parte di questo volume sotto forma di esercizi.

Per stimolare ulteriormente la curiosità dei lettori più esigenti, vengono forniti anche spunti di riflessione che travalicano i confini dell'Elettrotecnica, al fine di creare una coscienza sempre più attenta e critica in tutti quegli studenti che formeranno la futura classe dirigente del nostro paese.

È noto che gli antichi Greci, padri fondatori della civiltà occidentale, svilupparono il loro pensiero sui fenomeni della natura e sulla logica sottostante alle attività pratiche in uso presso le civiltà circostanti, tra cui quelle in Egitto e in Mesopotamia, elevando, in tal modo, la ragione a faro di ogni conoscenza. Dalla simbiosi di ragione e conoscenza ebbe origine la Matematica, con il suo valore formativo irrinunciabile. In accordo con quanto scriveva Aristotele nell'*Etica nicomachea*, un testo dedicato a suo figlio Nicomaco: «ciò che dobbiamo imparare a fare, lo impariamo facendo», occorre esercitarsi di continuo su quanto si è studiato, per acquistare piena padronanza. Per questo motivo ogni capitolo termina con alcuni esercizi da svolgere, posti in ordine di difficoltà crescente.

D'altra parte, la formazione di professionisti in grado di affrontare l'analisi di sistemi complessi, nei quali confluiscono competenze provenienti da differenti discipline, armonizzando solide conoscenze scientifiche di base con la padronanza di metodologie e tecnologie avanzate, è uno degli obiettivi chiave di ogni laurea tecnica e scientifica. Inoltre, non bisogna mai dimenticare, specialmente nella soluzione degli esercizi proposti, il seguente consiglio di Guglielmo di Ockham, un frate francescano, teologo e filosofo inglese, ovvero

(...) *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.*

In pratica, ai fini della risoluzione di un problema, egli suggerisce di scegliere l'ipotesi più semplice tra le varie disponibili, evitando di moltiplicare i fattori oltre il necessario. In questo consiste il famoso 'rasoio di Occam': un procedimento con cui l'intelletto umano si libera delle astrazioni superflue. Un principio che sta alla base del pensiero scientifico moderno.

Guglielmo di Ockham (oppure Ockham), 1288 – Monaco di Baviera, 1347

La scelta degli argomenti, dei *topics* (come dicono negli USA), è dettata sicuramente dalle precedenti considerazioni, ma è anche legata ai gusti e alla formazione di chi scrive.

Non esiste alcuna ricetta che possa insegnare a mettere a punto una efficace strategia vincente per arrivare alla corretta soluzione di un problema. Si ritiene utile, tuttavia, riportare qui alcuni consigli generali, per semplificare l'elaborazione di formule e calcoli e per organizzare le idee prima di affrontare il problema.

- Si cerchi con fiducia la risposta al problema in ciò che si è imparato; durante le lezioni, è stato certamente proposto uno schema coerente e completo della materia, il solo che può aiutare a trovare la strada per risolvere il problema.
- Si identifichino i dati assegnati e i valori da determinare. Domandarsi cosa chieda il problema vuol dire avere esaminato con cura il testo, cercando in esso eventuali informazioni nascoste.
- Cercare il metodo di soluzione più adeguato consente di risparmiare tempo. Si deve spesso scegliere tra diverse vie per risolvere un certo problema: un metodo può richiedere meno equazioni da risolvere rispetto a un altro o può richiedere soltanto calcoli algebrici.

- Si pianifichi il metodo da utilizzare e le corrette equazioni da scrivere, portando avanti i calcoli a livello letterale quanto più è possibile: un'equazione scritta in simboli si verifica facilmente per mezzo di una verifica dimensionale dei diversi termini.
- Quando si sviluppa un passaggio non bisogna mai farlo meccanicamente, ma soffermandosi a riflettere sul ruolo che esso assume nello sviluppo logico del ragionamento che si sta portando avanti.
- Domandarsi se la soluzione trovata abbia senso, se sia fisicamente realistica e se l'ordine di grandezza sia ragionevole rappresenta un utile controllo: la cosa migliore sarebbe risolvere nuovamente il problema con un metodo alternativo, ma, si sa, il tempo è tiranno! Controllare il risultato ottenuto aiuta a sviluppare un certo senso critico verso i vari metodi di soluzione, nonché l'intuizione.

