GENNARO MIELE
OFELIA PISANTI

# FISICA GENERALE

ELEMENTI DI FISICA PER LE PROFESSIONI SANITARIE

http://people.na.infn.it/miele
http://people.na.infn.it/pisanti

Ottobre 2010

SITI WEB:
http://people.na.infn.it/miele,
http://people.na.infn.it/pisanti

E-MAIL:
gennaro.miele@na.infn.it,
ofelia.pisanti@na.infn.it

---

Nel frontespizio è riprodotta un'incisione di Maurits C. Escher, dal titolo *Tassellazione del piano con Uccelli* (l'immagine è tratta da http://www.mcescher.com/).

# SOMMARIO

Sommario.

# RINGRAZIAMENTI

Ringraziamenti.

# INDICE

# 4 LAVORO ED ENERGIA

INDICE



Aver introdotto i principi della Dinamica ed averli applicati al moto del punto materiale ci ha fornito una prima comprensione delle difficoltà che si incontrano nella risoluzione del moto di un corpo. In questo capitolo introdurremo alcuni concetti, come quelli di lavoro e di energia, che rappresentano una utile risorsa nel tentativo di semplificare il problema della determinazione della legge oraria di un mobile in conseguenza delle sue interazioni con gli altri. In particolare, si analizzerà una classe speciale di forze, dette conservative, per le quali esiste una costante del moto detta energia meccanica.

## 4.1 LAVORO DI UNA FORZA

Consideriamo un corpo posto su un piano. Supponiamo di fissare ad esso una fune e di tirare con una forza costante, $\vec{F}$, in una direzione obliqua rispetto all'orizzontale (vedi Fig. 4.1). Scomponiamo la forza nelle sue componenti verticale e orizzontale, $\vec{F}_\perp$ ed $\vec{F}_{||}$. È evidente che la prima non ha nessun effetto sul corpo, dato che il moto avviene nella direzione orizzontale. Dunque, al fine di spostare il corpo dalla sua posizione di equilibrio, quella che conta è la componente della forza nella direzione dello spostamento, $\vec{F}_{||}$. Il prodotto della componente $\vec{F}_{||}$ per lo spostamento $x$ del corpo è una grandezza fisica

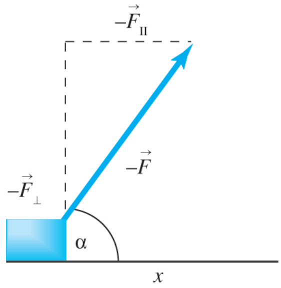


**Figura 4.1:** Lavoro di una forza.

*Lavoro di una forza*

molto importante, chiamata **lavoro**. Ricordando la definizione di prodotto scalare tra due vettori, il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per spostare un punto materiale di una quantità $\Delta s$ si può scrivere come

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = (F\cos\alpha)\Delta s = F_{||}\Delta s \tag{4.1}$$

Nel caso in cui la forza non sia costante, sarà necessario considerare gli spostamenti elementari $\Delta s_i$ e ricavare il lavoro come somma di tanti termini,

$$L \simeq \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s_i} \tag{4.2}$$

dove l'uguaglianza stretta si ottiene quando si fa il limite per spostamenti infinitesimi. Si comprende dalla relazione precedente che il lavoro è una grandezza scalare. Le sue dimensioni nel S.I. sono

$$[L] = \mathrm{N\ m} \tag{4.3}$$

*Joule*

unità che prende anche il nome di **joule** (J), dal fisico inglese James Prescott Joule (1818-1889). Contrariamente al senso comune, secondo il quale si compie una grande quantità di lavoro se si fa un grande sforzo, l'Eq. (4.1) ci dice che si compie lavoro solo se c'è uno spostamento, in conseguenza di una forza con una componente non nulla nella direzione di tale spostamento. Infatti, nella (4.1) il lavoro è nullo sia se $\Delta s = 0$ sia se $\alpha = \pi/2$ e quindi $\cos\alpha = 0$. D'altra parte, il lavoro è massimo quando forza e spostamento sono paralleli e concordi ($\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 1$), mentre è minimo quando essi sono paralleli e discordi ($\alpha = \pi$ e $\cos\alpha = -1$).

