C. Sbordone • F. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Numeri e operazioni

EdiSES

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Numeri e operazioni

Volume I

Carlo Sbordone
Francesco Sbordone

EdiSES

Carlo Sbordone - Francesco Sbordone
Fondamenti di matematica per la formazione di base - Numeri e operazioni - VOLUME 1

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2022 2021 2020 2019 2018

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Carlo Sbordone
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Francesco Sbordone
Laurea magistrale in Fisica
Università di Roma "La Sapienza"

Stampato presso
Print Sprint srl - Napoli
per conto della
EdiSES - Piazza Dante, 89 - Napoli

www.edises.it
info@edises. it

ISBN 9788879599832

Prefazione

Il presente corso di **Fondamenti di matematica per la formazione di base** è rivolto ai futuri insegnanti delle scuole elementari e dell'infanzia e si occupa (Vol. 1) di ***numeri e operazioni*** e (Vol. 2) di ***elementi di geometria.***

L'esposizione è concisa ed essenziale e contiene spesso spunti di logica senza troppo soffermarsi in descrizioni discorsive. Si fa uso di simboli per rendere sintetiche e chiare le esposizioni di matematica, attraverso un'adeguata gradualità. Condividendo il punto di vista che i futuri insegnanti, nel corso degli studi universitari, debbano accedere ad un livello e ad una quantità di conoscenze matematiche che superino quelli relativi a quanto essi stessi dovranno poi presentare in classe, vengono offerti diversi argomenti. Viene praticato un metodo espositivo motivato dalla convinzione degli autori che ogni *concetto matematico*, anche a livello elementare, richieda una definizione precisa, ma anche l'accenno a qualche aspetto intuitivo, la motivazione della sua importanza e un po' di collocazione storica.

Inoltre, ogni *metodo di calcolo* richiede la consapevolezza di quando sia opportuno applicarlo.

Significativo è il ricorso alla coerenza. Ad esempio, nella presentazione delle operazioni aritmetiche dal caso dei numeri interi a quello delle frazioni, pur evidenziando le differenze nel passaggio dai diversi insiemi, è fondamentale mostrare che esse corrispondono allo stesso concetto.

Nel Volume 1, dopo un capitolo di teoria degli insiemi e uno di logica per la matematica, vengono presentati gli insiemi numerici, ponendo l'accento sulla loro collocazione sulla retta, e il metodo delle coordinate nel piano. Si studiano successivamente le funzioni elementari e le equazioni di primo e secondo grado. In appendice sono forniti cenni di calcolo combinatorio e cenni di probabilità e statistica

Nel Volume 2, vengono presentati i concetti primitivi della geometria euclidea, triangoli e poligoni, rette perpendicolari e parallele, relazioni tra elementi dei poligoni, trapezi, parallelogrammi, e le trasformazioni isometriche nel piano. Un capitolo è dedicato alla circonferenza e al cerchio, e uno ai poligoni inscritti e circoscritti. I teoremi di Euclide e Pitagora rientrano nel capitolo sull'equivalenza di figure piane.

Viene poi ripreso lo studio delle curve nel piano cartesiano e si considerano problemi descritti da equazioni di primo e secondo grado e da sistemi di primo grado.

Una posizione particolare occupa lo studio dei rapporti fra grandezze omogenee con particolare attenzione al teorema di Talete. Nei capitoli conclusivi vengono trattate similitudini e omotetie e presentate varie applicazioni dell'algebra alla geometria. In appendice sono presenti cenni sulle equazioni algebriche di secondo grado o ad esse riconducibili.

Napoli 4 dicembre 2017
Gli Autori

Indice

5 Quantità e unità di misura

6 Funzioni

7 Equazioni e disequazioni

A Calcolo combinatorio

B Spazi di probabilità. Eventi aleatori

C Probabilità condizionata e applicazioni

D Elementi di statistica descrittiva

Insiemi

CAPITOLO
1

I gruppi sanguigni

Il gruppo sanguigno è una delle caratteristiche di un individuo, che in parte dipende dalla presenza o meno di **antigeni** sulla superficie dei globuli rossi. Nel 1901 lo scienziato austriaco Karl Landsteiner identificò i quattro gruppi del *sistema AB0*: **gruppo A**, **gruppo B**, **gruppo AB**, **gruppo 0**.

