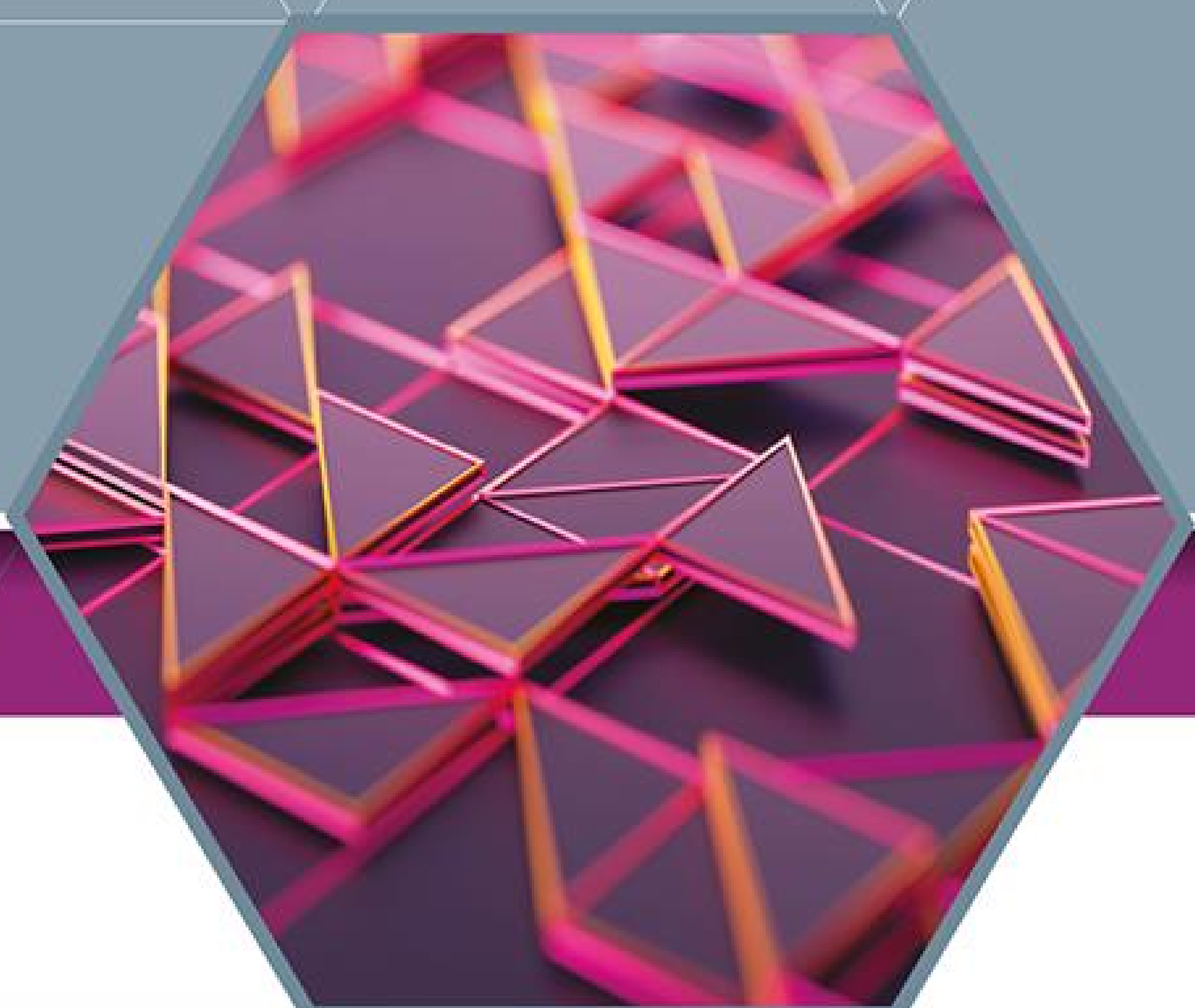
ESERCIZIARI PER INGEGNERIA

Algebra Lineare e Geometria



Maurizio **Brunetti**

QUARTA EDIZIONE

EdiSES università

Comprende versione **ebook**

Accedi ai contenuti **digitali**

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore**!