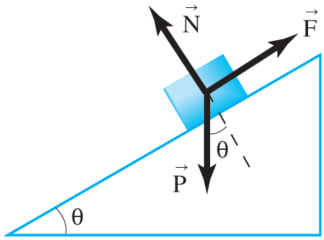


**Figura 4.2:** Una cassa sollevata lungo un piano inclinato.

**Esercizio:** *Una cassa di massa* $m = 20$ kg *è sollevata, lungo un piano inclinato di un angolo* $\theta = 35°$*, da una forza parallela al piano di modulo* $F = 150$ N *(vedi Fig. 4.2). Calcolare il lavoro compiuto per spostare la cassa di* $l = 7$ m.
**Soluzione:** Le forze agenti sulla cassa sono la forza peso, $\vec{P}$, la reazione vincolare normale, $\vec{N}$, e la forza $\vec{F}$. Dato che la componente della risultante delle forze lungo la direzione parallela al piano è

$$R_{||} = F - m\,g\,\sin\theta$$

il lavoro è

$$L = R_{||}\,l = (F - m\,g\,\sin\theta)\,l = 262.25\,\mathrm{J}$$

## 4.2 POTENZA

Una quantità più utile del lavoro, quando si consideri una macchina meccanica, è il lavoro che essa può compiere in un certo tempo. La grandezza fisica che si introduce è detta **potenza** ed è definita come il rapporto *Potenza*

$$P = \frac{L}{\Delta t}. \tag{4.4}$$

La potenza è uno scalare, le cui dimensioni nel S.I. sono

$$[P] = \mathrm{J\,s^{-1}}, \tag{4.5}$$

anche detto **watt** (W), in onore dell'ingegnere inglese James Watt (1736-1819). *Watt* La potenza media sviluppata da un uomo in un lavoro fisico prolungato è dell'ordine di un centinaio di watt, ma un atleta può anche arrivare al migliaio di watt.

**Esercizio:** *Qual è il lavoro elettrico compiuto in 1 ora sugli elettroni che attraversano una lampadina da* 100 W*?*
**Soluzione:** Dalla definizione di potenza si ricava che

$$L = P\,\Delta t = (100 \cdot 3600)\,\mathrm{J} = 3.6 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$$

## 4.3 ENERGIA CINETICA E LAVORO: TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Si consideri un corpo che si muova di moto rettilineo e sul quale agisca una forza costante, $\vec{F}$, per un tempo $\Delta t$, durante il quale esso sia soggetto ad uno spostamento $\Delta\vec{s}$. Denotiamo inoltre con $\vec{v}_i$ la sua velocità iniziale e con $\vec{v}_f$ quella finale. Il lavoro compiuto dalla forza è dato dall'Eq. (4.1). Usando l'Eq. (3.1) ed esprimendo lo spostamento in termini della velocità media, $\Delta\vec{s} = \vec{v}_m\,\Delta t$, si trova

$$L = m\vec{a} \cdot \vec{v}_m\,\Delta t = m\vec{a}_m \cdot \vec{v}_m\,\Delta t = m\left(\frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}\right) \cdot \left(\frac{\vec{v}_f + \vec{v}_i}{2}\right)\Delta t \tag{4.6}$$

Nell'equazione precedente si è sostituito all'accelerazione istantanea, $\vec{a}$, il suo valore medio, $\vec{a}_m$, dato che, essendo la forza costante, il moto è uniformemente accelerato e quindi l'accelerazione istantanea è uguale a quella media, qualunque sia l'intervallo di tempo considerato. Sviluppando il prodotto delle velocità (a questo proposito, si noti che $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$) si arriva all'espressione finale,

$$L = \frac{1}{2}\,m v_f^2 - \frac{1}{2}\,m v_i^2 \tag{4.7}$$

In definitiva, il lavoro risulta essere pari alla differenza della quantità $1/2\,mv^2$, valutata agli istanti finale e iniziale. Questa grandezza è detta **energia cinetica** del corpo,

*Energia cinetica*

$$E_c = \frac{1}{2}\,m v^2 \tag{4.8}$$

e l'equazione

$$L = E_c^f - E_c^i \tag{4.9}$$

*Teorema dell'energia cinetica*

esprime il fondamentale **teorema dell'energia cinetica** o **teorema delle forze vive**. In pratica, l'energia cinetica esprime la capacità di un corpo di compiere lavoro meccanico in forza del suo movimento. Si noti che il teorema

(4.9) è valido qualunque sia la forza considerata. Ricordando l'equazione dimensionale per $E_c$, si può verificare che la sua unità di misura nel S.I. è il J, come quella del lavoro,

$$[E_c] = \text{kg m}^2\text{s}^{-2} = \text{N m} = \text{J} \tag{4.10}$$

**Esercizio:** *Un corpo di massa* $m = 5$ kg*, sospinto da una forza nel senso del moto, percorre un tratto rettilineo con la legge oraria* $x(t) = 6\,t + 6\,t^2$*. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza dopo* 6 *secondi.*
**Soluzione:** Il lavoro richiesto è dato dalla variazione di energia cinetica: dunque, basta conoscere le velocità iniziale e finale. D'altra parte, la legge oraria è quella di un moto uniformemente accelerato con $x_0 = 0$, $v_0 = 6$ m s$^{-1}$ e $a = 12$ m s$^{-2}$ [cfr. Eq. (2.16)]. Quindi, le velocità sono

$$v_i = v(0\,\text{s}) = 6\,\text{m s}^{-1}, \qquad v_f = v(6\,\text{s}) = 78\,\text{m s}^{-1}$$

e

$$L = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_i^2 = 15120\,\text{J}$$