Per tener conto del **fattore Rh**, scoperto nel 1940, che può essere presente (+) o assente (−) per ciascun gruppo, si è suddivisa la popolazione mondiale S in otto insiemi di individui utilizzando i simboli:

A+, A−
B+, B−
AB+, AB−
0+, 0−.

Gli antigeni del sangue pongono dei limiti alla possibilità di trasfusione tra individui appartenenti a gruppi diversi.

Precisamente, gli individui del **gruppo A** presentano sulla superficie dei loro globuli rossi l'*antigene A* che può annientare i globuli rossi dei gruppi B e AB. Gli individui del **gruppo B** presentano l'*antigene B* che può annientare i globuli rossi dei gruppi A e AB. Gli individui del **gruppo AB**, invece, hanno l'*antigene A* e l'*antigene B* e non producono anticorpi né contro il gruppo A né contro il gruppo B. Gli individui del **gruppo 0** non producono anticorpi contro i gruppi A, B e AB, non avendo né l'antigene A, né l'antigene B.

Per risolvere il problema della compatibilità dei gruppi sanguigni, bisogna tener conto delle citate specificità, sintetizzate in Figura 1.1 e anche nello schema matriciale di Figura 1.2.

Vogliamo far vedere come la teoria degli insiemi fornisca un modo ancora più schematico ed immediato di illustrare la compatibilità tra gruppi sanguigni, attraverso un diagramma di Venn. In esso, le regioni contrassegnate con le lettere A−, A+, B−, B+ ecc. rappresentano gli insiemi di individui degli omonimi gruppi sanguigni. In esso una regione è contenuta in un'altra se gli individui della seconda possono essere donatori per quelli della prima (Figura 1.3).

Gli individui del gruppo	Ricevono da quelli dei gruppi	Donano a quelli dei gruppi
0+	0−, 0+	A+, 0+, B+, AB+
A+	A+, A−, 0+, 0−	A+, AB+
B+	B+, B−, 0+, 0−	B+, AB+
AB+	A+, B+, AB+, A−, B−, AB−, 0+, 0−	AB+
0−	0−	A+, B+, AB+, A−, B−, AB−, 0+, 0−
A−	A−, 0−	A+, A−, AB+, AB−
B−	B−, 0−	B+, B−, AB+, AB−
AB−	A−, 0−, B−, AB−	AB+, AB−

FIGURA 1.1

DONATORE

RICEVENTE	A+	A−	B+	B−	AB+	AB−	0+	0−
A+	sì	sì	no	no	no	no	sì	sì
A−	no	sì	no	no	no	no	no	sì
B+	no	no	sì	sì	no	no	sì	sì
B−	no	no	no	sì	no	no	no	sì
AB+	sì	sì	sì	sì	sì	sì	sì	sì
AB−	no	sì	no	sì	no	sì	no	sì
0+	no	no	no	no	no	no	sì	sì
0−	no	no	no	no	no	no	no	sì

FIGURA 1.2

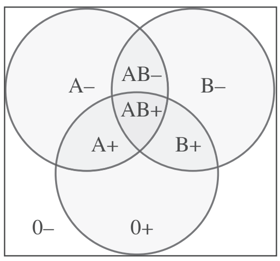

FIGURA 1.3

Segue

Precisamente, siano S l'insieme di tutti gli individui, e consideriamo i tre sottoinsiemi U, V, W di S definiti da:

U = insieme degli individui con antigene A;
V = insieme degli individui con antigene B;
W = insieme degli individui con antigene Rh

e rappresentati con cerchi in Figura 1.4.

