

manuale **m**

il **nuovo** **concorso**
a CATTEDRA

A cura di
G. Bolondi
M.I. Fandiño Pinilla

Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della **matematica**

- Modelli teorici e strumenti operativi per la didattica della matematica
- Processi di apprendimento/insegnamento dei concetti matematici
- Misconcezioni evitabili e inevitabili
- Valutazioni standardizzate nazionali e internazionali





Didattica della Matematica

Metodi e strumenti
per l'insegnamento
e l'apprendimento

A cura di

Giorgio Bolondi
e Martha Isabel Fandiño Pinilla



Colophon

Premessa

Questo libro vuole offrire ai futuri insegnanti e agli insegnanti in servizio una rassegna agile di alcuni degli strumenti professionali che sono oggi a disposizione di chi insegna matematica, in tutti i livelli scolastici.

Si tratta di strumenti concettuali, che vogliamo ricordare di seguito.

La didattica della matematica è ormai una disciplina teoricamente consolidata sulla base delle problematiche sollevate dalle situazioni d'aula, specifiche per la matematica, i cui risultati permettono, a chi si trova quotidianamente sul campo, di comprendere ed analizzare i processi di insegnamento-apprendimento, di intervenire sulla propria azione didattica per favorire un apprendimento corretto da parte degli studenti. Per fare un "buon insegnante" non basta il buon senso, così come non basta la preparazione disciplinare. Chi ancora la pensa così è un povero ingenuo che, evidentemente, non ha mai messo piede in un'aula (da adulto). Quelle sono entrambe condizioni necessarie, ma sono ben lungi dall'essere sufficienti. L'insegnante futuro, e l'insegnante presente, hanno bisogno di strumenti di didattica disciplinare specifica che vadano al di là della semplice ingegneria didattica, dei suggerimenti per fare una bella lezione o organizzare una efficace unità di insegnamento, e di materiali matematicamente corretti (che ovviamente sono indispensabili, ma non bastano). La prima parte del libro è quindi dedicata a una veloce rassegna di questi strumenti concettuali. Data la brevità dello spazio, si tratta solo di pochi primi cenni e esempi: per questo il capitolo è corredato da un'ampia bibliografia di riferimento

alla quale il lettore può ricorrere per i necessari approfondimenti, se lo riterrà opportuno.

Un capitolo a sé è dedicato al ruolo delle misconcezioni in matematica, perché questo tema si è rivelato molto importante per le sue ricadute pratiche; la categoria delle misconcezioni si è dimostrata utilissima per interpretare comportamenti degli studenti, sbrogliare difficoltà di apprendimento, analizzare ostacoli, organizzare interventi di recupero, progettare efficacemente percorsi di insegnamento.

L'insegnamento della matematica ha poi bisogno di categorie e strumenti che provengono da una riflessione più generale sull'insegnamento e l'apprendimento non specifici di una data disciplina. A questa riflessione è dedicato un capitolo specifico, in cui diversi temi, riguardanti soprattutto le situazioni d'aula, sono sviluppati esemplificandoli nel caso della matematica.

Uno dei temi di maggiore attualità per la scuola italiana è rappresentato dall'avvento delle prove Invalsi. Che cosa sono le valutazioni standardizzate; cosa ci dicono sulla scuola italiana e sui nostri allievi le valutazioni internazionali come OCSE-Pisa, IEA-TIMSS e TIMSS Advanced; che ruolo può avere l'Invalsi nel miglioramento della nostra azione didattica; come utilizzare in classe e nelle scuole i metodi, i materiali e i risultati delle valutazioni esterne; questo è il tema dell'ultimo capitolo. L'azione dell'insegnante di matematica, oggi, non può ignorare l'esistenza di queste valutazioni.

In Appendice, riportiamo indicazioni per materiali di documentazione e aggiornamento, ovviamente riferiti al 2012.

Speriamo, con questo compendio, di aver fornito dei riferimenti utili per il lavoro degli insegnanti e, in ultima analisi, per la formazione dei ragazzi, futuri cittadini ai quali affideremo il domani.

Sommario

1

Capitolo Primo

Elementi di didattica della matematica

Martha Isabel Fandiño Pinilla

1.1	La didattica della matematica come arte	1
1.2	Due modi diversi di intendere la didattica della matematica	3
1.3	Limiti della didattica A	6
1.4	Concetto e concettualizzazione in matematica	10
1.5	Il caso della matematica	15
1.6	Apprendimento, costruttivismo, simbolizzazione	16
1.7	Semiotica e noetica nella matematica e nell'apprendimento della matematica	17
1.8	Componenti dell'apprendimento	22
	Apprendimento concettuale	23
	Apprendimento algoritmico	24
	Apprendimento strategico	25
	Apprendimento comunicativo	25
	Apprendimento semiotico	26
1.9	Introduzione agli strumenti teorici e concreti della didattica B	28
1.10	Il contratto didattico	30
1.11	Conflitti e misconcezioni	39
1.12	Immagini e modelli	44
1.13	Il triangolo: insegnante, allievo, sapere	56