COLLEGATI AL SITO **EDISESUNIVERSITA.IT**

ACCEDI AL **MATERIALE DIDATTICO**

SEGUI LE **ISTRUZIONI**

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edisesuniversita.it** e accedere ai contenuti digitali.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie

Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso ai contenuti digitali** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edisesuniversita.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticati tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edisesuniversita.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

EdiSES università

I contenuti digitali sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere all'**Ebook**, ovvero la versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

EdiSES università

Maurizio Brunetti

Algebra Lineare e Geometria

Eserciziari per Ingegneria

IV EDIZIONE

EdiSES università

M. Brunetti
Algebra Lineare e Geometria - Eserciziari per Ingegneria - IV Edizione

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2026 2025 2024 2023 2022

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Stampato presso PrintSprint S.r.l. – Napoli

per conto della EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edisesuniversita.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 078 5

Indice

Introduzione

Per la matematica,
cerca non solo di ricordare
semplicemente cosa e come fare,
ma anche di capirlo e di apprenderlo
come si apprende un pezzo musicale.

PAVEL FLORENSKIJ
Lettera dal GULag alla figlia (1933)

Un autore che si accinga a dare alle stampe un volume, pur sapendo che – in lingua italiana e della stessa tipologia – di pubblicati ne esistono già n (con n naturale prossimo a 10^2), lo fa con una certa trepidazione ed è moralmente obbligato a giustificare la sua scelta. La disponibilità di ulteriori $10n$ dispense *online* dello stesso genere rende la situazione ancor più imbarazzante.

L'autore di *questo* volume, perciò, è in gravi ambasce. Non volendo ambire alla palma dell'esaustività o – e qui scappa da ridere – dell'eleganza formale, non può neanche appellarsi a un fantomatico ε di novità presente in queste pagine e non altrimenti fruibile, visto che, in tutta sincerità, non ha consultato tutte le $11n$ opere cui sopra si è fatto cenno.

Ciò detto, chi ha messo mano all'elaborazione di questo libro crede comunque di aver fatto un favore innanzitutto a un suo prossimo molto prossimo, cioè a quegli studenti che, *obtorto collo*, dovranno sostenere con lui l'esame di Geometria e

Algebra: gran parte degli esercizi qui raccolti sono tratti da prove d'esame del passato (alcune recentissime, altre *d'antan* che risalgono al secondo millennio dell'era cristiana). Ma vi sono ragioni per credere che anche altri possano trarne vantaggio.

Nel corso di una propria prova scritta, un caro amico dell'autore, pure docente di Geometria dell'Università 'Federico II', racconta del modo colorito con cui uno studente palesava il suo disagio esclamando: '*Perbacco* [interiezione ingentilita (ndA)]! *Sembra uno scritto del professor Brunetti...*'

Cedendo alla tentazione di inoltrarsi nelle sabbie mobili del soggettivismo e dell'introspezione psicologica, si proverà a indovinare almeno una delle motivazioni che hanno alimentato quell'iniqua leggenda metropolitana secondo la quale le prove scritte proposte dall'autore sarebbero 'insuperabili'.

Questa raccolta predilige i quesiti a risposta aperta. Una tipologia di esercizi molto poco gradita da chi, a scuola, è stato abituato a identificare sempre e comunque la risoluzione di un problema matematico con l'arida e meccanica applicazione di un algoritmo.

Eppure, l'unico senso in cui può esser vero che lo studio di questioni algebro-geometriche abbia un carattere formativo è che abitua chi li affronta all'assunzione di una *forma mentis* di carattere progettuale. È proprio in questa prospettiva che, in qualche caso, si lascia al lettore la scelta dei dati iniziali, cosicché la lunghezza e la difficoltà dell'esercizio talvolta dipendono dalla maggiore o minore sagacia con cui questa scelta è stata effettuata.

Gli esercizi di ogni capitolo sono preceduti da richiami di natura teorica. Il lettore non vi troverà il rigore che, giustamente, si pretende in un manuale di teoria. Lo scopo di ognuna di queste note è soprattutto quello di rammentare il significato delle notazioni utilizzate.