**Esercizio:** *Calcolare la velocità impressa ad un corpo di massa* $m = 2$ kg*, inizialmente fermo, da una forza, di modulo pari a* $F = 6\,\text{N}$*, che lo tira lungo una direzione a* 30° *con l'orizzontale, spostandolo dalla posizione* $x = 0$ m *alla posizione* $x = 5$ m.
**Soluzione:** Per il teorema dell'energia cinetica, tenendo conto del fatto che la velocità iniziale è nulla,

$$L = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2$$

D'altra parte, il lavoro di una forza costante è dato dal prodotto scalare

$$L = F\,\Delta s\cos\alpha$$

Dunque

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,L}{m}} = \sqrt{\frac{2\,F\,\Delta s\cos\alpha}{m}} = 5.10\,\text{m s}^{-1}$$

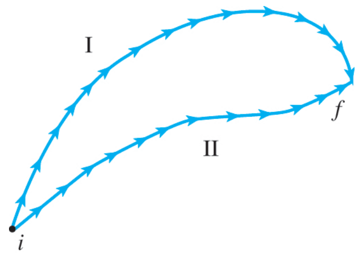


**Figura 4.3:** Lavoro di una forza lungo traiettorie differenti.

## 4.4 FORZE CONSERVATIVE, ENERGIA POTENZIALE E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Un punto materiale sul quale agisca una forza $\vec{F}$ qualunque percorrerà in generale traiettorie molto complicate ed è presumibile che durante il suo moto la forza applicata vari in modulo e direzione. Ciononostante è possibile estendere anche a questo caso generale la precedente definizione di lavoro relativa alla sola situazione di uno spostamento rettilineo e di una risultante delle forze applicate costante nel tempo. Come è stato già osservato, ciò è realizzato semplicemente suddividendo la traiettoria in una successione di spostamenti infinitesimi, sui quali le precedenti condizioni restrittive possano essere in buona approssimazione verificate. In questo caso il lavoro sarà rappresentato da una espressione integrale che, come affermato già in precedenza, non riportiamo, avendo deciso di non adoperare esplicitamente per motivi di semplicità il calcolo integro-differenziale.

Riferendoci alla Fig. 4.3, notiamo che, se il lavoro compiuto nel percorso da $i$ a $f$ lungo la traiettoria I è $L$ e quello lungo la traiettoria II è $L'$, in generale avremo $L \neq L'$. È solo per una classe molto particolare di forze, dette **conservative**, che vale l'uguaglianza $L = L'$. Una maniera alternativa di enunciare questa caratteristica è dire che il lavoro compiuto lungo un qualunque percorso chiuso è nullo. Infatti, dato che se si percorre una traiettoria all'inverso il lavoro cambia segno, si avrà

*Forze conservative*

$$L_{i \to i} = L_I - L_{II} = L - L' = 0 \tag{4.11}$$

dove si è indicato con $L_{i \to i}$ il lavoro relativo alla traiettoria chiusa $i \to i$. Quando una forza è conservativa, si può introdurre una corrispondente funzione, dipendente dalla sola posizione del corpo, $E_p(\vec{r})$, detta **energia potenziale**, tale che il lavoro compiuto su un qualunque percorso da $i$ a $f$ si possa esprimere come

*Energia potenziale*

$$L_{if} = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) \tag{4.12}$$

o più semplicemente

$$L_{if} = E_p^i - E_p^f \tag{4.13}$$

**Esercizio:** *Una forza conservativa la cui energia potenziale è data dalla funzione*

$$E_p(x, y) = 3x + 2y$$

*agisce su un corpo spostandolo dall'origine al punto* $P = (2, -1)$ m. *Quanto vale il lavoro fatto dalla forza in tale spostamento?*
**Soluzione:** Il lavoro della forza è dato da

$$L = E_p(0) - E_p(P) = (0 - 4)\,J = -4\,J$$

Mettendo insieme le Equazioni (4.9) e (4.13) si trova

$$E_c^f - E_c^i = E_p^i - E_p^f \tag{4.14}$$

da cui

$$E_c^i + E_p^i = E_c^f + E_p^f \tag{4.15}$$

*Conservazione dell'energia meccanica*

*Energia meccanica*

Il risultato ottenuto è molto importante: l'Eq. (4.15) esprime il **teorema di conservazione dell'energia meccanica**, e cioè il fatto che, per un punto materiale soggetto ad una forza conservativa, la somma dell'energia cinetica e della corrispondente energia potenziale, grandezza detta **energia meccanica** di un corpo,