Prima di concludere, un'ultima raccomandazione legata più specificamente agli esercizi di Elettrotecnica che di qui a poco si inizierà a svolgere: si faccia sempre un accurato disegno del circuito, aggiungendo ad esso tutte le informazioni e i riferimenti che sembrano opportuni. Qualche volta, può aiutare un nuovo disegno del circuito, che operi opportune semplificazioni.

Infine, si faccia molta attenzione, dal momento che problemi apparentemente semplici possono rivelarsi assai complicati. Ad esempio, volendo determinare le radici dell'equazione trascendente

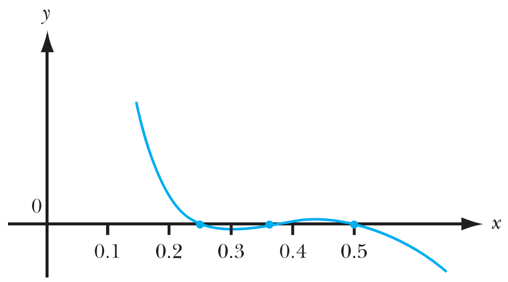
$$\log_{1/16} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x ,$$

si può giungere alla errata conclusione che essa ammette un'unica radice, trattandosi di due funzioni sempre decrescenti. Invece, il semplice esame grafico della funzione differenza

$$y = \log_{1/16} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

mostra l'esistenza di tre radici

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 \cong 0.36442, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$



Si mediti attentamente sull'esempio fornito; a tutti gli studenti e docenti che, utilizzando questo testo, renderanno possibile successive edizioni, auguro un proficuo lavoro.

Avvertenza

In questo testo si utilizza il Sistema Internazionale (SI) di misura. Per snellire ulteriormente la notazione delle diverse grandezze, una tensione di 30 *volt* verrà semplicemente indicata con 30, senza riportare esplicitamente l'unità di misura. Qualora si tratti di multipli o sottomultipli, il valore della grandezza verrà riportato con l'unità di misura. In tal modo, si indicherà con 30 $k\Omega$ una resistenza di 30000 Ω.

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

4

Il mondo che abbiamo intorno, e che è lo stesso per tutti, non lo creò nessuno degli dei o degli uomini, ma fu, è e sempre sarà fuoco vivente. Un bel fuoco che divampa e si spegne secondo misura.
Eraclito [Efeso, 535 a.C. - Efeso, 475 a.C.]

Questo quarto capitolo sviluppa esercizi sul *regime sinusoidale*, quel particolare regime lineare e tempo-invariante, che si instaura in una rete elettrica una volta che il transitorio si sia estinto, quando le tensioni e le correnti impresse dai generatori acquisiscono un andamento sinusoidale nel tempo della stessa frequenza. In termini matematici, questo studio consiste nella ricerca della soluzione sinusoidale dell'equazione lineare a coefficienti costanti che descrive il circuito quando il forzamento è una sinusoide di assegnata pulsazione; tale studio è talmente rilevante dal punto di vista tecnico, da giustificare l'ampiezza della trattazione che segue.

L'interesse per questo tipo di funzionamento deriva essenzialmente da due fatti. I generatori di energia elettrica più importanti sono da ricercarsi fra le macchine elettriche rotanti, la cui natura comporta la periodicità della forza elettromotrice generata e, di conseguenza, la possibilità di scomporla, secondo le ben note serie di Fourier, in una serie di armoniche, ciascuna delle quali è una funzione sinusoidale del tempo. Poco importa come sia fatto un generatore elettrico rotante: è naturale attendersi che, in generale, a una periodicità di tipo geometrico, ovvia conseguenza della rotazione, debba corrispondere una periodicità elettromagnetica e, quindi, della tensione o della corrente generata.