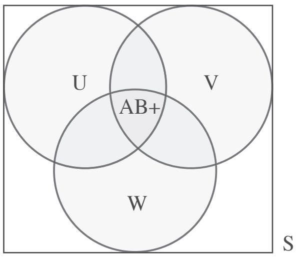

FIGURA 1.4

L'insieme complementare di $U \cup V \cup W$ rispetto a S cioè quello che si indica con

$$S - (U \cup V \cup W)$$

è costituito dai *donatori universali* e corrisponde alla regione 0− della Figura 1.3, i cui individui non hanno antigene A né B né Rh e quindi possono essere donatori per tutti gli individui.

Dal raffronto tra Figura 1.3 e Figura 1.4 si ricava ad esempio che l'insieme

$$U = (A-) \cup (AB-) \cup (AB+) \cup (A+)$$

degli individui con antigene A può essere ripartito in quattro regioni, ognuna delle quali consiste di individui "riceventi" da individui di U.

In particolare, poi, i riceventi universali sono quelli che appartengono alla regione AB+ che è l'intersezione dei tre insiemi U, V e W, cioè

$$AB+ = U \cap V \cap W.$$

1.1 Concetto di insieme

Il linguaggio comune contiene varie parole per indicare una *collezione* di oggetti. I biologi adoperano termini quali *famiglia*, *genere*, *ordine*, per denominare animali e piante che hanno certe caratteristiche in comune. Gli economisti suddividono la popolazione di una regione in *classi* sociali; i medici classificano i loro pazienti in base al loro *gruppo sanguigno*; nelle attività sportive gli atleti costituiscono le *squadre* delle varie specialità.

Tutte le parole: collezione, totalità, categoria, classe, gruppo, famiglia, squadra, insieme, hanno un significato in comune. In Matematica, per indicare una collezione di oggetti di natura qualsiasi, si adopera un unico termine: quello di *insieme*.

Una descrizione del concetto di insieme che merita di essere ricordata è dovuta al matematico tedesco G. Cantor (1845-1918), che fu il fondatore della moderna teoria degli insiemi: «*Un insieme è un raggruppamento, in un tutto, di oggetti, determinati e fra loro ben distinti, della nostra intuizione e del nostro pensiero*».

Di solito un insieme viene indicato con una lettera maiuscola e ogni oggetto appartenente all'insieme, cioè ogni *elemento* dell'insieme, viene indicato con una lettera minuscola.

Inoltre molto spesso gli insiemi vengono rappresentati graficamente mediante *diagrammi di Venn*, cioè mediante figure piane contrassegnate da opportuni simboli (si veda il Paragrafo 1.5).

In questo capitolo descriviamo il linguaggio della teoria degli insiemi, riportando tutte le nozioni simboliche che in essa si adoperano e che da essa vengono prese in prestito in ogni altro ramo della Matematica.

1.2 Esempi di insiemi

Consideriamo i numeri:

$$3,\ 12,\ 25,\ 77.$$

Essi sono *numeri naturali* (o *interi positivi*) e costituiscono l'*insieme*:

$$\{3,\ 12,\ 25,\ 77\}$$

Denotiamo con la lettera S tale insieme: $S = \{3, 12, 25, 77\}$.

Per indicare che 3 è un elemento di S, scriviamo:

$$3 \in S,$$

e leggiamo «3 appartiene ad S».

Per indicare invece che 5 non è un elemento di S scriviamo:

$$5 \notin S,$$

e leggiamo «5 non appartiene ad S».

L'insieme i cui elementi sono tutti i numeri naturali si indica con N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

e il suo studio sarà approfondito nel Capitolo 3.

► Esempio 1.1

Indichiamo con A l'insieme delle lettere dell'alfabeto:

$$A = \{a, b, c, d, e, \dots, u, v, z\},$$

e con V l'insieme delle vocali:

$$V = \{a, e, i, o, u\};$$

allora si ha:

$$b \in A, \qquad b \notin V,$$
$$a \in A, \qquad a \in V.$$

Osservazione 1.1. Non abbiamo dato la definizione di *insieme*, né quella di *oggetto* o *elemento* di un insieme. Infatti consideriamo tali concetti come primitivi. Per comprendere meglio tali concetti diamo i seguenti esempi.