$$E_M = E_c + E_p \tag{4.16}$$

è una costante del moto. Questo implica che, se durante il moto l'energia cinetica aumenta (diminuisce), allora l'energia potenziale dovrà diminuire (aumentare) in modo che la loro somma possa rimanere costante. Quello che accade è simile al fenomeno in cui una certa quantità fissa di liquido (l'energia meccanica) viene spostata tra due recipienti (l'energia cinetica e quella potenziale): se uno dei due recipienti si vuota l'altro si deve riempire, dato che il liquido non può scomparire né comparire dal nulla. Si osserva che per forze non conservative energia potenziale ed energia meccanica non possono essere definite. Nel caso sul corpo agiscano simultaneamente più forze conservative, la corrispondente energia meccanica sarà la somma del termine cinetico e di tutti i singoli contributi potenziali.

## 4.5 FORZA PESO

*Forza gravitazionale*

Un esempio di forza conservativa ci è fornito dalla forza gravitazionale, cioè la forza che si esercita tra due masse. La legge che esprime la sua dipendenza dalle masse e dalla loro distanza è stata formulata per la prima volta dal matematico e fisico inglese Isaac Newton (1642-1727). Essa è una forza attrattiva diretta lungo la congiungente le due masse ed il suo modulo è pari a

$$F_g = G_N \frac{m_1\, m_2}{r^2} \tag{4.17}$$

con $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ detta costante di gravitazione universale.

**Esercizio:** *Un satellite per telecomunicazioni, di massa* $m = 419$ kg, *è in orbita intorno alla Terra ad una distanza dal suo centro* $d = 6600$ km. *Quanto vale la sua energia cinetica?*
**Soluzione:** La forza che mantiene il satellite sulla sua orbita è quella gravitazionale, data dall'Eq. (4.17): essa è una forza costante diretta verso il centro della Terra, e dunque il moto è circolare uniforme, con accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{F_g}{m} = G_N \frac{M_T}{d^2}$$

dove $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg è la massa della Terra. Se, nella equazione precedente, sostituiamo ad $a_c$ la sua espressione,

$$\frac{v^2}{d} = G_N \frac{M_T}{d^2}$$

troveremo

$$v^2 = \frac{G_N\, M_T}{d}$$

ed

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G_N\, m\, M_T}{2\, d} = 1.26 \cdot 10^{10}\mathrm{J}$$

*Forza peso*

La forza che comunemente chiamiamo **peso** di un corpo non è altro che la forza gravitazionale tra quel corpo e la Terra. Dunque, applicando l'Eq. (4.17) ad un corpo di massa $m$, posto in vicinanza della massa $M_T$ della

Terra, potremo supporre con buona approssimazione che la distanza tra le due masse sia pari al raggio della Terra, $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, e scrivere

$$P = G_N \frac{M_T\, m}{R_T^2} \equiv m\, g \tag{4.18}$$

L'Eq. (4.18) dà l'espressione del modulo della forza peso, $\vec{P}$. In essa compare l'**accelerazione di gravità**,

*Accelerazione di gravità*

$$g = G_N \frac{M_T}{R_T^2} = 9.81 \text{ m s}^{-2} \tag{4.19}$$

che fu misurata per la prima volta da Galileo Galilei studiando il moto di gravi su piani inclinati.

**Esercizio:** *Sapendo che sulla Luna l'accelerazione di gravità è un sesto di quella terrestre, determinare il raggio lunare.*
**Soluzione:** Riscrivendo l'Eq. (4.19) nel caso della Luna avremo

$$g_L = G_N \frac{M_L}{R_L^2} = \frac{1}{6}\, g_T$$

dove $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg e $R_L = 1.74 \cdot 10^6$ m sono la massa e il raggio della Luna, rispettivamente, da cui

$$R_L = \sqrt{\frac{6\, G_N\, M_L}{g_T}} = 1.73 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Dato che la forza peso agente su un corpo non è altro che la forza gravitazionale fra quel corpo e la Terra, essa risulta conservativa. Per determinare la relativa energia potenziale basta applicare l'Eq. (4.13), e quindi calcolare il lavoro compiuto dalla forza peso per spostare un corpo fra due punti lungo una qualsiasi traiettoria. Consideriamo, allora, un corpo che venga lasciato cadere da un punto iniziale ad altezza $z$ rispetto al suolo. Il lavoro compiuto da $\vec{P} = m\,\vec{g}$ è $L = P\,z = m\,g\,z$ e, se assumiamo che l'energia potenziale della quota $z = 0$ sia nulla, $E_p^f = 0$, avremo

$$m\,g\,z = E_p^i = E_p(z) \tag{4.20}$$

Dunque, l'energia potenziale di un corpo ad una quota $z$ rispetto alla quota di riferimento (cui è associata un'energia potenziale nulla) è