1.14	Ostacoli	58
1.15	La teoria delle situazioni didattiche	64
1.16	Il ruolo dell'epistemologica nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria	75
1.17	Uso della storia nella didattica della matematica	89
1.18	La didattica della matematica C, come epistemologia dell'insegnante	94
1.19	La didattica della matematica è una scienza	97
1.20	Conclusioni	101

2

Capitolo Secondo Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica

Silvia Sbaragli

2.1	Il termine misconcezione	114
2.2	Misconcezioni “evitabili” e “inevitabili”	117
2.3	Alcuni esempi di misconcezioni evitabili e inevitabili	119
2.3.1	Esempi di misconcezioni inevitabili	120
2.3.2	Esempi di misconcezioni evitabili	126
	Misconcezioni derivanti da “incoerenze” nei libri di testo ..	135
2.4	L’“errore”: un termine da reinterpretare	136

3

Capitolo Terzo

La sfida della Didattica: trasformare le classi in contesti di apprendimento continuo per formare competenze e capitale sociale

Piergiuseppe Ellerani

3.1	La bussola dal nome Didattica	142
3.2	I tratti distintivi della Didattica come scienza autonoma	144
3.3	La bussola Didattica nel contesto classe incontra le differenze individuali degli studenti	147
3.4	La Didattica: comunicazione nel contesto	152
3.5	La Didattica si esprime al meglio nel contesto-classe come laboratorio	154
3.6	La Didattica e le competenze: punto cardinale Nord	156
3.7	La Didattica e le intelligenze: il punto cardinale Est	158
3.8	La didattica cooperativa per lo sviluppo delle competenze: il punto cardinale Sud	161
3.9	La didattica basata sui problemi (Problem Based Learning): il punto cardinale Ovest	166
3.10	La formazione delle “abitudini della mente”: il punto cardinale Nord-Est	169
3.11	La Didattica metacognitiva e l'apprendere ad apprendere per lo sviluppo del pensare: il punto cardinale Sud-Est	173
3.12	Didattica e valutazione autentica: le prospettive per la valutazione delle competenze. Il punto cardinale Nord-Ovest ..	177
3.13	La Didattica per capacitare e costruire capitale sociale: un nuovo orizzonte formativo. Il punto cardinale Sud-Ovest	181

4

Capitolo Quarto

Le valutazioni nazionali e internazionali

Giorgio Bolondi

4.1	Introduzione	191
4.2	L'indagine OCSE-Pisa	192
4.3	L'indagine del 2012	194
4.4	La matematica di OCSE-Pisa	195
4.5	I risultati di OCSE-Pisa e l'Italia	197
4.6	L'indagine IEA-TIMSS	199
4.7	Il Servizio di Valutazione Nazionale dell'Invalsi	201
4.8	La Prova Nazionale	203
4.9	Come "utilizzare" le prove Invalsi	205
	Indicazioni di legge	210
	Valutazioni Internazionali	210
	Invalsi	211
	Matematica 200x	211
	Repository di materiali	212
	Convegni e congressi	212
	Gruppi di ricerca	213

Appendice

Strumenti di documentazione per l'insegnante

1

Capitolo Primo

Elementi di didattica della matematica

1.1 La didattica della matematica come arte

Il sostantivo “didattica” ha come traduzione in latino dotto: “ars docendi”, con evidente rinvio a problematiche aventi strettamente a che fare con l’insegnamento. Il riferimento a quella “ars” è particolarmente suggestivo: da un lato è “artigianato” (il docente che prepara e sceglie le lezioni, i modi, gli esempi ...) e dall’altro è “arte” (scelte comunicative, ricette a soggetto, modalità per catturare l’attenzione, per motivare...).

La didattica della matematica come arte ha prodotto risultati interessanti. L’oggetto del lavoro di quel tipo di didatta era costituito essenzialmente dall’*insegnamento* della matematica; mentre l’obiettivo principale era creare situazioni (sotto forma di lezioni, attività, oggetti, ambienti, giochi, ...) per un insegnamento *migliore* della matematica. L’assunto più o meno esplicito sembrava essere il seguente: se migliora l’insegnamento, migliorerà anche l’apprendimento, e la validità di questo assunto era data per scontata.

