Comprende
versione Ebook
e Software di simulazione

Maurizio Spurio

Meccanica Newtoniana

per un approccio propedeutico alla fisica moderna

II Edizione

EdiSES università

Accedi all’**ebook** e ai contenuti **digitali**

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore**!

COLLEGATI AL SITO **EDISES.IT**

ACCEDI AL **MATERIALE DIDATTICO**

SEGUI LE **ISTRUZIONI**

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e attiva la tua **area riservata**. Potrai accedere alla **versione digitale** del testo e a ulteriore **materiale didattico**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie

Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L’**accesso al materiale didattico** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all’area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito **edises.it**
- attendi l’email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

EdiSES università

Ulteriori materiali e strumenti didattici sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione ***materiali e servizi*** della tua area riservata potrai accedere a:

- **Ebook**: versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.

- **Software di simulazione**: un vastissimo database di quesiti a risposta multipla per effettuare esercitazioni sull'**intero programma** o su **argomenti specifici**.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

EdiSES università

Maurizio Spurio

Meccanica Newtoniana

per un approccio propedeutico alla fisica moderna

SECONDA EDIZIONE

EdiSES università

Maurizio Spurio
Meccanica Newtoniana
per un approccio propedeutico alla fisica moderna – II Edizione

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2029 2028 2027 2026 2025

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Stampato presso
PrintSprint S.r.l. – Napoli

per conto della
EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edises.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 224 6

Come ringraziamento al più grande didatta incontrato,
il prof. Attilio Forino.

Non ho delle pretese,
il merito l'è tutto
della scuola bolognese!
(G. Puccini: Gianni Schicchi, libretto di G. Forzano)

Prefazione alla seconda edizione

La seconda edizione di questo manuale vede aggiungersi il capitolo sulle *Proprietà e dinamica dei fluidi* e contiene nuove sezioni ed esercizi in diversi capitoli, in aggiunta a piccole correzioni e revisioni del testo. Per le segnalazioni, commenti e suggerimenti sono grato ai numerosi studenti che hanno utilizzato negli scorsi anni la prima versione a stampa e ai colleghi, in particolare la prof.ssa Annarita Margiotta, per i molti commenti al testo. Gli argomenti presentati nel manuale sono quelli tradizionalmente affrontati in un corso semestrale di almeno 9 CFU, come ormai si sta consolidando al primo anno del corso di laurea in Fisica. Alcuni argomenti possono essere omessi, o consigliati per una sola lettura, inclusi gli argomenti più complessi affrontati negli ultimi capitoli. La cinematica e dinamica dei fluidi permette di ampliare la conoscenza sugli operatori differenziali già utilizzati nel Cap. 6 e introduce alcuni aspetti sul calcolo differenziale che sono di fondamentale importanza per gli studi dell'elettromagnetismo e che talvolta sono affrontati in modo molto formale nei corsi di matematica. L'esposizione è svolta in modo tale che anche uno studente di Fisica alla fine del primo semestre (o del primo anno) possa apprezzarli.

Nonostante la scrupolosa lettura degli studenti e di alcuni colleghi, e l'attenzione posta dell'autore, è altamente probabile che qualche errore o imprecisione sia sopravvissuto. Nel caso, sarò grato a chi volesse segnalarmeli.

Prefazione alla prima edizione

Questo libro introduce i concetti e le applicazioni della meccanica classica nel formalismo Newtoniano pensando agli studenti di discipline scientifiche che proseguiranno i loro studi incontrando la fisica moderna.

La meccanica classica è la base di riferimento di ogni studio a livello universitario di discipline tecnico-scientifiche. Uno dei problemi che ho incontrato, quando ho iniziato a insegnare al corso di Meccanica per studenti del corso di laurea in Fisica, è la selezione di un libro di testo adeguato. Consultando i manuali esistenti, ho l'impressione che gli aspetti fondanti non siano sempre messi sufficientemente in evidenza. Questo ha come conseguenza che gli studenti universitari spesso si aspettano dal corso di Meccanica una ripetizione di quanto affrontato nelle scuole superiori, magari con un formalismo matematico più avanzato, e non la presentazione della teoria che è alle fondamenta anche della fisica moderna. In particolare, buona parte dei libri in commercio (sia quelli tradotti dall'inglese, sia quelli di autori italiani con edizioni rinnovate e ancora in stampa) pongono l'enfasi su applicazioni idealizzate su scala delle dimensioni umane. Una significativa frazione dei testi è occupata da esempi basati su argani, aste, piani inclinati,... e gli studenti spesso sono disorientati perché i concetti cardine sono annegati in un numero molto ampio di esempi artificiosi.

La dinamica Newtoniana non è solo uno strumento efficiente per la soluzione di problemi di fisica applicata e ingegneria, ma è una teoria affascinante ancorata alle domande di base poste sin dai tempi dei filosofi greci. Si pensi ai concetti di spazio, dello scorrere del tempo, di come effettuare misure e confrontarle con la realtà, di quali e cosa sono i principi fisici che regolano l'evoluzione dell'universo. Il mio scopo è stato quello di scrivere un testo di meccanica per incoraggiare gli studenti a pensare a questi aspetti fondamentali e per introdurre come, nella fisica moderna, verranno affrontati e talvolta risolti.

Esempi, applicazioni e il modo di ricavare un risultato da un problema sono aspetti estremamente importanti, sia per studenti delle scienze di base che per quelli indirizzati verso le discipline più tecniche. Tuttavia, ritengo che gli studenti dei corsi di laurea in Fisica, Matematica, Chimica e gli studenti di Ingegneria che affronteranno la fisica moderna potranno maggiormente avvantaggiarsi di un approccio in cui gli aspetti di meccanica classica vengano propedeuticamente tradotti in termini delle conoscenze attuali. Ad esempio, anche se all'epoca di Newton nulla si sapeva sulla struttura atomica della materia, è evidente che questa ha un ruolo decisivo sugli aspetti macroscopici coperti dalla Meccanica.