Quando si progetta, e poi si costruisce, un generatore di tensione o di corrente alternata si fa sempre in modo da rendere trascurabili le armoniche superiori rispetto alla *prima armonica*, la cosiddetta *fondamentale*, cosicché è un'accettabile approssimazione considerare la grandezza generata come rigorosamente sinusoidale. In ogni caso, ci si può sempre ricondurre a una situazione in cui sia presente una sola armonica, anche se il generatore ne produce più di una, sovrapponendo gli effetti prodotti dalle singole armoniche (nell'ipotesi di linearità della rete).

Un generatore di tensione o di corrente può rappresentare anche un segnale da elaborare. In questo caso, anche se non sono sinusoidali, le forme d'onda possono comunque essere rappresentate dalla sovrapposizione di un insieme discreto o continuo di funzioni sinusoidali con diverse pulsazioni. Ancora una volta, per la supposta linearità della rete, ci si può sempre ricondurre al caso in cui sia presente una sola armonica a cui sommare successivamente le singole risposte ottenute.

Ciò premesso, prima di passare alla effettiva soluzione degli esercizi proposti, vale la pena richiamare alcune definizioni relative a una generica funzione sinusoidale del tempo di periodo T,

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha),$$

in cui A_M viene detta *ampiezza* o *valore massimo*. La *frequenza* f e la *pulsazione angolare* ω sono legate al periodo dalle relazioni

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Il valor medio, che per una grandezza alternata è nullo, è definito dall'integrale

$$A_{MEDIO} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a(t)\,dt \qquad \forall t_0,$$

mentre il valore efficace A per una funzione periodica, definito in generale come

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)\,dt} \qquad \forall t_0,$$

nel caso di una grandezza sinusoidale è legato al valore massimo A_M dalla relazione

$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}},$$

come si può facilmente dimostrare.

Si consideri, quale esempio, un punto materiale che si muove lungo l'asse x secondo la legge oraria

$$x(t) = a\sin^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right),$$

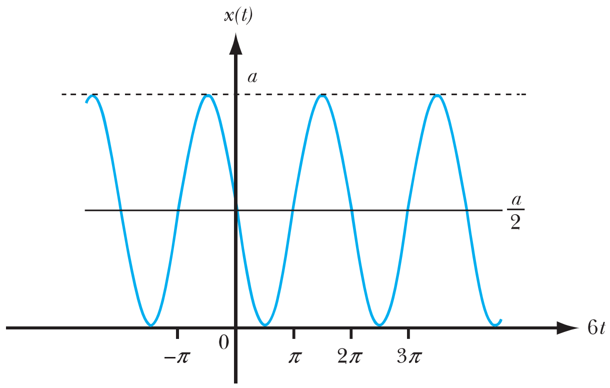
dove a è una costante positiva. Si desidera determinare l'ampiezza dell'oscillazione, il suo periodo e l'istante in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

Per rispondere ai quesiti proposti, conviene preliminarmente osservare che, essendo

$$0 \le \sin^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \qquad \forall t,$$

si può concludere che si tratta di un moto periodico, in cui

$$0 \le x(t) \le a.$$



Ebbene, in forza della formula di duplicazione del coseno

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \;\rightarrow\; \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2},$$

la legge oraria si può scrivere nella forma equivalente

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos\left(6t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin(6t),$$

da cui si deduce immediatamente che il periodo vale

$$6t = 2\pi \;\rightarrow\; t = \frac{\pi}{3},$$

e il valor medio è

$$X_{MEDIO} = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} x(t)\,dt = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin(6t)\,dt = \frac{a}{2}.$$

Si conclude allora che il moto periodico assegnato ha un'ampiezza pari ad $a/2$, mentre l'istante t_M in cui si raggiunge il primo massimo, essendo $x(a) = a$, si ottiene ponendo

$$\sin(6t_M) = -1 \;\rightarrow\; 6t_M = \frac{3\pi}{2} \;\rightarrow\; t_M = \frac{\pi}{4}.$$

Il motore matematico che anima l'analisi delle reti elettriche in regime sinusoidale è costituito dall'algebra dei numeri complessi, di cui si offre un richiamo nella sezione Complementi in fondo a questo capitolo. L'utilità dei numeri complessi è praticamente illimitata, sia nel campo della Matematica pura sia in quello della Matematica applicata, della Fisica e della tecnologia, e ciò rende impossibile, nello spazio imposto da questa pubblicazione, passarli compiutamente in rassegna. Tuttavia, vale la pena fare almeno un cenno, per preparare lo studente ad alcuni argomenti che approfondirà nel prosieguo dei suoi studi.