Esempi di insiemi:

1. L'insieme di tutti i pianeti del sistema solare.
2. L'insieme di tutti i mesi dell'anno.
3. L'insieme di tutti gli studenti di questa Università.
4. L'insieme di tutti gli esercizi di questo testo.

► Esempio 1.2

Sia N l'insieme dei numeri naturali e Z l'insieme di tutti gli *interi relativi*:

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Allora si ha

$$1 \in Z, \quad -3 \in Z, \quad \frac{2}{3} \notin Z, \quad 18 \in Z, \quad -1 \notin N, \quad 5 \in N.$$

1.3 Quantificatori

Per esprimere concisamente la frase:

«esiste almeno un x»

si suole scrivere

$$\exists x.$$

e per esprimere concisamente la frase:

«per ogni x»

si suole scrivere:

$$\forall x.$$

Il simbolo $\exists$ si chiama *quantificatore esistenziale* e il simbolo $\forall$ si chiama *quantificatore universale*.

Inoltre, per esprimere concisamente la frase:

«esiste un solo x»

si suole scrivere:

$$\exists!\ x.$$

Ad esempio, per esprimere che ogni elemento dell'insieme S appartiene anche all'insieme T, scriviamo:

$$\forall x \in S \ \text{ si ha } \ x \in T.$$

Mentre, per esprimere che non ogni elemento di T appartiene ad S, scriviamo:

$$\exists x \in T \ \text{ tale che } \ x \notin S.$$

► **Esempio 1.3**

$$\forall x \in N \ \text{ si ha } \ x \in Z$$

$$\exists x \in Z \ \text{ tale che } \ x \notin N$$

Spesso, in luogo di «tale che» useremo il simbolo «:».

1.4 Sottoinsiemi o parti di un insieme

Consideriamo l'insieme dei numeri naturali minori di 100:

$$X = \{1, 2, 3, ..., 99\}.$$

Un modo diverso per rappresentare X è il seguente:

$$X = \{x \in N : «x < 100»\}$$

che si legge: X è l'insieme degli x appartenenti ad N tali che $x < 100$; o anche: X è il *sottoinsieme* di n determinato dalla proprietà

$$\mathcal{P} = «x < 100».$$

Per esprimere che un elemento x appartenente ad S verifica la proprietà $\mathcal{P}$, si dice anche che $\mathcal{P}$ è *vera* per x.

Osservazione 1.2. Si può dunque rappresentare lo stesso insieme in due modi differenti:

1) elencando i suoi elementi tra parentesi graffa;
2) mediante una proprietà caratteristica dei suoi elementi.

Osserviamo inoltre che non ha importanza l'ordine secondo cui scriviamo gli elementi di un insieme in parentesi graffa; ad esempio:

$$\{1, 3\} = \{3, 1\}.$$

► Esempio 1.4

Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto e sia V l'insieme delle vocali:

$$A = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$$
$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

allora V è il sottoinsieme di A determinato dalla proprietà

«x è una vocale»

e scriviamo

$$V = \{x \in A : \text{«}x \text{ è una vocale»}\}$$

► Esempio 1.5

Sia N_d l'insieme dei numeri dispari:

$$N_d = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

allora N_d è il sottoinsieme di N determinato dalla proprietà

«x è dispari»

e scriviamo:

$$N_d = \{x \in N : \text{«}x \text{ è dispari»}\}$$

Analogamente, sia N_p l'insieme dei numeri pari

$$N_p = \{2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

allora

$$N_p = \{x \in N : \text{«}x \text{ è pari»}\}$$

Evidentemente

$$1 \in N_d, \quad 1 \notin N_p, \quad 2 \in N_p, \quad 2 \notin N_d$$

Osservazione 1.3. Osserviamo che un numero $x \in N$ è pari se e solo se esiste un numero $k \in N$ tale che $x = 2k$. Infatti ad esempio

$$2 = 2 \cdot 1$$
$$4 = 2 \cdot 2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$8 = 2 \cdot 4$$

e così via.