Quesiti, esempi ed esercizi tradizionali sono comunque importanti. Essi coesistono con esercizi più innovativi e sono inseriti alla fine di ogni capitolo, con riportate le soluzioni numeriche. Il consiglio agli studenti è che, inizialmente, nel periodo delle lezioni affrontino la soluzione di alcuni problemi anche in piccoli gruppi, in modo da confrontarsi e cercare di ottenere la soluzione numerica riportata. Nel caso si debba affrontare all'esame una prova scritta, nelle ultime settimane gli esercizi vanno affrontati invece individualmente.

Il libro non ha lo stesso grado di difficoltà dal principio alla fine. Come la saga di Herry Potter inizia con lo stile di un libro per bambini quando il maghetto inizia la scuola di magia e finisce con i toni dark della tragedia della guerra civile dell'ultimo volume, qui i primi capitoli assumono che lo studente abbia le conoscenze di base delle scuole superiori, mentre i successivi recepiscono la crescita in corso e progressivamente utilizzano quanto acquisito nei paralleli corsi del semestre. Questo è vero anche per quesiti ed esercizi: negli ultimi capitoli, esercizi composti, dove è richiesto quanto introdotto in quelli precedenti, sono più frequenti.

La meccanica classica non è la teoria definitiva, sia nella versione Newtoniana qui riportata che nelle versioni Lagrangiana e Hamiltoniana che gli studenti incontreranno come passaggio intermedio prima della fisica moderna. La teoria ha avuto enorme successo (non solo per mandare l'uomo sulla Luna) ma anche crisi profonde che si sono evidenziate a partire dall'inizio del secolo scorso. Ho cercato di mettere il rilievo questi aspetti di successo e i limiti che porteranno agli sviluppi recenti. Il libro ovviamente non è un libro di storia della fisica, e non segue una rigorosa sequenza temporale di come le cose si sono susseguite da Galileo in poi. Non entro nelle diatribe e dispute (anche molto vivaci) sulle priorità delle scoperte. Tuttavia, ho talvolta riportato brevi cenni anagrafici dei principali protagonisti: sono solo utili per inquadrare i periodi storici in cui si sono svolti gli studi e recepire anche l'accelerazione avvenuta nelle scoperte scientifiche.

Un problema sentito è stato quello della scelta della notazione: con quale lettera indicare ciascuna delle grandezze fisiche introdotte. Alla fine, ho deciso di uniformare il testo allo standard ISO. Questo è l'acronimo di *International Organization for Standardization*, che indica la più importante organizzazione mondiale per la definizione di norme tecniche. In particolare, adotto lo standard ISO 80000 sulle grandezze e unità di misura `https://it.wikipedia.org/wiki/ISO/IEC_80000`.

Alcune sezioni sono segnalati con il simbolo (*). Questo significa che la matematica coinvolta nel paragrafo è mediamente più complessa, o che l'argomento può essere affrontato anche in seconda lettura.

Il testo si basa sulle lezioni svolte al primo anno del corso di laurea in fisica dell'Università di Bologna, e bozze del testo hanno subito la revisione di molti studenti nonché di alcuni colleghi. Tuttavia imprecisioni, errori di battitura o errori più gravi possono sempre essere rimasti e sono grato a chiunque voglia segnalarmeli. Per gli esercizi e quesiti, intendo ringraziare i colleghi che hanno contribuito con le esercitazioni del corso di Meccanica a elaborare, modificare, risolvere quelli qui proposti: il prof. L. Guiducci, il dr. Nicolò Masi, la dott.ssa Giulia Illuminati e il dr. Filippo Sala.

Maurizio Spurio, maurizio.spurio@unibo.it.
Bologna, Aprile 2023.

Indice

3

Cinematica della particella

3.1 Alcune definizioni

La cinematica è quel ramo della meccanica classica che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, ricorrendo esclusivamente alle nozioni di spazio e di tempo, indipendentemente dalle cause (forze) del moto stesso. La cinematica nasce con gli studi di Galileo Galilei, ma la sua strutturazione moderna, che utilizza i principi di calcolo infinitesimale, parte da Newton stesso e da numerosi altri studiosi di inizio '700.

Il punto materiale, la particella

Per evitare superflue complicazioni, si inizia a trattare il moto di un corpo come se fosse un semplice punto geometrico a cui è associata una massa m: in pratica, si considera un corpo di dimensioni trascurabili rispetto alla traiettoria in cui si muove. In cinematica tale punto è detto anche **punto materiale** o **particella**. Adotterò spesso questa seconda definizione.

Il sistema di riferimento

A tale punto P generico si associano le coordinate in un sistema di riferimento, in molti casi cartesiano. In fisica, un **sistema di riferimento** corrisponde a un sistema di coordinate la cui origine, orientamento e scala di misura sono specificati da un insieme di *punti di riferimento* la cui posizione sugli assi è identificata sia matematicamente (con valori numerici) e a volte fisicamente (segnalati da marcatori convenzionali). Nel nostro spazio euclideo tridimensionale sono necessarie tre grandezze per definire pienamente un sistema di riferimento. Un sistema di riferimento che usi le comuni coordinate cartesiane ortogonali, viene definito con un punto fisico che corrisponde all'origine e un punto di riferimento ad una distanza unitaria lungo ciascuno dei tre assi di coordinate.