Il peso “artistico” dell’attività d’insegnamento, dunque, grava tutto sulle spalle dell’insegnante. Ma al fondo di questa scelta sta il convincimento che l’attrazione esercitata sull’attenzione e sulla motivazione dello studente sono le caratteristiche essenziali perché quest’ultimo apprenda. Ciò cor-

risponde al vero o si tratta di una illusione, un po' ingenua? Scrive a questo proposito Moreno Armella (1999): «L'insegnamento, come semplice processo di istruzione, appesantito da ipotesi sulla capacità dello studente di assorbire quel che gli si dice "bene", non è una concezione: è un'illusione». Si noti l'accentuazione di quel "bene": puntare tutto sull'insegnamento, per quanto inteso come risultato di una riflessione artistica, non dà affatto garanzie sul piano degli apprendimenti.

Questa è l'opinione condivisa al giorno d'oggi, da parte degli studiosi di didattica.

Tuttavia, in passato più d'un Autore ha sostenuto che insegnare è un'arte, frutto di doti personali che non si possono né imparare né trasmettere, con la conclusione estrema che la ricerca didattica non serve. Si tratta di una concezione deleteria che certo non apre la strada a riflessioni interessanti e che piuttosto chiude ogni speranza di migliorare gli apprendimenti attraverso studi specifici, costituendo un'involuzione non aggirabile.

Fortunatamente gli indubbi successi ottenuti dall'odierna ricerca hanno mostrato che si tratta di una posizione ampiamente superata sulla quale non vale la pena perdere ulteriore tempo.

Come al solito, è necessario fare alcune distinzioni per non cadere in equivoci: quanto affermato sopra non significa che non vi siano docenti che mostrano indubbie doti *naturali* nella comunicazione e nell'attrarre l'attenzione degli studenti. Quel che vogliamo dire è che:

l'efficacia degli apprendimenti non è appannaggio solo di questi "artisti della didattica" anche se, ovviamente, partendo da una base di attenzione ed interesse, è facile che cresca la *motivazione* e soprattutto la *volizione* (Pellerey, 1993); non è detto che un perfetto insegnante ottenga, solo per questo

motivo, il risultato voluto sul piano della qualità dell'apprendimento da parte dei propri allievi.

Torniamo ai risultati della didattica che punta tutto sull'insegnamento; essa ha ottenuto, negli ultimi decenni, risultati interessanti.

Basti ricordare i lavori della cosiddetta *Matematica vivente*, termine coniato da André Révuz [1914 – 2008] fin dagli anni 50 (Révuz, 1965) e poi divulgato da Zoltan P. Dienes (1972) con i suoi famosi *blocchi logici*; il famosissimo lavoro di Emma Castelnuovo, legato a idee ancora oggi molto moderne sulla *matematica della realtà* ed alla creazione di strumenti di grande efficacia; i cosiddetti *numeri in colore* ideati da Georges Cuisenaire [1891 – 1976] ed analizzati da Galeb Gattegno [1911-1988] (Cuisenaire, Gattegno, 1955); i teorici dell'uso degli *abachi*, ancora oggi tanto diffusi nelle scuole primarie; il *geopiano*; il *minicomputer* di George Papy [1920 – 2011]; il *linguaggio delle frecce* di George e Frédérique Papy [1921 – 2005]; le *macchine operazioni*;... Si trattava soprattutto di creare ambienti artificiali ideati su misura per certi insegnamenti specifici. In questa direzione, occorre ricordare ancora quegli “ambienti” che si ispirano alle idee pedagogiche di Maria Montessori [1870-1952].

1.2 Due modi diversi di intendere la didattica della matematica

Prima di proseguire con altri esempi significativi, tentiamo una descrizione generale in prima approssimazione, di quel che si intende *oggi* circa la ricerca in didattica della matematica. Si potrebbe ipotizzare un duplice modo di vedere la didattica della matematica:

- A:** come divulgazione delle idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento (**A** qui sta per *Ars*, riferendoci alla sua traduzione latina);
- B:** come ricerca empirica, fissando l'attenzione sulla fase dell'apprendimento (qualche cosa che più avanti definirò meglio e che potremmo chiamare: *epistemologia dell'apprendimento della matematica*);
- C:** studio delle convinzioni personali degli insegnanti di matematica e della loro influenza nelle azioni d'aula e dell'apprendimento degli studenti.

Questa distinzione è suggerita dagli studi di Bruno D'Amore (1999b, 2006a) e successivi.

Ora, tutte le esperienze brevemente richiamate nel paragrafo 2.1., sono pertinenti alla tipologia **A**, in quanto lo sforzo del didatta è tutto teso a trasformare un discorso specialistico (e dunque complesso in quanto si fa uso di un linguaggio tecnico non naturale) in uno comprensibile e più consono alla natura dell'allievo. Il didatta **A** è sensibile all'allievo, lo pone al centro della sua attenzione, ma la sua *azione didattica* non è sull'allievo bensì sull'argomento in gioco.

La didattica **A** può servire a contribuire a risolvere problemi di grande importanza come: migliorare l'immagine della matematica, migliorare l'immagine di sé nel fare matematica, migliorare l'attenzione, attivare interesse e motivazione.