La scelta di trattare esclusivamente $\mathbb{R}$-spazi vettoriali piuttosto che spazi vettoriali su un generico campo $\mathbb{K}$ e di privilegiare omomorfismi tra spazi vettoriali numerici è stata certamente sofferta. Alla fine, però, si è reputato il realismo più intellettualmente onesto della raffinatezza: il docente che, agli studenti di un corso di algebra lineare del primo anno, intenda impartire esercizi riguardanti spazi vettoriali sulla chiusura algebrica di $\mathbb{F}_p$ o endomorfismi definiti sullo spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale omogenea, dovrà consultare altri volumi.

Una percentuale degli esercizi proposti è svolta completamente; per altri ci si limita a un suggerimento; per altri ancora si riportano delle risposte più o meno parziali, segnalate con il simbolo ✠.

Un ringraziamento va a Luciano Lomonaco che a più riprese ha incitato l'autore a compiere l'impresa: contrariamente alle previsioni più attendibili, la sua non si è rivelata una fatica di Sisifo. Ringrazio anche Adriana Ciampella che ha proposto miglioramenti, e la regina e le principesse di casa – Nunzia, Maria Antonietta e Vittoria – con cui sono indebitato più di quanto le parole possano esprimere.

Napoli, 14 maggio 2011
Maurizio Brunetti

Addendum per la seconda edizione

È opinione diffusa che un manuale di matematica debba contenere degli errori, onde evitare che il lettore vi si affidi troppo arrendevolmente e ciò vada a scapito della maturazione di latenti capacità critiche.

Sposando questo punto di vista, è indubbio che la prima edizione di questo libro si sia rivelata fin troppo... stimolante: fra gli studenti che hanno seguito le mie lezioni nell'anno accademico 2011/2012, varie decine hanno partecipato a *THE GAME*, una sorta di caccia agli errori che premiava con l'assegnazione di punti l'ardito che li scovasse per primo.

Per entusiasmo, acribia e occhio aquilino, si sono distinti – in quest'ordine – i signori Emanuele Monticelli, Guido Milanese e Luigi Massotti. *Post hoc* e chissà se anche *propter hoc*, i campioni – iscritti, l'oro e il bronzo, al corso di laurea in Ingegneria Civile e, l'argento, a quello in Ingegneria Gestionale dei Progetti e delle Infrastrutture – hanno tutti e tre superato le due prove infracorso e, al primo appello utile, l'esame.

Soprattutto grazie a loro, l'individuazione di ulteriori errori in questa nuova edizione risulterà certamente più difficile, ma – si badi – non impossibile: l'autore, del resto, non ha resistito alla tentazione di inserirvi nuovi esercizi tratti dalle prove d'esame più recenti.

Ai lettori cui capiterà di intrattenersi per troppi mesi in compagnia dell'algebra lineare e di questo libro – magari a causa di malaugurati eventi cui non sarà stato estraneo chi scrive – segnalo, a mo' di auspicio e di consolazione, il verso del poeta svevo Konrad Weiss (1880-1940): *'Wehrlos, doch in nichts vernichtet'*: 'Inerme, ma in niente annientato'.

Prosit!

Napoli, 15 maggio 2012
zeresimo genetliaco di Laura Maria Brunetti

Addendum per la quarta edizione

Sono ormai passati quasi due lustri da quando, in occasione dell'uscita della terza edizione – era la festa di sant'Uberto di Liegi, patrono dei matematici e dei cacciatori – individuavo una procedura ampiamente sperimentata per identificare lo studente più ansioso dell'anno. Si tratta di questo: a un certo punto del corso, il numero uno degli angustiati viene immancabilmente allo scoperto e rivolge per primo al docente la domanda fatidica: 'Professore, quanto tempo avremo per svolgere il compito? Quanti esercizi conterrà la prova scritta?'.