Avendo definito un sistema di riferimento, la posizione della particella può essere individuata dal vettore posizione che parte dall'origine del sistema di riferimento e arriva fino al punto in moto. Poiché il punto si muove, è necessario anche specificare la coordinata temporale. L'informazione cinematica completa è dunque definito da quattro grandezze: tre coordinate spaziali e una temporale. Poiché la cinematica della particella corrisponde allo studio del suo moto nello spazio in funzione del tempo, il fatto che la particella abbia una massa m è irrilevante. Questo parametro sarà cruciale nel contesto della dinamica, discussa nel capitolo seguente.

L'equazione del moto, la legge oraria

Lo scopo della cinematica è dunque determinare l'equazione del moto e, in particolare, la **legge oraria**, cioè la funzione:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.1}$$

che descrive la posizione in funzione dell'istante di tempo. L'equazione 3.1 è espressa in coordinate cartesiane; tuttavia altre rappresentazioni per la legge oraria possono essere usate. In ogni rappresentazione, tuttavia, sono necessarie tre variabili indipendenti in funzione del tempo per descrivere il moto libero di una particella nello spazio. La conoscenza della legge oraria permette di determinare come varia la posizione di una particella al variare del tempo, ossia la sua **velocità**, e di come varia la velocità al variare del tempo, ossia la sua **accelerazione**. Velocità e accelerazione sono entrambe grandezze vettoriali, come la posizione $\mathbf{r}$.

La traiettoria

L'insieme delle posizioni nello spazio che assume la particella al variare del tempo è detta **traiettoria**. La traiettoria di una particella corrisponde quindi a un cammino nello spazio di puro carattere geometrico. Ad esempio, vedremo che sulla superficie terrestre (trascurando l'attrito con l'aria) qualsiasi particella in movimento segue una traiettoria parabolica, che in un sistema di riferimento generalmente solidale con chi lancia, assume l'equazione:

$$z = ax^2 + bx + c$$

(z è la coordinata verticale, x una coordinata nel piano della superficie terrestre) che corrisponde a un moto parabolico nel piano (x, z). Apparentemente, manca la terza coordinata. In realtà, essa è presente ma assume il valore $y = 0$ per ogni istante di tempo. Le quantità a, b, c sono costanti che possono essere determinate. Ovviamente, la particella è in moto e assumerà coordinate (x, z) diverse in istanti di tempo diversi. Tuttavia, per la definizione di traiettoria, l'istante di tempo in cui viene occupata una certa posizione è irrilevante.

Conoscere la **legge oraria** non solo significa conoscere la traiettoria della particella in forma parametrica. Significa anche conoscere in quale istante di tempo la particella si troverà in un certo punto della traiettoria. La legge oraria permette quindi di localizzare i corpi in movimento non solo nello spazio, ma anche nel tempo e per la sua completa determinazione sono necessarie quattro variabili (tre spaziali e il tempo).

3.2 Moto uniforme e moto uniformemente accelerato

L'esperienza quotidiana ci dice che qualsiasi corpo in moto in un piano posto sulla superficie terrestre, dopo un poco, si arresta. Questa considerazione aveva spinto gli antichi a dedurre che, per mantenere in moto un corpo, occorresse una sollecitazione continua. In modo differente, lungo la direzione verticale un corpo in caduta libera percorre spazi che aumentano all'aumentare del tempo, ma in modo diverso se a cadere è (ad esempio) una piuma o un sasso. La filosofia pre-galileiana sosteneva che il sasso avesse peso maggiore, e quindi maggiore "affinità" a ricongiungersi con il suolo, che è massivo. La piuma, avendo meno "affinità", procede più lenta.

Le prime straordinarie scoperte di Galilei si riferiscono proprio a questi due moti che avvengono in prossimità della superficie terrestre.

> Circa il moto su un piano orizzontale, Galilei dedusse che **se si riesce a eliminare ogni forma di attrito un corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto, percorrendo spazi uguali in tempi uguali.**

Parlerò di cos'è l'attrito in Sez. 4.5. Galilei quindi intuì che un moto a *velocità costante* (cioè, moto che copre spazi uguali in tempi uguali) è una sorta di stato naturale, per il cui mantenimento non è richiesta alcuna sollecitazione esterna [1].

La situazione è completamente diversa nel caso della direzione verticale.

> Nel caso del moto lungo la direzione verticale, Galilei dedusse dalle osservazioni che, **se si riesce ad eliminare qualsiasi forma di attrito, ogni oggetto lasciato cadere con le stesse condizioni dalla stessa altezza aumenta progressivamente la distanza percorsa negli stessi intervalli di tempo e arriva al suolo impiegando sempre lo stesso tempo.**

[1] Galilei tuttavia, riteneva erroneamente che questo stato naturale non fosse su una direzione rettilinea, ma su di una circonferenza.

Con la tecnologia dell'epoca, entrambe le osservazioni (che diverranno più semplici poco più avanti, quando tradotte nell'appropriato linguaggio matematico) risultano di straordinaria portata. Oggi, la verifica sperimentale in laboratori didattici è semplicissima, come vedrete di seguito. La proprietà di mantenere lo stato di moto, se indisturbati, si verifica anche nello spazio. Fuori dall'atmosfera terrestre, dove è davvero possibile rimuovere in maniera significativa ogni forma d'attrito, sono stati realizzati esperimenti straordinari, riportati fedelmente da riprese di alta qualità.

Leggi orarie dei moti sulla superficie terrestre

In laboratorio si può misurare come varia la posizione di una particelle in moto al variare del tempo in un piano parallelo al suolo, lungo (ad esempio) l'asse x. Occorre un dispositivo che riduca l'attrito, come ad esempio del ghiaccio secco [2], un asse tarato che permetta di localizzare la posizione della particella durante il moto, e una videocamera per effettuare riprese. Normalmente queste hanno internamente un dispositivo per misurare gli intervalli di tempo.