Analisi complessa

Lo studio delle funzioni complesse di variabili complesse è chiamata analisi complessa e è ampiamente utilizzata nella Matematica applicata e nella teoria dei numeri, oltre che in altre branche della Matematica. Spesso, le dimostrazioni più semplici per gli enunciati dell'analisi reale, o persino della teoria dei numeri, impiegano le tecniche dell'analisi complessa. Diversamente dalle funzioni reali, che sono rappresentate comunemente come grafici bidimensionali, le funzioni complesse hanno grafici a quattro dimensioni, nei quali si usa il colore per rappresentare la quarta dimensione. Si possono anche usare delle animazioni per mostrare la trasformazione dinamica di una funzione complessa nel piano complesso. Inoltre, nell'analisi complessa viene impiegato il *teorema dei residui* per calcolare alcuni integrali impropri di difficile soluzione nel campo reale.

Altre applicazioni matematiche

Nello studio delle equazioni differenziali lineari, normalmente si procede determinando tutte le radici dell'equazione caratteristica e poi si risolve il sistema in termini di opportune funzioni basilari. Alcuni frattali, come ad esempio l'insieme di Mandelbrot e il frattale di Ljapunov, utilizzano i numeri complessi per tracciare le funzioni.

Elettrotecnica

I segnali elettrici e elettronici più importanti sono quelli sinusoidali, detti anche alternati, non soltanto perché la tensione di rete, con cui si alimentano tutti gli elettrodomestici, è una tensione alternata (di valore efficace pari a 230 *volt*), ma soprattutto perché qualsiasi segnale periodico si può ottenere dalla sovrapposizione di infiniti segnali sinusoidali con frequenza multipla rispetto alla frequenza del segnale di partenza, le cosiddette *armoniche del segnale*.

Una **segnale sinusoidale** è una funzione periodica, che assume gli stessi valori a intervalli di tempo regolari, detti *periodi* (T). L'inverso del periodo si chiama *frequenza* e si misura in *hertz*. In Europa, ad esempio, la tensione di rete è sinusoidale con frequenza 50 *Hz*.

I valori della funzione sono compresi fra un valore massimo positivo e un valore minimo negativo, mentre il valore medio della funzione è nullo, giustificando il nome di 'grandezze alternate' o 'alternative'.

Il valore massimo è in relazione al valore efficace, che si ottiene estraendo la radice quadrata della media dei quadrati dei valori della funzione in un periodo. Il valore efficace è a sua volta in relazione con gli effetti termici che si ottengono quando una tensione alternata è applicata ai capi di un conduttore, con il conseguente passaggio di corrente alternata.

I circuiti operanti in regime sinusoidale si possono studiare facilmente per mezzo del *metodo simbolico*, che stabilisce una corrispondenza tra le funzioni sinusoidali e i numeri complessi. Ora, dal momento che l'algebra dei numeri complessi è abbastanza semplice, lo studio del circuito risulta quasi immediato.

Meccanica quantistica

Il campo dei numeri complessi rappresenta una componente essenziale della meccanica quantistica poiché la teoria è sviluppata in uno spazio di Hilbert a infinite dimensioni, derivato appunto dal campo dei numeri complessi.

Relatività

Nella relatività generale e nella relatività speciale, alcune formule dello spazio metrico si semplificano, se si suppone che la variabile temporale sia una variabile immaginaria.

Dinamica dei fluidi

Nella dinamica dei fluidi i numeri complessi vengono utilizzati per descrivere il flusso potenziale in due dimensioni.

Teoria del controllo

Nella teoria del controllo, i sistemi definiti nel dominio del tempo vengono trasformati in sistemi definiti nel dominio delle frequenze, tramite la *trasformata di Laplace*: i poli e gli zeri del sistema vengono dunque analizzati nel piano complesso. Dal piano complesso si estrae il luogo delle radici, il diagramma di Nyquist e il diagramma di Nichols, che vengono utilizzati per studiare le proprietà del sistema. Il luogo delle radici, in particolare, è molto importante perché, a seconda di dove si trovano i poli e gli zeri, consente di determinare la stabilità o l'instabilità del sistema. Se, in un tale diagramma, i poli hanno la parte reale:

- positiva, il sistema è *instabile*;
- negativa, il sistema è *stabile*;
- nulla, il sistema è *marginalmente stabile*.