*Energia potenziale della forza peso*

$$E_p(z) = m\,g\,z \tag{4.21}$$

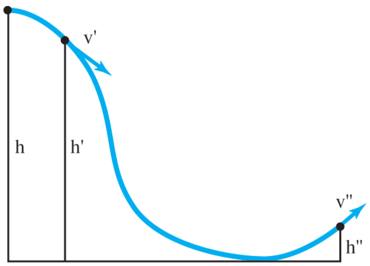


**Figura 4.4:** Un esempio di conservazione dell'energia meccanica: le montagne russe.

Un corpo che si muove sotto l'azione della sola forza di gravità avrà un'energia meccanica pari a

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + m g z \tag{4.22}$$

Se il corpo cade da una certa altezza, la sua energia potenziale decresce, mentre quella cinetica aumenta (vedi Fig. 4.4). In particolare, se esso ha velocità iniziale nulla quando è alla quota $h$ (quindi $E_M^i = m g h$) e arriva al suolo con velocità $v_f$ (quindi $E_M^f = \frac{1}{2} m v_f^2$), imponendo che l'energia meccanica sia costante si potrà scrivere

$$m g h = \frac{1}{2} m v_f^2 \tag{4.23}$$

da cui è possibile ricavare l'espressione di $v_f$,

$$v_f = \sqrt{2 g h} \tag{4.24}$$

**Esercizio:** *Un corpo di massa* $m = 58$ kg *è lasciato cadere da fermo lungo la verticale da un'altezza h (vedi Fig. 4.5). Quando la sua quota rispetto al suolo è* $d = 12$ m *il modulo della sua velocità risulta* $v = 3$ m s$^{-1}$. *Determinare l'altezza iniziale del corpo.*
**Soluzione:** Dato che l'unica forza cui è soggetto il corpo è la forza peso, che è conservativa, l'energia meccanica totale del corpo è costante. Il suo valore all'istante iniziale è

$$E_{Mi} = m g h$$

mentre quando il corpo arriva alla quota finale essa diventa

$$E_{Mf} = \frac{1}{2} m v^2 + m g d$$

Uguagliando le due espressioni,

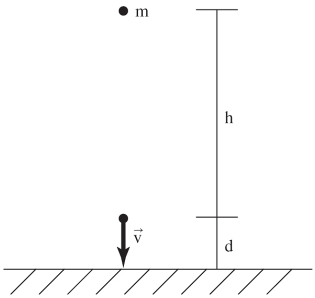


**Figura 4.5:** Un corpo che cade sotto l'azione della forza peso.

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,d$$

si trova

$$h = d + \frac{v^2}{2\,g} = 12.46\,\mathrm{m}$$

**Esercizio:** *In un ottovolante c'è un giro della morte che ha un raggio* $R = 17$ m. *Con che velocità deve arrivare alla base del giro una carrozza per essere sicuri che riesca a compiere il giro completo senza staccarsi dalla guida?*
**Soluzione:** Quando la carrozza è nel punto più alto del giro della morte, la forza su di essa deve essere pari solo al suo peso. Per il II principio della Dinamica, dunque,

$$F = m\,a_c \quad \Rightarrow \quad m\,g = m\,\frac{v^2}{R}$$

da cui si ricava

$$v^2 = g\,R$$

Il corpo che si muove lungo l'ottovolante è soggetto, oltre che alla forza peso, anche alla reazione vincolare normale della guida che, però, essendo ortogonale allo spostamento, non compie lavoro: ai fini del calcolo dell'energia, dunque, la forza normale si può ignorare. Essendo la forza peso conservativa, possiamo imporre che l'energia meccanica della carrozza sia costante fra il momento in cui la carrozza raggiunge la massima altezza e quello in cui essa passa per la base del giro,

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, 2\, R = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

relazione da cui si ricava la velocità alla base,

$$v_0^2 = v^2 + 4\, g\, R = g\, R + 4\, g\, R = 5\, g\, R = 833.85\, \mathrm{m\ s^{-1}}$$