Osservavo poi che tali interrogativi, pur non essendo né illegittimi, né irriverenti, sono del tutto irrilevanti ai fini di stimare in anticipo la difficoltà di una prova. Si consideri, a mo' di esempio, un ipotetico Compito A che consti di un solo esercizio: verificare la compatibilità di un sistema lineare non omogeneo costituito da 2022 equazioni e 2202 incognite. Tale prova potrebbe rivelarsi di qualche ε più impegnativa di un Compito B che preveda, invece, i ben 7 (sette!) esercizi che seguono:

1. effettuare la somma di $(1,2,3)$ e $(4,5,6)$ in $\mathbb{R}^3$;
2. fissato un riferimento del piano, determinare le coordinate di un punto sulla retta di equazione $x = 0$;
3. calcolare il prodotto scalare standard fra i vettori $(1,2)$ e $(3,4)$ di $\mathbb{R}^2$;
4. dimostrare che vale zero il determinante della matrice nulla con due righe e due colonne;
5. calcolare l'inversa della matrice unità;
6. stabilire se è iniettiva l'applicazione lineare nulla da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$;
7. individuare il centro della conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Giunti nella terza decade del secolo XXI, la diffusione pandemica di agenti deleteri che la Muraglia cinese non è riuscita a contenere – l'applicazione (non lineare) TikTok, per esempio – ha ulteriormente alterato l'indole sociale e raziocinante della comune degli uomini. L'inquietudine non smette di aumentare e l'incertezza del proprio futuro continua a guastare il sonno di tanti. Ho allora escogitato per questa quarta edizione un palliativo *ad hoc*: giunti in prossimità della prova d'esame ci si potrà mettere alla prova affrontando le prove scritte 'realistiche' raccolte nel capitolo conclusivo. Gli esiti delle proprie elucubrazioni potranno poi essere confrontati con lo svolgimento, pure presente in queste pagine, realizzato da chi quegli esercizi li ha ideati.

Napoli, 15 maggio 2022
decimo genetliaco di Laura Maria Brunetti

1

Spazi vettoriali

Quando l'anima mia tornò di fori
a le cose che son fuor di lei vere,
io riconobbi i miei non falsi errori.

Purgatorio, Canto XV

Sia V un qualunque spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Negli esercizi che seguono, si denoterà con $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h \rangle$ il sottospazio di V generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h \in V$, ovverosia l'insieme

$$\{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_h\mathbf{v}_h \mid a_1, a_2, \ldots, a_h \in \mathbb{R}\}$$

costituito dai vettori che sono combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$. Tale sottospazio si dice *proprio* se non coincide con V.

Con $\mathcal{M}_{m\times n}$ si indicherà lo spazio vettoriale delle matrici reali con m righe e n colonne e con $\det A^{j_1 j_2 \ldots j_h}_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ il minore della matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ formato dalle righe $i_1, \ldots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \ldots, j_h$.

Il calcolo del rango di una matrice è decisivo per la risoluzione di molti esercizi proposti in questo capitolo. Si badi che non basta che si annulli un minore di ordine k per poter concludere che il rango è minore di k. Bisognerà, piuttosto applicare il cosiddetto *Teorema degli orlati*: il rango di una matrice A vale k se e solo se

(a) esiste un minore $\det M$ non nullo di ordine k e (b) si annullano tutti i minori delle sottomatrici di A che si ottengono aggiungendo a M una riga e una colonna.

Per *prodotto scalare standard* tra n-ple si intende il numero reale

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

1.1 Sottoinsiemi e sottospazi

1. Stabilire se l'insieme $\mathcal{H} = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

§ *Svolgimento.* Si noti che $(1,1,1)$ sta in $\mathcal{H}$, ma non

$$(1,1,1) + (1,1,1) = (2,2,2).$$

Non essendo, in particolare, chiuso rispetto all'addizione tra n-ple, l'insieme $\mathcal{H}$ non è un sottospazio.

2. Nello spazio delle matrici $\mathcal{M}_{2\times 2}$, stabilire se almeno uno dei tre sottoinsiemi che seguono è un sottospazio:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathcal{T} = \{A : a_{12} \neq 0\}; \quad \mathcal{U} = \mathcal{T} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

§ *Svolgimento.* L'insieme $\mathcal{S}$, come tutti gli insiemi che contengono un numero finito di vettori e almeno un vettore non nullo, non è un sottospazio.

Neanche $\mathcal{T}$ lo è: il vettore nullo non vi appartiene.