Il problema dell'immagine della matematica nella società, presso le famiglie, presso gli insegnanti ed in aula, è di straordinaria importanza. Una cattiva immagine della matematica nuoce a tutta l'attività dell'insegnante stesso. Lezioni inconcludenti, ripetitive, noiose, avendo ricaduta negativa sugli allievi e dunque su tutti gli altri componenti del mondo della scuola, finiscono con il contribuire a dare una cattiva immagine della matematica allo stesso insegnante di matematica, una cattiva immagine di sé come insegnante, dunque rendono negativo il lavoro didattico.

All'interno di un modo “nobile” di intendere la didattica **A**, c'è l'importante problematica dell'uso della storia della matematica in aula:

come strumento didattico;

per migliorare l'immagine della matematica rendendola più vicina alla vita quotidiana dell'essere umano;

per dare l'idea che la matematica è cultura;

...

Su questi punti, la letteratura è vastissima; si veda per esempio D'Amore (1999b).

In sintesi, fanno parte della didattica di tipo **A** tutti gli studi e le ideazioni di strumenti (concreti o no) che possono migliorare l'insegnamento della matematica, nel senso che precisato sopra.

Oltre agli “strumenti”, bisogna ricordare la fortuna avuta (negli anni '70, inizio '80) di certi “ambienti di lavoro”, come i “laboratori di matematica” (Caldelli, D'Amore, 1986). Vi furono anni intensi di lavoro attorno a questa idea che ha indubbi frutti molto positivi sul piano didattico - cognitivo, dato che vi si instaurano meccanismi relazionali (insegnante - allievo) molto particolari e relazioni cognitive (allievo - matematica) di estremo interesse teorico (D'Amore, 1988, 1990-91). È ovvio che questa attività in laboratorio si configura all'interno della cosiddetta “pedagogia attiva”: il ragazzo costruisce (nel nostro caso non solo metaforicamente, ma concretamente), con le proprie mani, oggetti che sollecitano conoscenza. I concetti sono il risultato della elaborazione di progetti che devono passare al vaglio dell'esperienza. Il manufatto deve essere pensato *a priori* perché ha uno scopo dichiarato ed atteso, ma deve poi esserne verificata l'efficacia. Poiché lo strumento matematico non era, come di consueto, del tutto realizzato da un adulto e portato in classe già confezionato e pronto per l'uso,

bensi solo proposto dall'insegnante attraverso il bisogno di rendere concreta un'idea, ma poi progettato, realizzato e verificato dall'allievo, si potrebbe anche pensare che questa attività costituisca un "ponte" tra la tipologia **A** e quella **B** (che conosceremo in dettaglio tra breve) della didattica.

1.3 Limiti della didattica **A**

Un generale fraintendimento ed una immotivata esagerazione acritica, soprattutto la perdita dell'evidenza della motivazione didattica che sta all'origine di un'idea e di uno strumento, sembra essere comune a molte delle innovazioni che si considerano far parte della didattica **A**, forse proprio a causa del fatto che sia i proponenti sia gli adepti non avevano alle spalle i risultati di una ricerca didattica sugli effetti cognitivi in relazione alle modifiche degli apprendimenti ottenute con lo strumento. Infatti, la fiducia nel risultato cognitivo derivava dallo strumento in sé, dal grado di convincimento operato dal proponente, dal consenso che ruotava, a tutti i livelli, attorno alle proposte.

Così è stato per molti degli strumenti presentati, per la teoria degli insiemi [la cosiddetta "insiemistica", sulla quale il lettore può vedere l'analisi fatta in D'Amore (1999b)], per l'introduzione della logica degli enunciati (un'esasperata messa in opera di tavole di verità e di connettivi; D'Amore, 1991) eccetera.

Uno dei problemi didattici principali che lega tra loro tutto il materiale presentato finora è senz'altro quello del *transfer cognitivo*. Ci soffermeremo su questo punto brevemente, rinviando a D'Amore (1999b) per un discorso più approfondito. Molti dei creatori degli strumenti detti hanno realizzato ambienti di lavoro particolari, chiusi in sé stessi, che chiameremo in un colpo solo *ambienti artificiali*; in essi si potenziano,

evidenziandoli ed isolandoli, gli aspetti matematici delle attività stesse.

Ma si tratta di attività per così dire fini a sé stesse, “endogene” cioè. La scommessa pedagogica di fondo sembra essere la seguente: la motivazione e l’interesse che la nuova attività ha acceso nell’allievo sono tali che l’apprendimento del concetto “in gioco” sarà non epidermico ma profondo. In tal modo, quando l’allievo si troverà di fronte ad un problema dello stesso tipo, ma in ambiente diverso, *trasferirà* il sapere da una situazione all’altra, in modo naturale, implicito, spontaneo, *senza richieste cognitive specifiche per la nuova situazione di apprendimento*.