La particella parte nella posizione x_0: con un piccolo colpo la si mette in moto all'istante in cui inizia la misura ($t = 0$) [3]. La videocamera (o le videocamere, se il tragitto è molto lungo) permettono di riprendere la posizione della particella (coordinata x) al variare del tempo. Normalmente possono essere scattate foto a intervalli di tempo regolari, in cui viene inquadrata la particella, la posizione e l'istante di tempo in cui è stata scattata l'immagine. La legge oraria descrive la coordinata x in funzione del tempo t ed è molto semplice:

$$x(t) = At + x_0 \tag{3.2}$$

dove A è una costante caratteristica di quel particolare esperimento, specialmente delle modalità con cui la particella è inizialmente stata messa in moto. Una legge analoga si troverebbe se si facesse muovere la particella sull'altro asse parallelo al suolo, l'asse y.

Una situazione diversa si verifica se studio la caduta di una particella, ossia il moto lungo l'asse z. Anche in questo caso, Galilei effettua una estrapolazione notevole. Se fate cadere un sasso e una piuma, il sasso arriva prima al suolo. Questo è un effetto dovuto al ruolo dell'attrito con le molecole d'aria. Una dimostrazione veramente professionale con una pietra e una piuma da un filmato della BBC è disponibile: `https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs`.

Oggi possiamo effettuate l'esperimento della caduta verticale in un tubo a vuoto, come quello mostrato in Fig. 3.1, dove è possibile rimuovere una significativa frazione di gas atmosferico e quindi sopprimere quasi del tutto l'attrito esercitato dalle molecole del gas. Effettuando la prova, troveremmo

[2] Il ghiaccio secco altro non è che anidride carbonica congelata, che passa dallo stato solido a quello gassoso per sublimazione, ovvero senza passare per lo stato liquido.

[3] È necessario fornire un impulso, grandezza fisica di cui parleremo in Sez. 8.2.

Foto #	t (s)	z (m)
0	0,000	2.271
1	0.033	2,266
2	0,067	2.249
3	0,100	2,222
4	0,133	2,184
5	0,167	2,135
6	0,200	2,075
7	0,233	2,004
8	0,267	1,922
9	0,300	1,830
10	0,333	1,726
11	0,367	1,612
12	0,400	1,487
13	0,433	1,351
14	0.467	1,203
15	0,500	1,046
16	0,533	0,877
17	0,567	0,697
18	0,600	0,506
19	0.633	0,305
20	0,667	0,092

Figura 3.1. Tubo a vuoto per la dimostrazione della teoria Galileiana sulla caduta dei gravi, realizzato in collaborazione con l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Una dimostrazione della seconda scoperta di Galilei (oggi un gioco da bambini!) è disponibile sul sito: `https://youtu.be/i-UCK6397_k`. A destra, in forma di tabella, sono riportati i dati per un esperimento svolto. La macchina da presa effettuava 30 fotogrammi al secondo; la quota è misurata in metri, a partire dalla sommità. La velocità iniziale era nulla.

che oggetti diversi arrivano al suolo allo stesso istante. L'espressione della legge oraria che possiamo ricavare è estremamente interessante. Il dispositivo lascia cadere l'oggetto da fermo, senza cioè una spinta iniziale, e alla stessa altezza iniziale z_0. In tal caso, la legge oraria ottenuta con il sasso e la piuma (o altro vi piaccia testare) è sempre la stessa. Otteniamo quindi una prima *legge universale empirica*, una di quelle che vorrei indicare con la notazione 2.31, che scriviamo come la seguente legge oraria:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \ . \tag{3.3}$$

Potete esercitarvi, usando i dati riportati nella parte di destra di Fig. 3.1, a mostrare che la quota z decresce (ecco il motivo del segno $-$) con una progressione quadratica rispetto al tempo. Si noti la differenza con la 3.2, che invece dipende linearmente dal parametro t. Inoltre, diversamente che nella 3.2 il parametro $g/2$ che compare [4] è un parametro universale, che non cambia se si cambiano le condizioni.

Infatti, posso verificarlo cambiando dispositivo, usando magari uno con un tubo a vuoto in cui posso variare z_0 e, sopratutto, imprimere una piccola

[4] Il motivo dell'apparentemente fastidioso fattore 2 diverrà chiaro tra poco.

spinta iniziale (verso l'alto o verso il basso) all'oggetto quando viene lasciato cadere. Ripetendo la prova, troverei la seguente legge oraria:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + A't + z_0 \ . \tag{3.4}$$

Notate che il parametro che moltiplica t^2 non è cambiato, è sempre lo stesso. Compare invece un termine A' che, come nel caso del moto nel piano, dipende dalle condizioni iniziali. I parametri indicati con A e A' nella 3.2 e 3.4 hanno dimensioni $[LT^{-1}]$: nel Sistema Internazionale si misurano di m s^{-1}. Il parametro g che compare nella 3.4 è invece un *parametro universale* (sulla superficie terrestre: potrei utilizzare lo stesso dispositivo in diversi continenti e verificare che la 3.4 non cambia, almeno fintanto che non uso strumenti di misura molto raffinati) che ha dimensioni di $[LT^{-2}]$: nel Sistema Internazionale, il suo valore è circa 9.8 m s^{-2}.
(*Attenzione spoiler*: ovviamente, l'equazione 3.4 potremmo *ricavarla*! Ma ci occorre l'ingrediente che ancora non abbiamo: la forza che fa cadere gli oggetti.)