Per quanto riguarda l'insieme $\mathcal{U}$, si osservi che, pur contenendo un numero infinito di elementi e l'opposto di ognuno di essi, questo insieme non è chiuso rispetto alla somma.
Infatti, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartengono entrambe a $\mathcal{U}$, eppure

la matrice somma $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non sta in $\mathcal{U}$.

In conclusione, nessuno dei tre sottoinsiemi è un sottospazio.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

($\clubsuit$) $\mathcal{S} = \{A : a_{11} = a_{13} = a_{22} = 0\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}$;
($\diamondsuit$) $\mathcal{T} = \{\, p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_1 < 0 \,\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$;
($\spadesuit$) $\mathcal{U} = \{(2x^6, x^6) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
($\heartsuit$) $\mathcal{V} = \{(2x^3, x^3) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

§ *Svolgimento.* I quattro sottoinsiemi contengono tutti il vettore nullo, ma solo il primo e il quarto sono sottospazi. Infatti:

($\clubsuit$) La matrice generica di $\mathcal{S}$ è uguale a

$$a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

Il sottoinsieme $\mathcal{S}$ è, quindi, proprio il sottospazio generato dalle tre matrici che compaiono in (1.1.1).

($\diamondsuit$ e $\spadesuit$) Si osservi che il polinomio $q(x) = x^2 - x + 1$ sta in $\mathcal{T}$, ma non $(-1)q(x)$. Il sottoinsieme $\mathcal{T}$ di $\mathbb{R}[x]$ non è, perciò, un sottospazio.

L'insieme $\mathcal{U}$ non è un sottospazio per lo stesso motivo: posto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $2x^6 \geq 0$, la coppia $(2,1)$ appartiene a $\mathcal{U}$, ma non $-(2,1) = (-2,-1)$.

($\heartsuit$) L'insieme $\mathcal{V} = \{x^3(2,1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è proprio il sottospazio $\langle(2,1)\rangle$, contenendo tutte e sole le coppie proporzionali a $(2,1)$, infatti:

$$t(2,1) = (t^{\frac{1}{3}})^3(2,1).$$

4. Stabilire se è un sottospazio l'insieme di polinomi

$$\mathcal{W} = \{ \, (1-a)\, x^3 + (2-2a)\, x^2 y + (a-1)\, y \;\; | \;\; a \in \mathbb{R} \, \} \subset \mathbb{R}[x,\, y].$$

§ Svolgimento. Il generico polinomio in $\mathcal{W}$ è del tipo $(1-a) \cdot (x^3 + 2x^2 y - y)$. Quando il parametro a varia in $\mathbb{R}$ si ottengono tutti i polinomi proporzionali a

$$x^3 + 2x^2 y - y.$$

Il sottoinsieme W risulta, quindi, uguale a $\langle \, x^3 + 2x^2 y - y \, \rangle$ ed è, dunque, un sottospazio.

5. All'interno del sottospazio $W = \langle (4,3,2,1), (1,2,3,4) \rangle$ di $\mathbb{R}^4$, individuare un sottoinsieme S contenente un numero infinito di elementi che non sia un sottospazio e, se esiste, un sottospazio proprio T di W contenente S.

§ Svolgimento. L'esistenza di T dipende dalla scelta che si fa per S.

Se, ad esempio, si sceglie $S = W \setminus \{(0,0,0,0)\}$, che contiene infiniti elementi ma non il vettore nullo – e, quindi, non è un sottospazio –, l'unico sottospazio di W contenente S è W stesso.

Se invece si sceglie, come insieme S l'insieme dei soli multipli *interi* di $(4,3,2,1)$, si ottiene, come prima, un insieme contenente un numero infinito di elementi che non è un sottospazio:

sebbene $(4,3,2,1)$ appartenga a S, risulta $\dfrac{1}{2}(4,3,2,1) = \left(2, \dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right) \notin S.$

Stavolta, però, un sottospazio proprio di W contenente S esiste: quello generato dalla quadrupla $(4,3,2,1)$.