È, detto in modo molto semplicistico, il sogno ingenuo che il fenomeno del *transfer cognitivo* sia automatico: da una conoscenza “artificiale” costruita su misura in un ambiente opportuno e specifico, alla conoscenza generalizzata, cioè alla capacità di produrre abilità cognitive e procedurali in altre situazioni.

Di fatto, però, le cose non vanno sempre così; anzi, a ben guardare, *difficilmente* vanno così: le capacità cognitive e procedurali restano spesso ancorate all’ambito nel quale si sono raggiunte: non si sa *trasferire* la conoscenza, se non in casi particolari.

In un biennio delle superiori, anche se lo studente ammette di saper ricavare z dalla uguaglianza $x = \frac{y}{z}$, dimostra fastidio e difficoltà alla proposta di ricavare, durante l’ora di fisica, t dalla espressione $v = \frac{\xi}{t}$. L’insegnante non vede la differenza fra le due espressioni ed i due compiti che gli appaiono identici; lo studente la vede, eccome.

Questo limite, tipico dell’essere umano, ha molto ridimensionato gli studi fatti in ambito **A**; questi, se pure proseguono, sono oggi usualmente accompagnati da una seria ricer-

ca empirica, ben fondata, sempre più specialistica, ed allora fatalmente tendono a diventare ricerche in didattica **B**; oppure nulla più sono considerati oggi, se non puri esercizi retorici, senza alcuna credibilità didattica.

(In realtà, la problematica del *transfer cognitivo* non è così banale).

Ma, si può fare ricerca empirica in una didattica di tipo **A**?

Va detto subito che se si assume così semplicemente la tipologia **A** come ambiente di ricerca, allora bisogna riconoscere che quegli studiosi *non* sono riusciti ad elaborare un loro proprio statuto epistemologico complessivo.

A questa affermazione qualcuno ribatte chiamando in causa il bourbakismo;¹ ma il riferimento allo strutturalismo bourbakista è scorretto, perché esso *non* è, né mai ha chiesto di essere, una epistemologia della ricerca in didattica, essendo ad essa totalmente estraneo.

Né è corretto riferirsi allo strutturalismo in senso piagetiano, che pure a quello bourbakista fa riferimenti continui: la teoria secondo la quale l'apprendimento avviene "a stadi" gerarchici lineari, in analogia con il modello dell'epistemologia genetica di Jean Piaget [1896 - 1980], è da qualche decennio al centro di discussioni: si tratta di una elegante ed affascinante costruzione teorica, ma sembra stentare a trovare serie e significative verifiche empiriche

¹ Si tratta di una corrente che oggi potremmo chiamare di epistemologia della matematica che ha spinto a riscrivere daccapo tutta la matematica, cercando di basarsi su pochissime strutture algebriche considerate fondamentali (D'Amore, Matteuzzi, 1975). Questa ricerca, iniziata negli anni '40 ed ancora oggi in corso (anche se senza più il vigore e le violente motivazioni iniziali), ha profondamente influenzato non solo la matematica, ma molte altre discipline che l'hanno presa ad esempio (D'Amore, 1981, 1987a). Il fenomeno strutturalista, che ha investito molteplici discipline, ha certo origine qui; ad esso si ispirano, per esempio, molti dei più celebri lavori di Jean Piaget.

che la rendano accettabile; anzi, le verifiche empiriche fin qui compiute sembrano andare in direzioni molto diverse o opposte.²

Senza una vera e propria ricerca empirica, qual è la certezza che abbiamo sul fatto che l'uso di uno strumento qualsiasi tra quelli descritti nella tipologia **A** renda *davvero* gli allievi più abili in qualche cosa che non sia meramente specifico? Per esempio, usare a lungo e con l'assistenza dell'insegnante l'abaco multibase rende ovviamente più abile l'allievo ad usare... l'abaco multibase; ma siamo sicuri che quello stesso allievo sarà diventato più abile anche in altro, per esempio nell'esecuzione di un'operazione, nella risoluzione di un problema, nella dimostrazione di un enunciato? O, almeno, abbia assunto una consapevolezza più profonda dei concetti aritmetici di base e sulla matematica in generale? L'abaco si usa soprattutto nella primaria; che tipo di apprendimento specifico esso potrebbe convogliare al passaggio nella scuola secondaria? Non si riesce a trovare un filo logico.

D'altra parte, però, se si effettuano prove empiriche, con opportuni e ben studiati dispositivi sperimentali, sui risultati cognitivi ottenuti con attività di tipo **A**, allora si passa alla *ricerca considerata sperimentale*, si entra nel campo della *epistemologia dell'apprendimento*, cioè si passa al punto che contraddistingue la tipologia **B**.