Velocità scalare media e istantanea

La differenza principale tra i due moti descritti dalla 3.2 e 3.3 è che lo spazio percorso a parità di intervallo di tempo è diverso. Mentre nel primo caso spazi uguali vengono percorsi in intervalli uguali di tempo, nel secondo caso per uguali intervalli di tempo ($\Delta t = 0.033$ s, nell'esempio) lo spazio percorso aumenta in maniera progressiva, vedi Fig. 3.2 in alto.

Si intende che una grandezza d'interesse sarà come varia la coordinata, ossia Δx nel primo caso, Δz nel secondo, al variare di Δt. La grandezza che rappresenta questa variazione si chiama, *velocità scalare media*.

Inizio con lo studiare il moto lungo l'asse delle z, di cui ho riportato in Fig. 3.2 in basso, istante di tempo per istante di tempo, il valore del rapporto che corrisponde alla sua velocità scalare media:

$$\overline{v_z}(t) \equiv \frac{[z(t+\Delta t) - z(t)]}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \ . \tag{3.5}$$

Nella didascalia della figura ho anche esemplificato come i valori siano stati calcolati col foglio elettronico. Come potete verificare, il valore della velocità scalare media (in valore assoluto) cresce al variare del tempo. Le nostre immagini fotografiche si riferiscono solo a istanti discreti di tempo ($\Delta t = 0.033$ s), tuttavia siamo confidenti che se avessimo fatto le foto ad intervalli di tempo più piccoli, il moto sarebbe stato rappresentato da punti più fitti. I punti aggiuntivi sarebbero sempre sulla retta tratteggiata che interpola i dati. Posso immaginare, in sostanza, che esista una funzione continua che descrive la situazione anche quando effettuo il **passaggio matematico del limite** per $\Delta t \to 0$. Dunque posso definite:

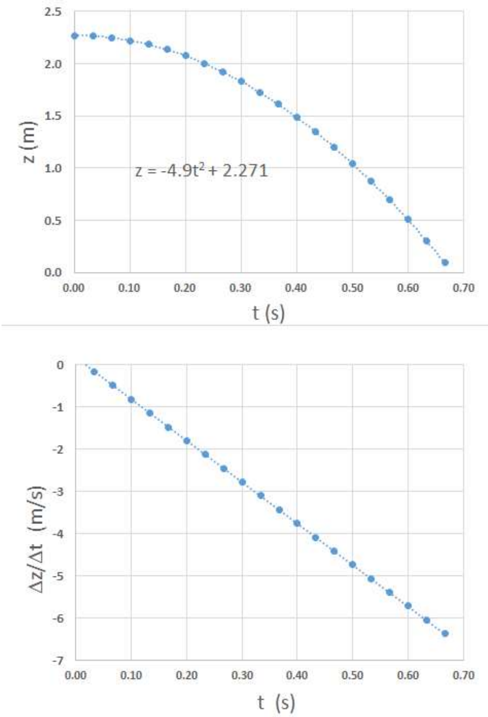

Figura 3.2. Grafico superiore: rappresentazione grafica dei dati presenti in forma tabellare in Fig. 3.1. Sovrimposta ai dati, una curva tratteggiata che adatta i punti con una polinomiale del secondo ordine. I parametri della equazione sono sovrascritti sul grafico. Figura inferiore: è riportato sempre al variare del tempo, il rapporto $\Delta z/\Delta t$ calcolato per ogni riga del foglio. Ad esempio, la quota che corrisponde al terzo scatto è $z_3 = 2.249$ m, mentre $z_2 = 2.266$ m. Quindi $\Delta z = -0.016$ m, $\Delta t = 0.033$ s e $\Delta z/\Delta t = -0.49$ m/s. Corrisponde al secondo punto da sinistra. In questo caso, la equazione che interpola i dati corrisponde a una retta.

$$v_z(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \equiv \frac{dz}{dt} \ . \tag{3.6}$$

La grandezza in 3.6 si chiama la *velocità scalare* della particella che si sta muovendo lungo l'asse z. La velocità ha dimensioni di $[LT^{-1}]$ e quindi si misura in m/s. In fisica, è comune indicare la derivata di una funzione con la notazione usata nella 3.6.

La velocità scalare media della particella che si sta muovendo sull'asse delle x è analogamente

$$\overline{v_x} = \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ . \tag{3.7}$$

Anche in questo caso posso effettuare l'operazione di passaggio al limite e definire la velocità scalare lungo la direzione dell'asse x come:

$$v_x(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \ . \tag{3.8}$$

Nel caso dei nostri due esperimenti, abbiamo dedotto dai dati la funzione analitica che descrive la legge oraria sia nel caso del moto sull'asse x, eq. 3.2, che sull'asse z, eq. 3.4. Possiamo immediatamente ottenere la velocità scalare per i due moti:

$$v_x(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d(At + x_0)}{dt} = A \ . \tag{3.9}$$

Ne consegue che il coefficiente che avevo chiamato A non è altro che la velocità scalare (costante) con cui si sta spostando la particella lungo l'asse x.

Per il moto di caduta lungo z, invece:

$$v_z(t) \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{d(-1/2gt^2 + A't + z_0)}{dt} = -gt + A' \ . \tag{3.10}$$

Come ci aspettavamo dal grafico in basso di Fig. 3.2, l'equazione che descrive la velocità scalare è una retta (con pendenza negativa), di equazione $-gt$. Nel caso della figura, $A' = 0$. In generale a $t = 0$ si ha $v_z(0) = A' \equiv v_{0,z}$, ossia questo parametro corrisponde alla velocità che ha all'istante iniziale. La 3.4 puà essere riscritta, in maniera più esplicita come:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t + z_0 \ . \tag{3.11}$$

Senza informarvi, ho fatto sopra il primo calcolo di derivata, una pratica comune per un fisico. Le proprietà fondamentali e le derivate notevoli delle funzioni più usate sono oggetto del corso di analisi. Tuttavia, potete trovare le derivate notevoli e relative dimostrazioni sul sito `https://it.wikipedia.org/wiki/Regole_di_derivazione`. Sul web sono disponibili diverse app che calcolano le derivate, semplicemente inserendo l'espressione analitica della funzione da derivare.