6. Dopo aver stabilito quali, fra i tre sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{ (\operatorname{sen} t, 0, 0) \,:\, t \in]-\pi/2, \pi/2[\,\} \\ \mathcal{K} &= \{ (\cos t, 0, 0) \,:\, t \in]-\pi/2, \pi/2[\,\} \\ \mathcal{L} &= \{ (\operatorname{tg} t, 0, 0) \,:\, t \in]-\pi/2, \pi/2[\,\}, \end{aligned}$$

sono sottospazi, rispondere in maniera argomentata alle domande che seguono.

⊛ È vero che due elementi qualsiasi dello stesso sottoinsieme sono proporzionali?
⊛⊛ È vero che $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ contengono propriamente un solo sottospazio?
⊛⊛⊛ È vero che $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ sono tutti contenuti nel sottospazio $\mathcal{O} = \langle (4321, 0, 0) \rangle$?

§ Suggerimento. La risposta (corretta) alla domanda ⊛ agevola la risoluzione dei quesiti ⊛⊛ e ⊛⊛⊛.

7. Verificare che solo tre dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$ sono sottospazi:

$S_1 = \{p(x) \mid$ i coefficienti dei monomi di grado divisibile per 3 sono nulli$\}$;
$S_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(3) \neq 0\}$;
$S_3 = \{$ polinomi che sono somma di al più quattro monomi $\}$;
$S_4 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid x^2 \cdot f(x)$ ha grado $\leq 4\}$;
$S_5 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid x^2 \cdot f(x)$ ha grado $\geq 4\} \cup \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)$ ha grado $\leq 2\}$;
$S_6 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (p(x))^2 - x$ ha grado pari$\}$.
$S_7 = S_1 \cup S_4$.
$S_8 = S_1 \cap S_2$.

§ Suggerimento. Sono sottospazi S_1, S_4 e S_5.

8. Quanti sottospazi propri di $\mathbb{R}^2$ contengono $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \pi)$?

[✠ *Uno solo:* $\langle (\sqrt{2}, \pi) \rangle$.]

9. Sia I la matrice unità con tre righe e tre colonne. Stabilire se l'insieme delle matrici del tipo $\mathcal{Z} = \{I + X \,:\, X \in \mathcal{M}_{3\times 3}\}$ forma un sottospazio e, se la risposta è positiva, calcolarne la dimensione.

[✠ $\dim \mathcal{Z} = 9$.]

10. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori generici di uno spazio vettoriale V. Si dimostri che vale la seguente doppia implicazione:

$$\langle\mathbf{u}\rangle \cup \langle\mathbf{v}\rangle \text{ è un sottospazio di } V \Leftrightarrow \ [\mathbf{u},\mathbf{v}] \text{ è linearmente dipendente.}$$

1.2 Spazi vettoriali numerici

11. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = \langle(1,2,1,-1),(3,6,-1,2)\rangle$ e

$$W(t) = \langle(0,0,3t,5)\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori di t sono soddisfatte (separatamente) le seguenti condizioni:
♦ $W(t) \subseteq U$.
♦♦ L'intersezione $W(t) \cap U$ è vuota.

§ *Svolgimento.* (♦) L'inclusione $W(t) \subseteq U$ si verifica se e solo se la quadrupla $(0,0,3t,5)$ appartiene a U. Visto che i generatori di U non sono proporzionali, il sottospazio U contiene $(0,0,3t,5)$ se e solo se vale 2 il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3t & 5 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema degli orlati, $\operatorname{rg} A = 2$ se e solo se si annullano simultaneamente gli orlati di un minore non nullo di ordine 2. Siccome il minore

$$\det A^{23}_{12} = -2 - 6 = -8$$

è non nullo e i suoi due orlati valgono

$$\det A^{123}_{123} = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \det A^{234}_{123} = -30t - 40,$$

si ha $W(t) \subseteq U$ solo per $t = -4/3$.

(♦♦) In ogni caso $W(t)$ e U, come tutti i sottospazi, contengono il vettore nullo, ecco perché la loro intersezione non è mai vuota.

12. Si consideri il vettore $\mathbf{v} = (1,1,2,2) \in \mathbb{R}^4$. Determinare un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 contenente $\mathbf{v}$ ma non $(1,1,3,3)$.