Per chiudere questo paragrafo, segnaliamo un paio di lavori storico-critici di Angelo Pescarini (1995, 1997) che fanno il

² Su questo punto delicatissimo, ci limitiamo a citare solo le prime ricerche critiche (quelle della seconda metà degli anni '70, che fecero tanto scalpore in quanto minavano le basi di teorie che sembravano assolutamente indiscutibili) e, tra le ultime, solo quelle nate all'interno del Nucleo di Ricerca di Bologna. Si possono vedere, per esempio, tra i precursori: Brainerd (1973), Mogdil (1974), Feldman e Toulmin (1976), Gelman e Gallistell (1978); e, tra le più recenti: Agli, D'Amore, Martini, Sandri (1997); Sbaragli (1999). Ma le ricerche di questo tipo sono numerosissime. Per una critica più generale alle indagini sullo stile piagetiano, ved. Gardner (1993), pagg. 57 e segg. della ediz. it.

punto sulla ricerca in didattica della matematica, fermandosi agli anni '80, e tentando di stabilire alcune fondazioni di carattere epistemologico alle diverse concezioni emerse tra gli anni '50 ed '80.

Un altro lavoro che ha lo stesso scopo è Linati (2011).

Il lavoro di Dienes, Papy ed altri “mostri sacri” degli anni '60 e '70 fu sottoposto a critiche radicali da parte di alcuni didatti negli anni '80; in particolare, in modo molto lucido e profondo, tale da non permettere repliche, da parte di Guy Brousseau fin dagli anni '60, quando ancora era un maestro elementare (ma poi divenne professore ordinario ed emerito; fu insignito della medaglia Felix Klein per la didattica della matematica al momento della sua istituzione, nel 2003).

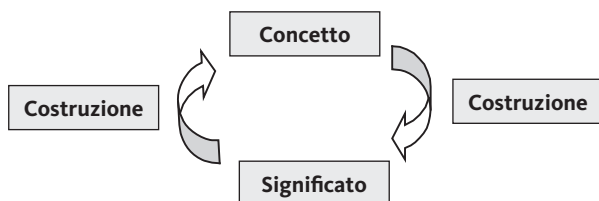
A parte certe pubblicazioni “interne”, analisi critiche appaiono in Brousseau (1972a,b, 1974) e poi infine raccolte in Brousseau (1986). Stante la difficoltà di rintracciare questi testi degli anni '60 e '70, rimandiamo al lungo articolo del 1986, uno dei pilastri del nuovo modo di intendere la didattica della matematica, per avere i dettagli di tali critiche. Si veda anche Sarrazy (1995; nella trad. it. alle pagine 136-137).

1.4 Concetto e concettualizzazione in matematica

In (D'Amore, 1999b, pagg. 193-208; 2001a; 2001d) si danno le idee di base attraverso le quali tentare una risposta alla domanda su che cosa sia, dapprima in generale e poi in matematica, un concetto. Rinviano i lettori più curiosi a quei lunghi lavori per un approfondimento, ci limitiamo qui solo a riassumere il discorso.

Distinguere il “concetto” dalla sua costruzione non è facile e, forse, non è né possibile né auspicabile: un concetto è, per così dire, continuamente in fase di costruzione ed in questa

stessa costruzione sta la parte più problematica e dunque ricca del suo significato:



Potremmo chiamare, come fanno altri Autori, tale costruzione: *concettualizzazione*, e chiederci che cosa sia e come avvenga. Nel tentativo di far luce su questo argomento, molti autorevoli studiosi hanno proposto ipotesi e teorie sulle quali non entriamo in dettagli, rinviando ancora, per una rapida carrellata, a D'Amore (1999b); basti ricordare i contributi (spesso tra loro in ferma opposizione) di Vygotskij, di Piaget, di Gal'perin, di Bruner, di Gagné,... tanto per limitarci solo ai più noti.

Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la seconda domanda (*Che cos'è o Come avviene la concettualizzazione?*) resta fondamentalmente un mistero...

Un passo chiarificatore molto profondo è stato tentato da Vergnaud (1990) che unifica nel concetto la sua stessa componente costruttiva; secondo Vergnaud, il punto decisivo nella concettualizzazione (e nella didattica, ma questo è un discorso più specifico, che dovrò riprendere e sviluppare tra breve) è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto* ed un'operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è la *nominalizzazione*. Egli intende con "concettualizzazione" proprio questa appropriazione consapevole, quando propone la seguente definizione: un concetto C

è la terna (S, I, S) dove S è il referente, I il significato ed S il significante.

Resta il fatto che *appropriarsi* di un concetto (qualsiasi cosa ciò significhi) richiede comunque sempre ben più che *nominarlo* (la questione risale almeno al Medioevo)... (D'Amore, 1999b, 2001b).