Dunque

$$x \in N_p \quad \text{se e solo se} \quad \exists k \in N \quad \text{tale che} \quad x = 2\,k$$

Analogamente un numero $x \in N$ è dispari se e solo se esiste un numero $k \in N$ tale che $x = 2k - 1$.

Dunque:

$$x \in N_d \quad \text{se e solo se} \quad \exists k \in N \quad \text{tale che} \quad x = 2k - 1.$$

Definizione 1.1. Se S è un insieme e $\mathcal{P}$ una proprietà vera per qualche elemento di S, allora l'insieme di tutti gli elementi di S per cui $\mathcal{P}$ è vera si indica con $\{x \in S : \mathcal{P}\}$ e si chiama *sottoinsieme (o parte) di S determinato dalla proprietà* $\mathcal{P}$.

Ad esempio sia $S = N$ e consideriamo la proprietà «$x = 3$»; essa è verificata solo dall'elemento 3 di N e determina il sottoinsieme costituito dal solo numero 3: $\{3\}$. In definitiva possiamo scrivere $\{3\} = \{x \in N : «x = 3»\}$.

► Esempio 1.6

Sia $S = N$ e consideriamo le proprietà

$$\mathcal{P}_1 = «\exists k \in N : x = 2k - 1», \qquad \mathcal{P}_2 = «\exists k \in N : x = 2k»$$

La prima determina il sottoinsieme N_d di N costituito dai *numeri dispari*:

$$N_d = \{x \in N : \mathcal{P}_1\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

e la seconda determina il sottoinsieme N_p di N costituito dai *numeri pari*:

$$N_p = \{x \in N : \mathcal{P}_2\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

Osservazione 1.4. Dato un qualunque insieme S, *vi sono proprietà vere per tutti gli elementi di S*. Ad esempio la proprietà $\mathcal{P} = «x \in S»$ è verificata da tutti gli elementi di S (diciamo che è *vera* in S), dunque anche S è un sottoinsieme di S.

Vi sono poi proprietà che non sono vere per alcun elemento di S. Ad esempio la proprietà $\mathcal{A} = «x \notin S»$ non è verificata da nessun elemento di S (diciamo che è *falsa* in S). Si conviene che una tale proprietà definisca anch'essa un sottoinsieme di S, che prende il nome di *sottoinsieme vuoto* di S e si indica con il simbolo $\varnothing$:

$$\varnothing = \{x \in S: «x \notin S»\}.$$

► Esempio 1.7

Sia S l'insieme costituito dai due numeri 0 e 1:

$$S = \{0, 1\}$$

e consideriamo le proprietà

$$\mathcal{A} = «x = 0», \qquad \mathcal{C} = «x \in S»,$$
$$\mathfrak{B} = «x = 1», \qquad \mathcal{D} = «x = 3»$$

Tali proprietà definiscono rispettivamente i seguenti sottoinsiemi di S:

$$A = \{x \in S : \mathcal{A}\} = \{0\} \qquad C = \{x \in S : \mathcal{C}\} = \{0, 1\}$$
$$B = \{x \in S : \mathfrak{B}\} = \{1\} \qquad D = \{x \in S : \mathcal{D}\} = \varnothing$$

Evidentemente non esistono altri sottoinsiemi di S.

L'insieme

$$\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \varnothing,$$

è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S.

In generale, dato un insieme S, con il simbolo $\mathcal{P}(S)$ si indica l'*insieme di tutti i sottoinsiemi* di S.

Pertanto possiamo scrivere:

$$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \varnothing\}$$

Osservazione 1.5. Osserviamo che se a è un elemento dell'insieme S, il sottoinsieme $\{a\}$ di S è un elemento di $\mathcal{P}(S)$ e non di S:

$$a \in S, \qquad \{a\} \in \mathcal{P}(S), \qquad \{a\} \notin S$$
$$1 \in N, \qquad \{1\} \in \mathcal{P}(N), \qquad \{1\} \notin N$$

1.5 Inclusione

Consideriamo i due sottoinsiemi di N

$$X = \{1, 2, 3\} \qquad Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

Evidentemente ogni elemento di X appartiene anche ad Y: diciamo che X è *contenuto* in Y e scriviamo

$$X \subseteq Y$$

Definizione 1.2. In generale se S è un insieme e X ed Y sono due sottoinsiemi di S, diciamo che *X è contenuto* (o *incluso*) in Y e scriviamo

$$X \subseteq Y.$$

se ogni elemento di X appartiene anche ad Y.