## 4.6 FORZA ELASTICA

*Forza elastica*

Un altro esempio di forza conservativa è dato dalla **forza elastica**, cioè quella che, per esempio, agisce su un corpo connesso ad una molla quando viene spostato dalla posizione di equilibrio. La forza esercitata dalla molla sul corpo è sempre una forza di "richiamo, che si oppone allo spostamento e quindi ha segno opposto ad esso. Inoltre, il suo modulo è proporzionale allo spostamento stesso. Se, dunque, indichiamo questo con $x$, potremo scrivere

$$F_e = -k\, x \tag{4.25}$$

*Costante elastica*

dove $k$ è detta **costante elastica** e nel S.I. ha le dimensioni

$$[k] = \mathrm{N\ m^{-1}} \tag{4.26}$$

Il moto di un corpo soggetto ad una forza di questo tipo si può ottenere introducendo la legge di forza (4.25) nel secondo principio della Dinamica (3.1),

$$m\, a = -k\, x \tag{4.27}$$

La soluzione della precedente equazione è una funzione sinusoidale del tempo,

$$x(t) = A\ \sin(\omega t + \phi) \tag{4.28}$$

*Pulsazione*

in cui $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$ è detta **pulsazione**, e corrisponde ad un moto armonico (cfr. Paragrafo 2.10). L'energia potenziale corrispondente è

$$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{4.29}$$

e quindi l'energia meccanica totale in questo caso è

$$E_M = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{4.30}$$

**Esercizio:** *Un corpo è legato all'estremità di una molla, disposta orizzontalmente su un piano liscio. La molla viene estesa di* $l = 3$ cm *e successivamente lasciata. Il periodo dell'oscillazione risulta* $T = 6$ s. *Determinare il modulo della velocità nella posizione di equilibrio della molla.*

**Soluzione:** Il corpo è soggetto, oltre che alla forza elastica esercitata dalla molla, anche alla forza peso e alla reazione vincolare, diretta verso l'alto, del piano. Queste ultime due forze, però, sono ortogonali allo spostamento e dunque sono ininfluenti ai fini del bilancio energetico. Possiamo, dunque, con un piccolo abuso di notazione, trascurare il loro contributo all'energia meccanica totale e scrivere questa come in Eq. (4.30). Quando l'allungamento della molla è $l$, l'energia meccanica del corpo è solo potenziale,

$$E_{Mi} = \frac{1}{2} k\, l^2$$

Quando esso passa per la posizione di equilibrio della molla, l'energia meccanica sarà solo cinetica,

$$E_{Mf} = \frac{1}{2} m v^2$$

Per la conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2} k\, l^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{k\, l^2}{m}} = \omega\, l$$

Usando la relazione tra periodo e pulsazione, $\omega = 2\pi/T$, si ottiene per la velocità

$$v = \frac{2\pi l}{T} = 0.031 \text{ m s}^{-1}$$

## 4.7 FORZE NON CONSERVATIVE: L'ATTRITO

Non tutte le forze sono conservative. Una importante classe di forze non conservative è costituita dalle **forze d'attrito**. Queste sono la risultante macroscopica delle molteplici azioni tra molecole che si oppongono allo scorrimen-

*Forze d'attrito*

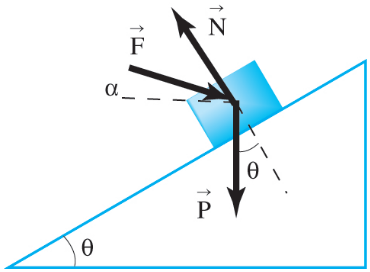


**Figura 4.6:** Blocco in quiete su un piano inclinato.

to delle superfici di due corpi a contatto che, in generale, sono sempre caratterizzate da una certa scabrosità. L'interpretazione originaria del fenomeno dà come causa dell'attrito proprio la presenza di tali asperità, ma studi più recenti hanno messo in luce anche un'altra origine, dovuta all'affinità tra le diverse sostanze che compongono le superfici in scorrimento tra loro, che possono essere quindi particolarmente coese. La presenza di attrito o di dissipazione fa venir meno la conservazione dell'energia meccanica, che invece degrada in forme diverse di energia, per esempio in energia termica: un corpo sottoposto ad attrito si riscalda, come ben sappiamo quando cerchiamo di riscaldarci le mani in una giornata invernale strofinandole l'una con l'altra.

*Forza d'attrito statico*

Si possono distinguere due tipi di forze d'attrito: la **forza d'attrito statico** è quella che si esercita, per esempio, quando tentiamo di mettere in moto un corpo fermo su un piano scabroso. Il corpo sarà in equilibrio, con la forza da noi applicata, $\vec{F}$, uguale ed opposta a quella di attrito statico, $\vec{F}_a^{st}$, fin quando la prima non supererà un certo valore di soglia,

$$F = F_a^{st} \leqslant \mu_s N \tag{4.31}$$

*Coefficiente d'attrito statico*

in cui compare quello che viene chiamato **coefficiente di attrito statico**, $\mu_s$, il cui valore dipende dai materiali di cui sono fatte le due superfici a contatto e dal modulo della reazione vincolare con cui il piano si oppone al peso del corpo, N. Il verificarsi dell'uguaglianza corrisponde al caso di **moto imminente**.