Ora, lungi da me l'idea di tentare una teoria generale di queste cose; ma, certo, il caso della matematica è, in questo settore, peculiare; ciò, almeno per tre motivi:

ogni concetto matematico ha rinvii a “non-oggetti”; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in matematica non sono possibili rinvii ostensivi

ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci [Qui “oggetto” è inteso nel senso di “oggetto reale” o di “cosa”. Che cosa ciò significhi è ben espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la “cosa”, in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti:

tridimensionalità;

accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi alla volta) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche;

possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre “cose”].

Si parla più spesso in matematica di “oggetti matematici” che non di “concetti matematici” in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare

dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998). Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno, oggetto*), come metterò in evidenza ancora meglio nel prossimo paragrafo, al momento in cui farò riferimento al *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993, pag. 38).

In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno: «Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici... L'elenco centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici...» (Vygotskij, 1962; nell'ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).

A proposito di questa citazione di Vygotskij o, meglio, approfittando di essa, è bene compiere una rapida considerazione a proposito della parola “segno”, suggeritaci da conversazioni e scambi di idee con Raymond Duval, in quanto, egli afferma, presso alcuni studiosi di didattica si scorge una riduzione del *segno* ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti.

In riferimento a De Saussure (1915) (che Vygotskij conosceva bene a causa della sua formazione di linguista) non c'è segno fuori da un “sistema di segni”.

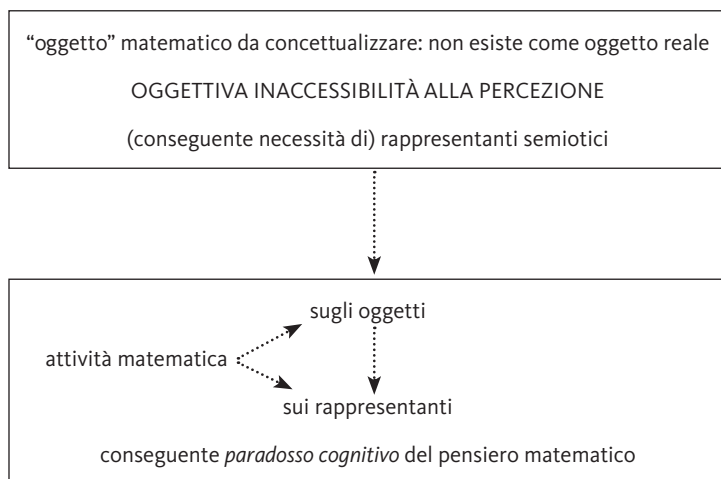
Per esempio, le parole non hanno significato che all'interno del sistema di una lingua (da qui i problemi ben noti di traduzione).

Quando in Duval (e dunque qui) si parla di “registro di rappresentazione semiotica” ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione, trattamento e di oggettivazione, e non ci si riferisce invece a delle notazioni convenzionali che non formano un sistema. Per esempio, la numerazione binaria, o quella decimale, formano un sistema, ma non le lettere o i simboli che si utilizzano per indicare delle operazioni algebriche. Forse converrebbe allora tradurre Vygotskij ponendo in luogo della parola “segno” la locuzione “sistema di segni”.

Si noti anche che, da questo punto di vista e contrariamente all'opinione diffusa, un sistema semiotico non è uno strumento: esso è costitutivo del funzionamento stesso del pensiero e della conoscenza. Solo un codice che venga usato per ricodificare un messaggio già espresso, può essere uno strumento.

1.5 Il caso della matematica

Già in altre occasioni è risultato efficace il seguente schema.



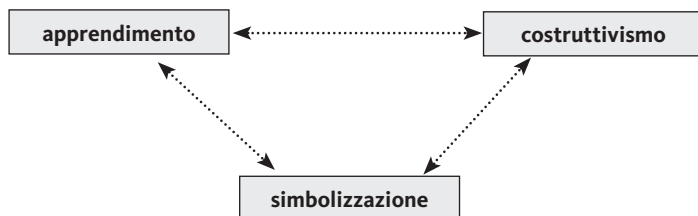
Vediamo in che cosa consiste questo *paradosso* (Duval, 1993, pag. 38; la traduzione è concordata con l'Autore): «(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al con-

trario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».

In questa fase “paradossale” dell’apprendimento, bisogna stare molto attenti; da un lato lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l’insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, d’altra parte, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà “apprendendo” solo a far uso di segni (D’Amore, 1999a).

1.6 Apprendimento, costruttivismo, simbolizzazione

Apprendere sembra dunque essere una costruzione sottoposta al bisogno di “socializzare”, il che avviene ovviamente grazie ad un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè, poi, del registro di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze).



Torneremo a parlare di costruttivismo, proponendo una definizione che sembra calzare perfettamente al caso della matematica. Per giungere a tanto, però, si deve far chiarezza su alcune questioni che sono fondamentali nel dibattito attuale.