► **Esempio 1.8**

Consideriamo i due sottoinsiemi di N:

$$X = \{2, 4, 124\} \qquad Y = N_p$$

Allora X è contenuto in Y:

$$\{2, 4, 124\} \subseteq N_p$$

in quanto ogni elemento dell'insieme $\{2, 4, 124\}$ è un numero pari. Analogamente

$$N_p \subseteq N$$

in quanto ogni numero pari è in particolare un numero naturale e

$$N_d \subseteq N$$

in quanto ogni numero dispari è in particolare un numero naturale.

► **Esempio 1.9**

Consideriamo l'insieme Z degli interi relativi:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

e i suoi sottoinsiemi

$$X = \{-1, 0, 1\} \qquad Y = N$$

Evidentemente X non è contenuto in Y, perché l'elemento -1 di X non appartiene ad Y:

$$-1 \in X \quad \text{e} \quad -1 \notin Y$$

In generale per indicare che il sottoinsieme X di S *non è contenuto* nel sottoinsieme Y di S, e cioè per indicare che non tutti gli elementi di X appartengono anche ad Y si scrive

$$X \nsubseteq Y$$

e si legge «X non è contenuto in Y».

Pertanto possiamo scrivere:

$$\{-1, 0, 1\} \not\subseteq N$$

Osservazione 1.6. Osserviamo che se X è un sottoinsieme di S, evidentemente ogni elemento di X appartiene ad X, dunque X è contenuto in se stesso: $X \subseteq X$; inoltre si conviene che il sottoinsieme vuoto $\varnothing$ di S sia contenuto in ogni sottoinsieme X di $S : \varnothing \subseteq X$. Osserviamo infine che per ogni sottoinsieme X di S si ha $X \subseteq S$. Le due scritture $X \subseteq S$ e $X \in \mathcal{P}(S)$ sono equivalenti.

Definizione 1.3. Due sottoinsiemi X e Y dell'insieme S si dicono *uguali* e si scrive

$$X = Y$$

se essi contengono gli stessi elementi.

Ad esempio gli insiemi $X = \{2, 3, 7, 8\}$, $Y = \{8, 2, 8, 7, 3\}$ sono uguali, giacché contengono gli stessi elementi.

Osservazione 1.7. Se X e Y sono sottoinsiemi di S, possiamo esprimere mediante i quantificatori il fatto che $X \subseteq Y$ o il fatto che $X \not\subseteq Y$. Si ha

$$\begin{array}{lll} X \subseteq Y & \text{se} & \forall x \in X,\ x \in Y \\ X \not\subseteq Y & \text{se} & \exists x \in X,\ x \notin Y \end{array}$$

Definizione 1.4. Se X e Y sono due sottoinsiemi di S e si ha $X \subseteq Y$, $X \neq Y$, allora diciamo che X è *contenuto propriamente* (o *strettamente*) in Y e scriviamo:

$$X \subset Y$$

Evidentemente se $X \subset Y$ allora $X \subseteq Y$.

► Esempio 1.10

Evidentemente si ha:

$$N_p \subset N \qquad N_d \subset N$$

Osservazione 1.8. Siamo X e Y due sottoinsiemi di S. Allora $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Riassumiamo le seguenti proprietà dell'inclusione: se X, Y, Z sono sottoinsiemi dell'insieme S, si ha

$$\begin{array}{ll} X \subseteq X & (\textit{proprietà riflessiva}) \\ X \subseteq Y,\ Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z & (\textit{proprietà transitiva})^* \\ X \subseteq Y,\ Y \subseteq X \Rightarrow X = Y & (\textit{proprietà asimmetrica}) \end{array}$$

La prima e la terza sono state già dimostrate. La seconda si dimostra facilmente osservando che se ogni elemento di X appartiene ad Y e se ogni elemento di Y appartiene a Z, allora ogni elemento di X appartiene anche a Z.