§ *Svolgimento.* Supponendo di aver già individuato una base $\mathcal{B}$ di U contenente, oltre a $\mathbf{v}$, opportuni vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. La non appartenenza di $(1,1,3,3)$ a U equivale a imporre che sia 4 il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 3\ 3 \\ 1\ 1\ 2\ 2 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A_{12}^{23} \neq 0$, si possono scegliere $\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0,0,0,1)$: in questo caso, infatti, si verifica che $\det A = \det A_{12}^{23} \neq 0$.

13. Si esibisca una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio W di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$ scelto dal lettore in modo che $\mathbf{u} = (5,3,4,0) \notin W$.

Giustificando la risposta, stabilire se è vera o falsa le seguente affermazione: 'Il sistema di vettori ottenuto sostituendo $\mathbf{u}$ al primo vettore di $\mathcal{B}$ forma un'ulteriore base di W'.

§ *Suggerimento. L'affermazione è falsa.*

14. In $\mathbb{R}^4$ si determini una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio U di dimensione 3 contenente

$$(1,-3,0,1), \quad (0,-1,1,0), \quad \text{MA NON} \quad (0,0,1,0).$$

Rispetto a $\mathcal{B}$, calcolare le componenti di $(1,-5,2,1)$ e mostrare la quadrupla di componenti $(3,2,1)$.

15. Si consideri il vettore $\mathbf{v} = (1,-1,0,-3,0) \in \mathbb{R}^5$. Determinare un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^5$ di dimensione 3 contenente $\mathbf{v}$ ma non $(0,1,1,0,1)$.

16. Esibire una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio W di dimensione 4 in $\mathbb{R}^5$ tale che i vettori $\mathbf{w}_1 = (0,2,6,2,2)$ e $\mathbf{w}_2 = (1,0,3,1,1)$ siano in W.
Si calcolino anche le componenti di $-\sqrt{8}\,\mathbf{w}_2$ nella base di $\mathcal{B}$.

17. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,3,4), \quad \mathbf{v}_2 = (1,2,3,5), \quad \mathbf{v}_3 = (1,2,3,6).$$

($\heartsuit$) Calcolare la dimensione di W.
($\clubsuit$) Dimostrare che $\mathbf{w} = (0,0,0,3)$ sta in W.
($\diamondsuit$) Individuare una base $\mathcal{B}$ di W che, tra i suoi elementi, contenga $\mathbf{w}$, ma non $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.
($\spadesuit$) Che componenti ha $\mathbf{v}_3$ nella base $\mathcal{B}$?

18. Si consideri il sottospazio $W = \langle (1,-1,-1,0),\ (-4,1,-1,-1) \rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

- Determinare tre sottospazi distinti di dimensione 1 contenuti in W.
- Determinare un sottospazio U di dimensione 3 NON contenente W.
- Stabilire se è vera o falsa la seguente implicazione: $4\mathbf{v} \notin W \Rightarrow \mathbf{v} \notin W$.

19. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (2,0,2,0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,0,1,0,2)$.

Esibire una base $\mathcal{B}$ di W che non contenga né $\mathbf{v}_1$, né $\mathbf{v}_3$, né un loro multiplo.
È vero che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $k\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene a $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$?

20. Dimostrare che $[(0,1),(1,0)]$ è una base del sottospazio

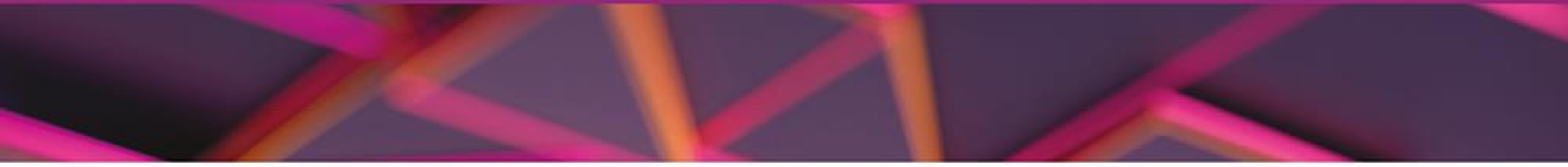
$$W = \langle (3,-1),(1,-1),(3,5) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2.$$

§ Suggerimento. Posto che la dimensione di W è...