1.7 Semiotica e noetica nella matematica e nell'apprendimento della matematica

In matematica, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice per primo Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dei quali il lavoro del 1993 costituisce un primo tentativo di sintesi (1993); ma Duval pubblica su questo argomento anche lavori nel 1989 e 1990]; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994).

Dunque, prendendo a prestito da Duval: **non c'è noetica senza semiotica.**

Da tempo, nel nostro gruppo, si usa esplicitare i significati dei termini semiotica e noetica nel modo seguente:

- semiotica $=_{df} \rightarrow$ teoria che studia le diverse rappresentazioni all'interno di opportuni registri
- noetica $=_{df} \rightarrow$ acquisizione concettuale di un oggetto.

Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero, per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale. Useremo il seguente simbolismo:

- $r^m =_{df} \rightarrow$ registro semiotico m-esimo ($m = 1, 2, 3, \dots$)
- $R^m_i(A) =_{df} \rightarrow$ rappresentazione semiotica i-esima ($i = 1, 2, 3, \dots$) di un oggetto A nel registro semiotico r^m .

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Si intende solitamente con “caratteristiche della semiotica” tre attività cognitive diverse: *rappresentazione* – *trattamento* – *conversione*. Vediamo di che si tratta. Ancora una volta, usiamo un grafico per illustrare tali caratteristiche della semiotica, perché mi sembra più incisivo ed efficace.

.....

oggetto A da rappresentare $\rightarrow$ scelta dei tratti distintivi di A $\rightarrow$
 $\rightarrow$ **RAPPRESENTAZIONE** $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

se si applica una trasformazione di rappresentazione **TRATTAMENTO**, si ottiene una nuova rappresentazione $(i \neq j)$ $R^m_j(A)$ nello stesso registro semiotico r^m

se si applica una trasformazione di registro **CONVERSIONE**, si ottiene una nuova rappresentazione $R^n_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)

(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, ...)

.....

I tratti distintivi fissati dell’oggetto A dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto. Scegliendo un registro diverso si fisserebbero altri tratti di A. Ciò dipende dal fatto che due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri diversi, hanno contenuti diversi.

Ancora una nota. La scelta dei tratti distintivi di A non è neutra e fissata a priori, ma è frutto di opinione, volontà, necessità o gusto ... dunque fatti legati non solo all’oggetto di discorso ma anche al soggetto umano che sta rappresentando A.

Quali sono le caratteristiche della noetica?

L'acquisizione concettuale di un oggetto matematico si basa su due sue caratteristiche "forti" (Duval, 1993):

- l'uso di più registri di rappresentazione semiotica è tipica del pensiero umano;
- la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza.

Queste considerazioni mostrano l'interdipendenza stretta tra noetica e semiotica, come si passa dall'una all'altra: non solo dunque non c'è noetica senza semiotica, ma la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica.

A questo punto è doverosa una precisazione sulla teoria che da anni sta sviluppando Raymond Duval.

In essa, egli accorda alla conversione un posto centrale rispetto alle altre funzioni, ed in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico.

Perché? Per almeno tre ragioni distinte:

- la conversione cozza contro dei fenomeni di non congruenza che sono per nulla concettuali (in quanto legati al senso stesso della conversione). Questi fenomeni di non congruenza costituiscono l'ostacolo più stabile osservabile nell'apprendimento della matematica, a tutti i livelli ed in tutti i domini.
- la conversione permette di definire delle variabili cognitive indipendenti, il che rende possibile costruire delle osservazioni e delle sperimentazioni relativamente precise e fini. Certo, una volta validate attraverso una ricerca molto metodica, esse possono poi essere utilizzate come delle variabili didattiche. Dunque, Duval non lavora nella osservazione di una classe per settimane, ma piuttosto si comporta come

Il volume mette a disposizione di chi insegnerà o già insegna matematica nella scuola secondaria i principali strumenti di didattica, la cui acquisizione costituisce, insieme alla preparazione disciplinare, un aspetto fondamentale della professione.



Dopo una breve ma puntuale rassegna delle **principali tematiche** correlate alla **didattica della matematica**, cui è dedicato il primo capitolo, il testo pone particolare attenzione alle componenti e ai **processi di apprendimento** passando poi ad analizzare il ruolo delle **misconcezioni**, utili ad interpretare i comportamenti degli studenti e gli ostacoli ad una corretta acquisizione delle conoscenze, consentendo al docente di progettare efficaci percorsi di insegnamento.

L'ultimo capitolo è incentrato su uno dei temi di maggiore attualità per la scuola italiana, ovvero le **valutazioni standardizzate** nazionali e internazionali i cui risultati rappresentano un valido strumento per migliorare l'azione didattica.

Il volume è infine arricchito da un'**ampia bibliografia di riferimento** a corredo di ogni capitolo e da un'Appendice con indicazioni riguardanti materiali di documentazione e aggiornamento per l'insegnante.



€ 14,00