Accelerazione scalare

Anche la velocità scalare può variare; tutti sapete che in auto iniziate a muovervi a basse velocità, poi potete aumentarla- entro ovviamente i limiti consentiti. Possiamo definire l'accelerazione media lungo l'asse z la quantità

$$\overline{a_z}(t) \equiv \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \ .$$

La corrispondente **accelerazione scalare** è la quantità ottenibile effettuando il passaggio al limite per intervalli di tempo infinitesimali di $\overline{a_z}(t)$, cioè:

$$a_z(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \equiv \frac{dv_z}{dt} \tag{3.12}$$

e, ovviamente, in maniera analoga per la particella che si muove lungo l'asse x. L'accelerazione scalare ha dimensioni di $[LT^{-2}]$ e quindi si misura in $\mathrm{m/s^2}$ nel SI.

Nel caso del moto nel piano orizzontale, eq. 3.9, è immediato verificare che

$$a_x(t) \equiv \frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{3.13}$$

perché la derivata di una costante è sempre nulla. Nel caso del moto di caduta libera, invece:

$$a_z(t) \equiv \frac{dv_z}{dt} = \frac{d(-gt + A')}{dt} = -g \ . \tag{3.14}$$

Abbiamo il seguente risultato notevole: **in prossimità della superficie terrestre, quando ogni forma d'attrito viene accuratamente rimossa, tutti gli oggetti cadono verso il basso con accelerazione scalare pari a g**, che vale circa 9.8 m s^{-2}. Adesso capite perché avevamo introdotto un fattore 1/2 nella legge oraria.

Ricapitolando le caratteristiche dei due moti trattati. Lungo l'asse di un sistema di riferimento locale terrestre x, in assenza di attriti, abbiamo un moto che si chiama **moto rettilineo uniforme** con le seguenti caratteristiche:

- la particella percorre spazi uguali in tempi uguali;
- la sua velocità scalare rimane costante al passare del tempo;
- la sua accelerazione scalare è nulla.

Sempre in assenza di attriti, lungo l'asse verticale del sistema di riferimento locale considerato (asse z) abbiamo un **moto uniformemente accelerato** con le seguenti caratteristiche:

- la particella percorre spazi che aumentano col quadrato del tempo trascorso;
- la sua velocità scalare (in valore assoluto) cresce in maniera lineare col tempo;
- la sua accelerazione scalare è costante, diretta in basso, e pari in modulo al parametro g;
- Il valore di g è identico per tutti i corpi in caduta in prossimità della superficie terrestre.

Galileo Galilei (1564–1642) è considerato il padre della scienza moderna per aver esplicitamente introdotto il metodo scientifico (detto anche *metodo galileiano* o *metodo sperimentale*). Professore all'Università di Padova, il 25 agosto 1609, Galilei (Fig. 3.3) presenta il cannocchiale di sua costruzione (realizzato su ispirazione di strumenti olandesi) al governo di Venezia che gli raddoppiò lo stipendio e gli offrì un contratto vitalizio d'insegnamento. Utilizza lo strumento non per scopi commerciali, ma per osservare il cielo e giunge alla conclusione che, oltre alle stelle note e visibili a occhio nudo, ve ne sono innumerevoli altre mai scorte prima d'allora. L'Universo, dunque, è più grande di quello allora noto. Sempre grazie al cannocchiale, conclude che la Luna presenta strutture analoghe a quelle presenti sulla superficie della Terra, per cui non vi è differenza di natura fra la Terra e la Luna, contrariamente alla visione aristotelico-tolemaica dell'Universo.

Il 7 Gennaio 1610 osserva per la prima volta quattro satelliti di Giove, che Galilei denominerà *stelle medicee* in onore di Cosimo II de' Medici. È una osservazione di straordinaria importanza, tanto che lo stesso Galilei ne darà immediata comunicazione (con l'osservazione delle rugosità lunari) pubblicando il 12 marzo del 1610 il libro (Fig. 3.4) *Sidereus Nuncius*: tre mesi esatti dopo la prima osservazione! Se devo

Figura 3.3. Ritratto di Galileo Galilei, di Justus Sustermans (1635). Immagine di dominio pubblico grazie alla Galleria degli Uffizi.

trovare la data di nascita della Scienza moderna, per me è proprio il 7 Gennaio 1610: Galilei inaugura il metodo scientifico facendo delle osservazioni con uno strumento, deduce delle conclusioni dal suo studio e pubblica i risultati.

Nel 1624 Galilei cominciò il suo nuovo lavoro, il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* in lingua italiana. Menzionerò ancora questo libro nel Cap. 5. Utilizzando l'espediente di un dialogo tra tre interlocutori immaginari (Sagredo, Salviati e Simplicio), espone le varie teorie correnti sulla cosmologia, e dunque anche quella copernicana, ma senza mostrare di impegnarsi personalmente a favore di nessuna di esse, anche se tutti capiscono per chi tiene.

L'espediente retorico infatti non è sufficiente: sospettato di eresia e accusato di voler sovvertire la filosofia naturale aristotelica e le Sacre Scritture, Galilei fu sottoposto a una lunga e per lui faticosa indagine da parte del Sant'Uffizio. Il processo si conclude il 22 giugno 1633, dopo la costrizione all'abiura delle concezioni astronomiche riportare nei suoi libri e al confino nella propria villa di Arcetri, vicino Firenze.