21. Dimostrare che $[(0,0,1),(1,0,0)]$ non è una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right) \quad \text{e da} \quad \left(\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\right).$$

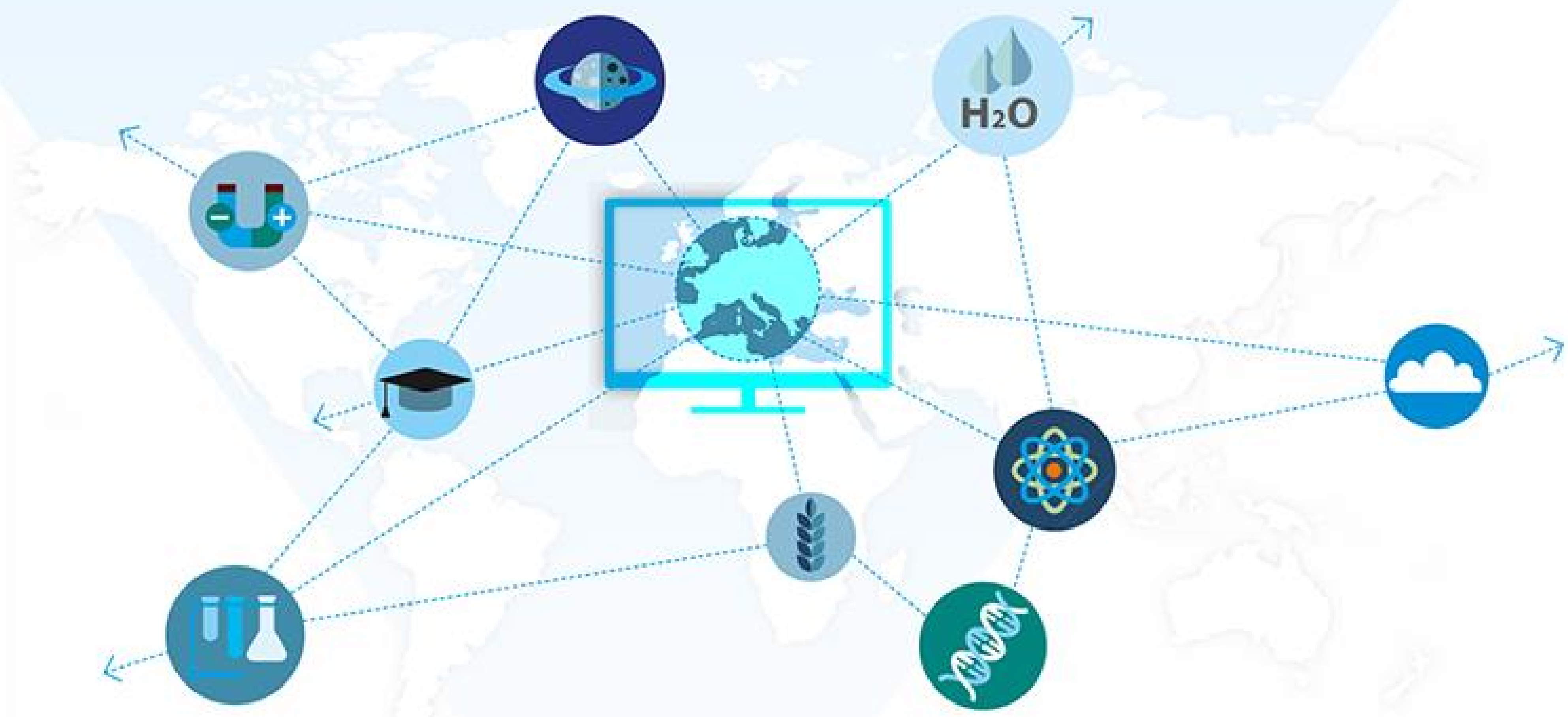
ESERCIZIARI PER INGEGNERIA



Maurizio **Brunetti**

Algebra Lineare e Geometria

Accedi ai **contenuti digitali** › **Espandi** le tue risorse › con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai contenuti digitali.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

EdiSES università

€ 14,00

ISBN 978-88-3623-078-5