Gli zeri vengono utilizzati per verificare se il sistema è a fase minima.

Per quanto detto, prima di iniziare lo studio delle reti in regime sinusoidale, si ritiene opportuno riportare un formulario con le principali proprietà dei numeri complessi, rimandando il lettore ai Complementi posti alla fine di questo capitolo per un approfondimento.

FORMULARIO

Un numero complesso si può intendere come la somma di un numero reale e di un numero immaginario, vale a dire un multiplo reale dell'unità immaginaria, indicata con la lettera j e definita dalla relazione $j^2 = -1$.

In Elettrotecnica *non* si utilizza per l'unità immaginaria il simbolo i, molto diffuso nei testi matematici e fisici, per non generare confusione con il simbolo normalmente utilizzato per indicare le correnti elettriche.

Rappresentazione cartesiana

Il numero complesso

$$z = x + jy = (x, y)$$

ha $x = \mathrm{Re}(z)$ come parte reale e $y = \mathrm{Im}(z)$ come parte immaginaria.

Rappresentazione trigonometrica-esponenziale

Il numero complesso

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} = [r, \theta]$$

ha modulo e argomento e fase definiti, rispettivamente, dalle relazioni

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Si chiama *argomento principale* la fase per cui $0 \le \theta < 2\pi$.

Operazioni algebriche

Considerati due qualsiasi numeri complessi

$$z_1 = x_1 + jy_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1), \quad z_2 = x_2 + jy_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2),$$

è possibile definire le operazioni che seguono.

Addizione e sottrazione

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$$

Moltiplicazione e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Coniugato

$$z^* = x - jy = re^{-j\theta}, \quad z + z^* = 2x, \quad z - z^* = 2jy, \quad \sqrt{zz^*} = r$$

Potenza *n*-sima

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$$

Radici *n*-sime

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+j\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right] \quad (k=0,\,1,\,\dots,\,n-1)$$

Esponenziale complesso

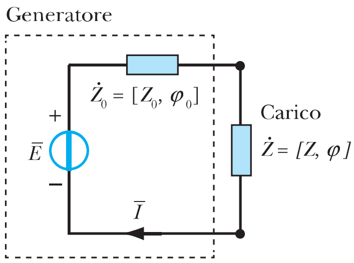
$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+jy} = \mathrm{e}^{x}\left(\cos y + j\sin y\right)$$

Logaritmo complesso

$$\ln z = \ln r + j(\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA

In questo paragrafo si desidera riportare una semplice e rigorosa dimostrazione della proprietà delle reti in corrente alternata, conosciuta come **massimo trasferimento di potenza attiva**.



Facendo riferimento alla figura riportata, non è difficile dimostrare che la potenza attiva trasferita al carico $\dot{Z}$ dal generatore di tensione sinusoidale vale

$$P = E^2 \frac{Z\cos\varphi}{Z^2 + Z_0^2 + 2ZZ_0\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Si vuole determinare in quali condizioni di carico questa potenza è massima, assumendo che tutti i parametri che definiscono il generatore siano noti. In tal modo, introducendo il rapporto tra i moduli delle due impedenze

$$r = \frac{Z}{Z_0} \quad \text{(adimensionale)},$$

si può scrivere

$$P = \frac{E^2}{Z_0}\frac{r\cos\varphi}{1 + r^2 + 2r\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

una relazione che mostra chiaramente la dipendenza della potenza da due variabili, rispetto alle quali si deve determinare la condizione di massimo, se esiste. Tuttavia, riscrivendola nella forma

$$P = \frac{E^2}{Z_0}\frac{\cos\varphi}{\frac{1+r^2}{r} + 2\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