Dopo il processo, Galilei dettò (gli era stato proibito di scrivere!) e pubblicò nel 1638 nei Paesi Bassi il grande trattato *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i moti locali.* È il libro da cui si evincono le considerazioni cinematiche sopra riportate. Anche questo secondo testo è organizzato come un dialogo che si svolge in quattro giornate fra i tre medesimi protagonisti del precedente Dialogo.

Dopo 359 anni, nel 1992, la sessione plenaria della Pontificia accademia delle scienze, riconobbe *gli errori commessi* nel processo istruttorio del Sant'Uffizio, riabilitando Galilei.

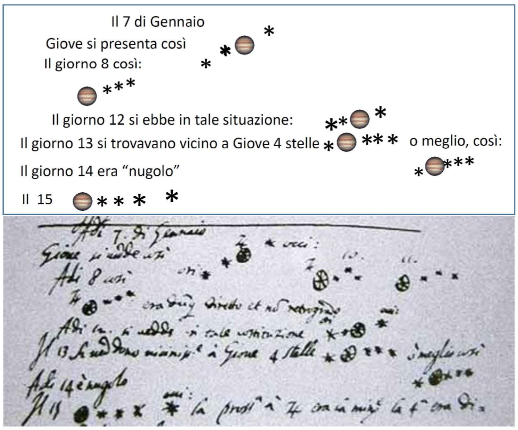

Figura 3.4. La scoperta delle lune di Giove. In basso, copia di parte del foglio contenente note a mano, prese durante l'osservazione delle notti dal 7/1/1610 e successive da parte di Galilei. In alto, ho riportato parte di quello che si evince, con la posizione relativa di Giove e dei satelliti osservabili. Potete trovare il testo del Sidereus Nuncius su: `https://la.wikisource.org/wiki/Sidereus_nuncius`.

3.3 Velocità e accelerazione

Generalizzo le grandezze velocità e accelerazione sopra definite al caso più generale. Inizio con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali: in seguito, potranno essere definite anche in altri sistemi di riferimento.

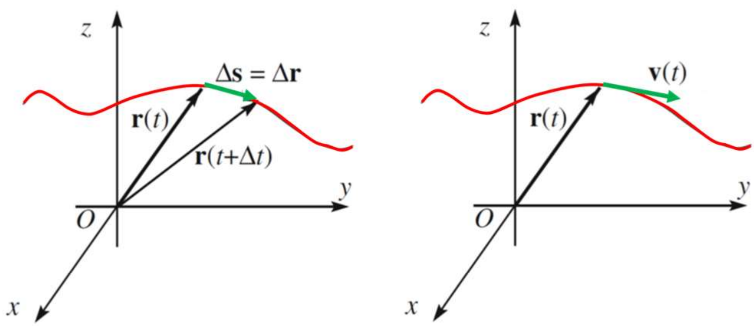

Figura 3.5. Sinistra: definizione del vettore $\Delta\mathbf{s}$ (che servirà per introdurre lo spostamento infinitesimo) in coordinate cartesiane tra due generici istanti di tempo t e $t+\Delta t$. La direzione di $\Delta\mathbf{s}$ tende a diventare tangente alla curva quando Δt tende a zero. Destra: il vettore velocità risultante è sempre tangente alla traiettoria.

3.3.1 Definizione di velocità

Supponiamo di avere un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto O. Rispetto questo sistema di riferimento la **posizione** della particella da studiare in un generico istante di tempo t è data dalla relazione:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \ . \tag{3.15}$$

Tuttavia, immaginiamo di voler studiare la particella rispetto un punto fisso Ω di coordinate $\mathbf{r}_\Omega \equiv (x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$. Per qualche motivo sperimentale, riferire lo studio del moto rispetto al punto Ω potrebbe risultare più pratico, e voglio esprimere l'equazione del moto rispetto questo punto. Ad esempio: una particella percorre una pista circolare; l'origine del sistema di riferimento è il centro della circonferenza, ma il punto di partenza (*start*) potrebbe essere il punto Ω più conveniente per studiare il moto. Ad un istante di tempo t_1 il vettore che congiunge Ω con la particella è $\mathbf{s}(t_1)$, che come si evince dalla Fig. 3.5, è dato dalla somma di due vettori e corrisponde a

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{s}(t_1) + \mathbf{r}_\Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbf{s}(t_1) = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}_\Omega \tag{3.16}$$

Il vettore $\mathbf{s}$(t) e il vettore $\mathbf{r}$(t) coincidono se $\mathbf{r}_\Omega = 0$, ossia se il punto Ω coincide con l'origine O del sistema di riferimento. Usando le coordinate cartesiane, senza esplicitare il vettore costante $\mathbf{r}_\Omega$ si ha:

$$\mathbf{s}(t_1) = x(t_1)\hat{\mathbf{i}} + y(t_1)\hat{\mathbf{j}} + z(t_1)\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{r}_\Omega \tag{3.17}$$

Ad un tempo successivo $t_1 + \Delta t$ la particella si è spostata nel punto

$$\mathbf{s}(t_1 + \Delta t) = x(t_1 + \Delta t)\hat{\mathbf{i}} + y(t_1 + \Delta t)\hat{\mathbf{j}} + z(t_1 + \Delta t)\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{r}_\Omega \tag{3.18}$$

avendo percorso un tratto:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{s} &\equiv [\mathbf{r}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{r}_\Omega] - [\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}_\Omega] \\
&= [x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)]\hat{\mathbf{i}} + [y(t_1 + \Delta t) - y(t_1)]\hat{\mathbf{j}} + [z(t_1 + \Delta t) - z(t_1)]\hat{\mathbf{k}} \\
&= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\hat{\mathbf{k}} \ .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Analizziamo ora il significato geometrico della grandezza $\Delta\mathbf{s}$, con l'aiuto dalla Fig. 3.5 a sinistra. La grandezza corrisponde al segmento orientato che rappresenta una corda alla traiettoria seguita dalla particella. Più piccolo è l'intervallo di tempo Δt considerato, più il segmento tende a coincidere col tratto di traiettoria e a diventarne tangente. Quando $\Delta t \to 0$, anche $\Delta\mathbf{s} \to 0$ ma, analogamente a quanto abbiamo visto col moto unidimensionale, il loro rapporto tende a una quantità finita.