*Moto imminente*

**Esercizio:** *Un blocco di massa* $m = 3$ kg*, posto su un piano inclinato di un angolo* $\theta = 30°$*, è spinto da una forza* $\vec{F}$ *che punta verso il basso con un angolo* $\alpha = 20°$ *rispetto all'orizzontale (vedi Fig. 4.6). Il coefficiente di attrito statico fra blocco e piano è* $\mu_s = 0.25$*. Determinare i valori possibili per il modulo di* $\vec{F}$ *per i quali il blocco rimane fermo.*

**Soluzione:** La risultante delle forze agenti sul blocco è

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_a$$

e, dato che il blocco deve rimanere fermo, questa deve annullarsi. Per trovare i possibili valori per $F$ si devono considerare due possibili situazioni: il blocco comincia a muoversi verso l'alto (**caso 1**) o verso il basso (**caso 2**). Per entrambi siamo nel caso di moto imminente e nell'Eq. (4.31) vale l'uguaglianza, ma la differenza è nella direzione della forza d'attrito statico, che nel primo caso è diretta parallelamente al piano inclinato, verso il basso, e nel secondo in direzione opposta. Tenendo conto di questo, le proiezioni dell'equazione $\vec{R} = 0$ nelle direzioni $x$ e $y$ sono

$$\begin{aligned} x: &\quad -mg\,\sin\theta + F\cos(\alpha+\theta) \mp \mu_s\, N = 0 \\ y: &\quad -mg\,\cos\theta - F\sin(\alpha+\theta) + N = 0 \end{aligned}$$

dove i due segni valgono per i due casi considerati. Ricavando $N$ dalla seconda,

$$N = mg\,\cos\theta + F\sin(\alpha+\theta)$$

e, sostituendo nella prima, si trova $F$,

$$F_{1,2} = \frac{mg\,(\sin\theta \pm \mu_s\,\cos\theta)}{\cos(\alpha+\theta) \mp \mu_s\,\sin(\alpha+\theta)}.$$

Le due soluzioni sono, in definitiva,

$$\begin{aligned} F_1 &= 46.73\,\mathrm{N} \\ F_2 &= 10.00\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

e dunque i valori cercati per $F$ sono quelli contenuti nell'intervallo $[F_1, F_2]$.

La **forza di attrito dinamico** ha la stessa espressione di quella statica,

*Forza d'attrito dinamico*

$$F_a^d = \mu_d\, N \tag{4.32}$$

con la differenza che vi compare il **coefficiente di attrito dinamico**, $\mu_d$, che solitamente ha un valore inferiore a quello statico.

*Coefficiente d'attrito dinamico*

**Esercizio:** *Un corpo si muove lungo una traiettoria rettilinea su un piano orizzontale scabro, il cui coefficiente di attrito dinamico è* $\mu_d = 0.28$*, con velocità iniziale* $v_0 = 29$ m s$^{-1}$*. Calcolare dopo quanti secondi si ferma.*
**Soluzione:** Il moto è uniformemente accelerato lungo la direzione orizzontale, con accelerazione data da

$$a = \frac{F_a^d}{m} = \frac{\mu_d N}{m} = \mu_d g$$

dove si è usato il fatto che, poiché lungo la direzione verticale non vi è moto, le componenti delle forze lungo quella direzione (peso e reazione vincolare del piano) devono essere equilibrate ($N = m g$). Ricorrendo alla legge oraria per le velocità del moto uniformemente accelerato,

$$0 = v_f = v(\bar{t}) = v_0 - a\,\bar{t}$$

si può dedurre $\bar{t}$,

$$\bar{t} = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu_d g} = 10.56\,\mathrm{s}$$

## 4.8 IL MOTO DI PUNTI MATERIALI IN PRESENZA DI FORZE DISSIPATIVE

Abbiamo detto che la presenza di forze dissipative fa venir meno la legge di conservazione dell'energia meccanica. Ciononostante, anche in questo caso è possibile dimostrare un'utile relazione, che rende più semplice affrontare il problema della risoluzione del moto di un corpo.

Il punto di partenza è il teorema dell'energia cinetica, Eq. (4.9), che riscriviamo qui per convenienza,

$$L = E_c^f - E_c^i \tag{4.33}$$

Il lavoro che compare in questa equazione si può esprimere come somma di due contributi, relativi all'insieme delle forze conservative e non conservative,

$$L = L_c + L_{nc} \tag{4.34}$$

di cui il primo è espresso da [vedi Eq. (4.13)]

$$L_c = E_p^i - E_p^f \tag{4.35}$$

L'Eq. (4.33) diventa, dunque,

*Lavoro delle forze non corservative*

$$L_{nc} = E_c^f - E_c^i - L_c = E_c^f - E_c^i - E_p^i + E_p^f = E_{Mf} - E_{Mi} \qquad (4.36)$$

dove si intende che l'energia meccanica è quella relativa alle sole forze conservative. Riassumendo, l'equazione

$$L_{nc} = E_{Mf} - E_{Mi} \qquad (4.37)$$

permette di valutare il lavoro delle forze non conservative quando si conosca l'energia meccanica relativa alle forze conservative e sostituisce, nel caso in cui ci siano forze dissipative, il principio di conservazione dell'energia meccanica: l'energia meccanica diminuisce a causa dell'energia dissipata dalle forze non conservative, dato che il lavoro di queste ultime è negativo.