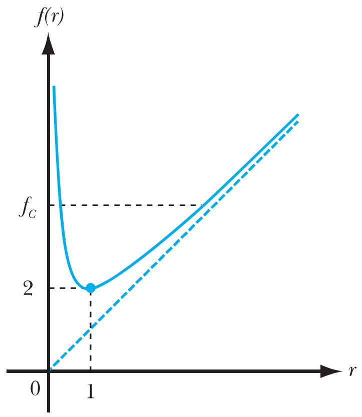
si può affermare che la dipendenza dal rapporto r in qualche maniera si disaccoppia dall'angolo di fase φ, per cui la potenza è massima, se la parte del denominatore che dipende soltanto da r è minima; in altri termini, si deve trovare il minimo della funzione

$$f(r) = \frac{1+r^2}{r}.$$

Ebbene, trattandosi di una funzione di una sola variabile, non è difficile mostrare che si ottiene un minimo in corrispondenza di

$$r_{min} = 1 \;\rightarrow\; Z = Z_0,\;\; f(r_{min}) = 2,$$

come mostra la figura riportata.



Detto f_C un qualsiasi valore del codominio della funzione $f(r)$, l'equazione di secondo grado

$$r^2 + f_C r + 1 = 0$$

non ammette soluzioni reali per alcuni valori di f_C, mentre per altri ne ammette due o una, a seconda del segno del discriminante

$$\Delta = f_C^2 - 4.$$

Se $f_C < 2$, non vi sono soluzioni reali; se invece $f_C > 2$, l'equazione ammette due soluzioni reali; nel caso particolare $f_C = 2$, vi sono due soluzioni reali e coincidenti, che definiscono la condizione di minimo della funzione. D'altra parte, dal punto di vista algebrico si constata che, poiché $r \geq 0$, risulta

$$(1-r)^2 \geq 0 \;\rightarrow\; 1+r^2 \geq 2r \geq r \;\rightarrow\; f(r) \geq 2.$$

La potenza assorbita diventa allora funzione del solo angolo di fase φ, ovvero

$$P(\varphi) = \frac{E^2}{2Z_0}\frac{\cos\varphi}{1+\cos(\varphi-\varphi_0)},$$

e è massima quando la derivata è nulla

$$\frac{dP}{d\varphi} = -\frac{E^2}{2Z_0}\frac{\sin\varphi + \sin\varphi_0}{\left[1+\cos(\varphi-\varphi_0)\right]^2},$$

cioè quando

$$\varphi = -\varphi_0.$$

In definitiva, il carico è in grado di ricevere la massima potenza attiva dal generatore quando

$$\dot{Z} = \dot{Z}_0^*,$$

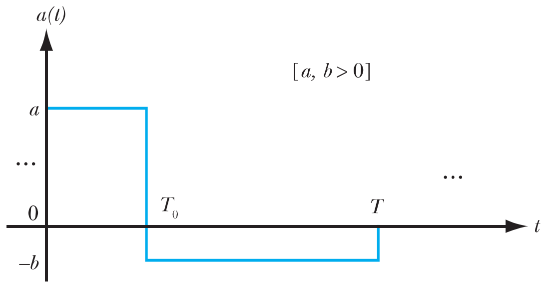
che viene anche detta *condizione di adattamento del carico alla sorgente*.

PRONUNCIA

Consultando i più comuni dizionari, si scopre che la pronuncia registrata è «omèga», mentre «òmega» è di uso letterario, poiché discende dalla pronunzia greca e latina. Si conclude che l'una oppure l'altra pronuncia dipende dal registro letterario utilizzato e che entrambe sono accettabili. Per consolazione, si ricorda che la famosa marca svizzera di orologi di lusso, nella Svizzera romanza, così come in Francia, si pronuncia «omegà». Pertanto, coloro che a scuola hanno studiato il greco diranno «òmega», utilizzando un registro più elevato, ma nel linguaggio comune, quando si parla con gli amici che non hanno frequentato il liceo classico o comunque nel parlare quotidiano, è meglio dire «omèga», evitando così di fornire spiegazioni o di apparire troppo ricercati.

ESERCIZIO A-1

Per la forma d'onda mostrata in figura, si calcoli il valor medio, in un periodo e in mezzo periodo, nonché il valore efficace.