1.6 Diagrammi di Venn

Un modo semplice ed istruttivo per descrivere le relazioni tra insiemi è quello di utilizzare i cosiddetti *diagrammi di Venn*.

* Il simbolo $\Rightarrow$ significa "implica".

Ad esempio, considerati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

possiamo pensare i numeri appartenenti ad A disegnati in una figura che rappresenta A e quelli appartenenti a B in una figura che rappresenta B, ed illustrare con un diagramma il fatto che A è contenuto in B (Figura 1.5):

$$A \subseteq B$$

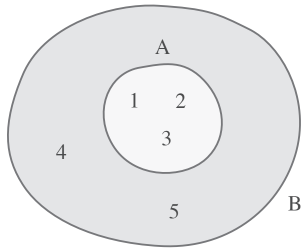

FIGURA 1.5

Se invece

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 5, 6\}$$

avremo che A non è contenuto in B (Figura 1.6).

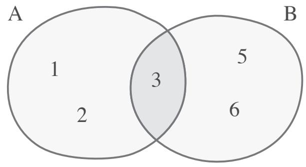

FIGURA 1.6

1.7 Unione di insiemi

Considerati i due sottoinsiemi di N:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$$

diciamo *unione* di A e B il sottoinsieme C di N costituito dagli elementi che appartengono ad A *oppure* a B:

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e poniamo

$$C = A \cup B$$

che si legge «C è uguale ad A unione B». Il diagramma di Venn della Figura 1.7 rappresenta $A \cup B$.

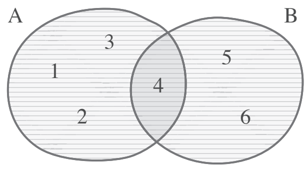

FIGURA 1.7

Definizione 1.5. In generale se S è un insieme e X ed Y sono due sottoinsiemi di S, si chiama *unione* di X e Y, e si indica con

$$\boxed{X \cup Y}$$

il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà «$x \in X$ oppure $x \in Y$».

In notazione simbolica: $X \cup Y = \{x \in S : «x \in X \text{ o } x \in Y»\}$.

Osservazione 1.9. Evidentemente si ha $X \cup Y = Y \cup X$ (proprietà commutativa).

Osservazione 1.10. Evidentemente ogni elemento di X è anche elemento di $X \cup Y$, cioè: $X \subseteq X \cup Y$, e ogni elemento di Y è anche elemento di $X \cup Y$, cioè: $Y \subseteq X \cup Y$.

▶ Esempio 1.11

Determiniamo l'unione delle seguenti coppie di sottoinsiemi di N:

$$X_1 = N_p,\ Y_1 = N_d$$
$$X_2 = \{x \in N : «x < 5»\},\ Y_2 = \{x \in N : «x \geq 5»\}$$
$$X_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ Y_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

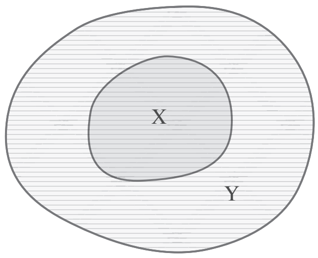

FIGURA 1.8

► **Esempio 1.11** ***segue***

Poiché un numero naturale $x \in N$ o è pari o è dispari, si ha

$$X_1 \cup Y_1 = N_p \cup N_d = N.$$

Poiché un numero naturale $x \in N$ o è minore di 5 o è maggiore o uguale a 5, si ha

$$X_2 \cup Y_2 = N.$$

Infine, evidentemente

$$X_3 \cup Y_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

► **Esempio 1.12**

Consideriamo i due sottoinsiemi di N

$$X = \{1, 2, 3\}$$
$$Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

allora si ha:

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\} = Y$$

in quanto ogni elemento di X appartiene anche ad Y.