**Esercizio:** *Un corpo di massa* $m = 3$ kg *scivola lungo un piano inclinato di un angolo* $\theta = 60°$ *rispetto all'orizzontale, arrivando alla sua base con velocità* $v = 15$ m s$^{-1}$. *Se il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e il corpo è* $\mu_d = 0.2$, *qual è lo spazio,* $l$, *percorso sul piano inclinato?*

**Soluzione:** Le forze agenti sul corpo sono il suo peso, $\vec{P}$, la reazione vincolare normale alla superficie, $\vec{N}$, e la forza d'attrito, $\vec{F}_a$. Di queste $\vec{N}$ è ininfluente poiché non compie lavoro, mentre $\vec{F}_a$ è non conservativa. Per l'Eq. (4.37),

$$L_{F_a} = E_{Mf} - E_{Mi}$$

I tre termini nell'equazione precedente sono:

$$\begin{aligned} L_{F_a} &= -F_a\, l = -\mu_d\, N\, l = -\mu_d\, l\, m\, g\, \cos\theta \\ E_{Mf} &= \frac{1}{2}\, m\, v^2 \\ E_{Mi} &= m\, g\, h = m\, g\, l\, \sin\theta \end{aligned}$$

per cui

$$l = \frac{v^2}{2\, g\, (\sin\theta - \mu_d\, \cos\theta)}$$

## PROBLEMI

1. Un operaio tira una cassa sul pavimento per 10 m, con una forza di modulo $F = 3$ N, usando una fune inclinata di 30° rispetto all'orizzontale. Qual è la potenza sviluppata se il tempo impiegato è 7 s?

2. Qual è la potenza sviluppata da un uomo di 70 kg che si arrampica su una fune di 15 m in 12 s?

3. Calcolare il lavoro compiuto su un corpo di massa $m = 3$ kg, che abbia velocità iniziale $\vec{v}_i = (3, 1)$ m s$^{-1}$ e velocità finale $\vec{v}_f = (2, 4)$ m s$^{-1}$.

4. Uno sciatore di 85 kg si lancia dalla sommità di una collina alta 100 m a velocità $v_0 = 10$ m s$^{-1}$. Quale sarà la sua velocità alla base del pendio? (Si trascuri l'attrito sugli sci.)

5. I cavi di un ascensore di massa $m = 566$ kg si rompono, il sistema frenante non funziona e l'ascensore cade da un'altezza $h = 18$ m rispetto alla posizione di riposo di una molla di costante elastica $k = 1649$ N/m. Qual è il modulo della massima accelerazione subita dall'ascensore quando preme sulla molla?

6. Un'automobile di massa $m = 1675$ kg percorre a velocità costante una curva circolare di raggio $R = 19$ m. Se il coefficiente di attrito statico tra gomma ed asfalto è $\mu_s = 0.1$, qual è la massima velocità a cui l'auto può percorrere la curva senza uscire di strada? (Suggerimento: l'attrito statico fornisce la forza necessaria a tenere la macchina sulla traiettoria circolare.)

7. Determinare il coefficiente di attrito dinamico per un corpo che scivola con un'accelerazione $a = 5.6$ m s$^{-2}$ lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/5$.

8. Un corpo di massa $m = 100$ kg è lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/4$. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu = 0.25$. Qual è la sua velocità iniziale se esso si ferma quando raggiunge una quota $h = 20$ m?

9. Una slitta di massa $m = 50$ kg scivola da ferma da una collina con pendenza $\theta = 20°$ rispetto all'orizzontale e, dopo un tragitto di 95 m, raggiunge la base con la velocità di 19.0 m s$^{-1}$. Quale frazione dell'energia potenziale iniziale è stata dissipata per attrito?

10. Un razzo pirotecnico di massa $m = 0.3$ kg viene lanciato da fermo verso l'alto e la combustione del propellente chimico del razzo compie un lavoro $L_c = 418$ J. Il razzo viene rallentato dall'attrito con l'aria e si ferma dopo aver raggiunto un'altezza di 5 m. Qual è il lavoro fatto dalle forze di attrito?