SOLUZIONE Con questo primo esercizio si desidera porre l'accento sulle definizioni di valor medio e valore efficace, che risultano assai utili nella caratterizzazione di una generica forma d'onda periodica.
Anzitutto si calcola il valor medio in un periodo, definito come

$$A_{MEDIO} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt.$$

Nel caso in esame, essendo la forma d'onda costituita da due tratti rettilinei, è facile calcolare l'integrale, che risulta pari a

$$A_{MEDIO} = \frac{aT_0 - b(T - T_0)}{T},$$

e in generale è diverso da zero. Però, quando l'area descritta dalla *semionda positiva* è uguale e opposta a quella della *semionda negativa*, si dice che la funzione $a(t)$ descrive una grandezza alternata (o alternativa) e deve essere

$$A_{MEDIO} = 0 \;\rightarrow\; aT_0 = b(T - T_0).$$

Risulta leggermente più complicato determinare il valor medio in mezzo periodo, definito dall'integrale

$$A_{M/2} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a(t)\,dt.$$

La difficoltà sta nel dover prendere in considerazione il caso in cui T_0 sia maggiore o minore del semiperiodo $T/2$. Si ha allora

$$A_{M/2} = \begin{cases} a & \text{se } T_0 \geq \dfrac{T}{2} \\ (a+b)\dfrac{T_0}{T} & \text{se } T_0 < \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Infine, il valore efficace, definito per mezzo della relazione

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)\,dt},$$

risulta pari a

$$A = \sqrt{a^2 \frac{T_0}{T} + b^2 \frac{T - T_0}{T}} = \sqrt{b^2 + \left(a^2 - b^2\right) \frac{T_0}{T}}.$$

Esercizio da svolgere

Si determini il valor medio e il valore efficace della funzione periodica avente andamento parabolico in un periodo, assunto come unitario, e definita dalla relazione

$$a(t) = t^2 \quad \text{per} \quad 0 < t < 1.$$

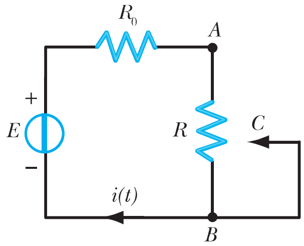
Disegnare l'andamento in tre o quattro periodi della forma d'onda assegnata.

RISPOSTA Prima di determinare le grandezze richieste, si disegni l'andamento della forma d'onda assegnata in tre o quattro periodi. Il valor medio e il valore efficace valgono, rispettivamente,

$$A_{MEDIO} = \frac{1}{3}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

ESERCIZIO A-2

Nel dispositivo mostrato in figura, il cursore C oscilla con moto periodico tra la posizione A e la posizione B. Si determini l'energia assorbita nell'intero circuito per effetto Joule, nel tempo T necessario per lo spostamento da A a B.



SOLUZIONE Vi sono molti modi di produrre una grandezza periodica: uno, non molto consueto, viene indicato nell'esercizio proposto.
La corrente $i(t)$ che circola nel circuito è una grandezza periodica di periodo T e risulta pari a

$$i(t) = \frac{E}{R(t)},$$

laddove la resistenza $R(t)$ varia nel tempo secondo la legge assegnata

$$R(t) = R_0 + R\frac{t}{T} \quad \text{per} \quad 0 < t < T.$$

Per determinare l'energia U assorbita in un periodo, cioè l'integrale della potenza istantanea $p(t)$ nell'intervallo di durata T, basta scrivere

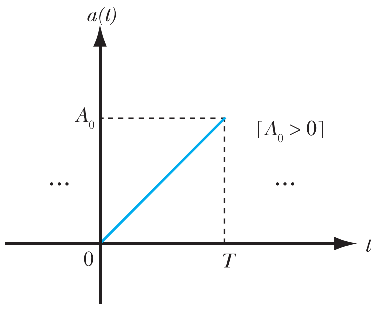
$$U = \int_0^T p(t)\,dt = E\int_0^T i(t)\,dt.$$

Sostituendo l'espressione della corrente e sviluppando l'integrale, si ottiene

$$U = E^2\int_0^T \frac{dt}{R_0 + Rt/T} = T\frac{E^2}{R}\ln\frac{R_0+R}{R_0}.$$

Esercizio da svolgere

Si determini il valor medio e il valore efficace per la funzione periodica mostrata in figura.