Se si conosce la legge oraria del moto di una particella, eq. 3.16, posso quindi definire la grandezza

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\
&= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\
&= v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

chiamata **velocità** della particella nel punto occupato all'istante di tempo t sulla traiettoria definita dalla legge oraria. Con riferimento alla Fig. 3.5 a destra, il vettore velocità per costruzione è tangente punto per punto alla traiettoria.

Cerco ora di spiegare il motivo di questa apparente complicazione di aver introdotto il vettore $\mathbf{s}$. Il primo motivo, è che abbiamo verificato che **la velocità della particella è indipendente dalla scelta del punto da cui scegliamo di seguire il moto**; stessa cosa sarà per l'accelerazione, definita di seguito. La seconda ragione è che in questo modo il concetto di *posizione* $\mathbf{r}$ di un punto materiale viene disaccoppiato anche in maniera notazionale da quello del suo *spostamento*, $\Delta\mathbf{s}$, che corrisponde a una *variazione di posizione.* Infine, tale definizione di spostamento $\Delta\mathbf{s}$ evita l'uso della notazione $\Delta\mathbf{r}$ che si trova su alcuni testi, perché questa ingenera estrema confusione quando si introducono le coordinate sferiche. In quel caso, verrà utilizzata la grandezza differenziale scalare dr che è diversa dalla grandezza vettoriale che si ottiene facendo tendere la 3.19 al limite, per $\Delta t \to 0$. La variabile infinitesima dr in coordinate sferiche è fondamentale per lo studio della gravitazione (Cap. 11) e quando studierete fisica atomica.

Una ultima notazione: alcuni termini scientifici in inglese hanno un significato ben definito. Questo è il caso di *velocity* e *speed.* La grandezza indicata con *velocity* è una quantità vettoriale, mentre *speed* è la quantità scalare che corrisponde al suo modulo ossia:

$$v(t) \equiv \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}\ .$$

Purtroppo in italiano questa differenziazione linguistica non esiste. Tuttavia, cerco nel seguito di essere sempre rigoroso e di non confondere mai la velocità (vettore) con il suo modulo. Questo deve essere in generale fatto per tutte le grandezze vettoriali.

3.3.2 Definizione di accelerazione

Empiricamente, si osserva che anche la velocità di una particella può variare nel tempo. Possiamo quindi studiare come varia la velocità in un intervallo di tempo Δt, facendo poi tendere a zero l'intervallo di tempo. Questa grandezza si chiama **accelerazione** della particella:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &\equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}\\ &= a_x(t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{3.21}$$

L'accelerazione è la derivata prima della funzione velocità, che a sua volta è la derivata prima della funzione legge oraria. Per questo motivo, l'accelerazione si può esprimere anche come derivata seconda della legge oraria:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.4 Problema diretto della cinematica

Un aspetto risulta ora chiaro: nota la legge oraria 3.16, velocità e accelerazione possono essere determinate tramite l'operazione matematica di derivazione. Non vi è alcuna difficoltà tecnica: le derivate delle principali funzioni sono reperibili in forma tabulata, oppure possono essere calcolate tramite programmi al calcolatore. Nota la legge oraria, la determinazione di velocità e accelerazione della particella è solo un problema tecnico che risolve completamente il problema cinematico. In sostanza:

$$\text{se è nota } \mathbf{s}(t)\text{, allora: } \mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{s}}{dt} \text{ e } \mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \text{ sono calcolabili.} \tag{3.23}$$

Ci si può chiedere se conoscere la derivata dell'accelerazione (ossia, la derivata terza della legge oraria) dia qualche informazione addizionale. La risposta è no: dal punto di vista della caratterizzazione del moto dei corpi, basta conoscere sino alla derivata seconda della legge oraria.

3.4.1 Spostamento e percorso infinitesimo

Nella eq. 3.19 abbiamo determinato una variazione finita della posizione. Quando si tende al limite per tempi infinitesimi, questa quantità prende il nome di quantità differenziale. In generale, il **differenziale** di una funzione quantifica la variazione infinitesima della funzione rispetto a una variabile indipendente. [5]

[5] **Nota matematica.** Con il calcolo differenziale è possibile mettere in relazione variazioni infinitesime di diverse variabili utilizzando le derivate. Se f è una funzione di x, allora il differenziale df è legato a dx dalla formula

$$df = \frac{df}{dx}\,dx$$

dove $\frac{df}{dx}$ indica la derivata di f rispetto a x. Questa relazione riassume l'idea intuitiva che la derivata di f rispetto a x è il limite del rapporto incrementale $\Delta f/\Delta x$ man mano che Δx diventa infinitesimo. Ad esempio, nel caso in cui f corrisponda a una coordinata spaziale (ad esempio, z) e x al tempo, la relazione precedente corrisponde a

$$dz = \frac{dz}{dt}\,dt \quad \longrightarrow \quad dz = v_z dt$$

dove v_z è la componente z della velocità.

Maurizio **Spurio**

Meccanica Newtoniana

per un approccio propedeutico alla fisica moderna

Accedi all'**ebook** e ai **contenuti digitali** › **Espandi** le tue risorse › con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**

All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

EdiSES università

ISBN 978-88-3623-224-6

9 788836 232246