Osservazione 1.11. In generale si ha (Figura 1.8):

$$X \cup Y = Y \quad \text{se} \quad X \subseteq Y$$

Sussistono inoltre le seguenti proprietà di semplice verifica:

$X \cup X = X$ (*proprietà iterativa dell'unione*)
$X \cup Y = Y \cup X$ (*proprietà commutativa dell'unione*)
$X \cup (Y \cup Z) = (Y \cup Y) \cup Z$ (*proprietà asimmetrica*)

1.8 Intersezione di insiemi

Considerati i due sottoinsiemi di N:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \qquad B = \{4, 5, 6\}$$

diciamo *intersezione* di A e B il sottoinsieme C di N costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B:

$$C = \{4, 5\}$$

e poniamo

$$C = A \cap B$$

che si legge «C è uguale ad A intersezione B». Il diagramma di Venn della Figura 1.9 rappresenta $A \cap B$.

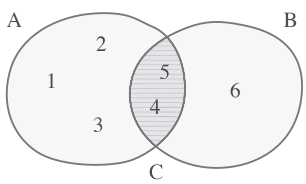

FIGURA 1.9

Definizione 1.6. In generale se S è un insieme e X ed Y sono due sottoinsiemi di S, si chiama *intersezione* di X e Y e si indica con

$$X \cap Y$$

il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà «$x \in X$ e $x \in Y$». Con notazione simbolica: $X \cap Y = \{x \in S : «x \in X \text{ e } x \in Y»\}$.

Osservazione 1.12. Evidentemente $X \cap Y = Y \cap X$.

Osservazione 1.13. Evidentemente ogni elemento di $X \cap Y$ è anche elemento di X, cioè: $X \cap Y \subseteq X$ e ogni elemento di $X \cap Y$ è anche elemento di Y, cioè:

$$X \cap Y \subseteq Y.$$

► Esempio 1.13

Determiniamo l'intersezione delle seguenti coppie di sottoinsiemi di N

$X_1 = \{1, 2, 3\}$, $\quad Y_1 = N_p$

$X_2 = \{x \in N : «x < 6»\}$, $Y_2 = \{x \in N : «x > 3»\}$

$X_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Poiché 2 è l'unico numero pari appartenente all'insieme $\{1, 2, 3\}$, si ha:

$$X_1 \cap Y_1 = \{2\}$$

Poiché

$$X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e

$$Y_2 = \{4, 5, 6, 7, ...\}$$

allora

$$X_2 \cap Y_2 = \{4, 5\}$$

Infine evidentemente

$$X_3 \cap Y_3 = \{5\}$$

Osservazione 1.14. Osserviamo che talvolta l'intersezione di due sottoinsiemi X e Y dell'insieme S può essere uguale al sottoinsieme vuoto $\varnothing$ di S.

Ad esempio i due sottoinsiemi di N : $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ non hanno elementi in comune e allora la proprietà che definisce la loro intersezione $\mathcal{P} = «x \in \{1, 2, 3\}$ e $x \in \{4, 5, 6\}»$ è falsa in N e dunque $X \cap Y = \{x \in N : \mathcal{P}\} = \varnothing$. In tal caso si dice anche che X e Y sono *disgiunti* o che la loro intersezione è *vuota*.

► Esempio 1.14

Consideriamo i due sottoinsiemi di N:

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

allora si ha

$$X \cap Y = \{1, 2, 3\} = X$$

in quanto ogni elemento di X appartiene anche ad Y.

Osservazione 1.15. In generale si ha $X \cap Y = X$ *se* $X \subseteq Y$. Sussistono inoltre le seguenti proprietà di semplice verifica:

$X \cap X = X$ (*proprietà iterativa dell'intersezione*)

$X \cap Y = Y \cap X$ (*proprietà commutativa dell'intersezione*)

$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (*proprietà associativa dell'intersezione*)

C. Sbordone • F. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Numeri e operazioni

EdiSES
www.edises.it

€ 14,00

ISBN 978-88-7959-983-2
9 788879 599832