RISPOSTA Sviluppando gli integrali, si ottengono i due valori richiesti, che valgono, rispettivamente,

$$A_{MEDIO} = \frac{A_0}{2}, \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{3}}.$$

ESERCIZIO A-3

Si verifichi che il valor medio di una *sinusoide raddrizzata*, definita dalla funzione

$$a(t) = |\sin t|,$$

è pari a $2/\pi$.

SOLUZIONE Si tratta di un esempio di calcolo del valor medio che torna utile nello studio dei circuiti elettronici. In effetti, dato che la sinusoide assegnata ha periodo pari a π, si può scrivere

$$A_{MEDIO} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \frac{2}{\pi},$$

come si voleva dimostrare.

Esercizio da svolgere

Una tensione periodica di periodo T è definita dalle relazioni

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t - nT}{T}\right) \quad \text{per} \quad nT \le t \le (n+1)T,$$

essendo n un qualsiasi intero relativo. Si dimostri che il valore efficace si può scrivere come

$$V = \frac{V_0}{\mathrm{e}}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}},$$

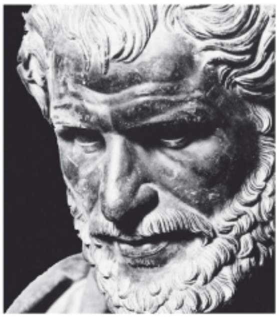
laddove

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ \ldots$$

rappresenta il *numero di Nepero*.
Questo numero viene anche chiamato *costante di Nepero*, in onore del matematico scozzese John Napier, che introdusse i logaritmi. In alcuni contesti viene chiamato anche *numero di Eulero*, perché il matematico svizzero fu il primo a indicare tale costante con la lettera ‘e’.
Si tratta di un numero non periodico, irrazionale, cioè non esprimibile con una frazione, e trascendente, in quanto non può essere ottenuto come soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali. È un numero che gioca un ruolo fondamentale non solo in Matematica, ma in numerose applicazioni, come ad esempio lo studio del decadimento radioattivo, della crescita di una popolazione, della diffusione di un’epidemia e soprattutto di problemi economici.

Luigi **Verolino**

Esercizi e Complementi sulle Reti Elettriche



Eraclito
Efeso, 535 a.C. - Efeso, 480 a.C.

Questo testo contiene numerosi esercizi, alcuni più semplici, altri più complicati, sulle Reti Elettriche; il lettore troverà anche interessanti Complementi di Matematica e Fisica, arricchiti da tanti esempi che consentono di estendere le tecniche apprese. Per imparare qualsiasi disciplina, occorre tempo e dedizione: se il lettore decide di seguire la strada proposta in questo libro, ne uscirà sicuramente più ricco dal punto di vista procedurale. Tuttavia, molti esercizi proposti tendono a sviluppare la creatività, una caratteristica tenuta in poco conto nei moderni corsi universitari, nei quali si prediligono gli aspetti più sistematici e strutturali. Pertanto, si affrontino gli esercizi con una buona dose di umiltà e determinazione, le due caratteristiche essenziali per ogni studente che si rispetti.

Tutto scorre (πάντα ῥεῖ).

L'autore, sin dai tempi del Liceo, ha una passione per il pensiero di Eraclito, un filosofo greco antico, vissuto ad Efeso tra il VI e il V secolo prima della nostra era, forse uno dei maggiori pensatori presocratici, che è conosciuto anche come l'oscuro, per l'ambiguità dei pochi frammenti rimasti dei suoi scritti. Eraclito, per contro, affermò con chiarezza che tutto diviene, muta e nulla resta identico a sè stesso: le sue opere sono andate in gran parte perdute e restano di lui soltanto frammenti, testimonianze, imitazioni. Allo scopo di sintetizzarne in certa misura il contenuto, ogni capitolo di questo libro inizia con una frase, forse ambigua, di Eraclito.

EdiSES UNIVERSITÀ
www.edisesuniversita.it

ISBN 978-88-3623-016-7
€ 49,00
9 788836 230167