Luigi Verolino

Quesiti di Matematica e Fisica

per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1960 al 1970

EdiSES università

Quesiti di Matematica e Fisica

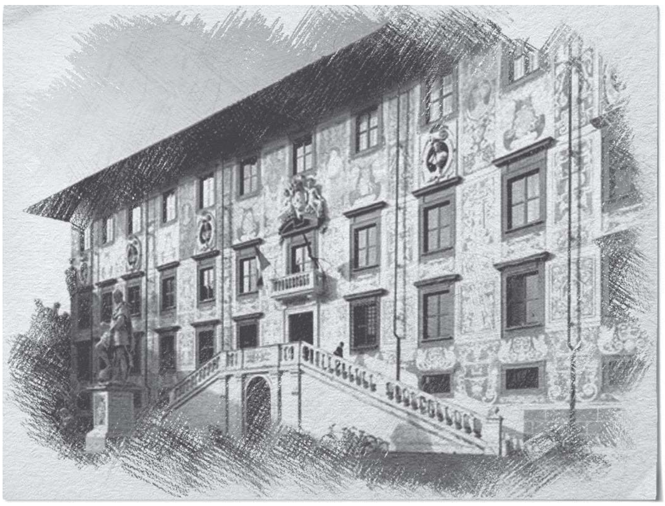
per l'ammissione alla

Scuola Normale Superiore di Pisa

dal 1960 al 1970

Prof. Luigi Verolino

Università Federico II di Napoli



EdiSES università

Luigi Verolino
Quesiti di *Matematica* e *Fisica* per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1960 al 1970

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2026 2025 2024 2023 2022

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Fotocomposizione: EdiSES Edizioni S.r.l.

Stampato presso PrintSprint S.r.l. – Napoli

per conto della EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edisesuniversita.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 112 6

A tutta la mia famiglia che
lentamente si sta allargando:
benvenuta, piccola Jennifer.

Napoli, luglio 2022

Caro lettore,

nelle pagine che seguono troverai, completamente risolti, i quesiti di Matematica e di Fisica, assegnati per l'accesso alla Scuola Normale Superiore di Pisa, negli anni che vanno dal 1960 al 1970. Ogni quesito è stato risolto e commentato in maniera accurata: tuttavia, qualora trovassi degli errori di qualunque tipo, ti prego di segnalarli all'indirizzo di posta elettronica

luigi.verolino@edises.it .

Trovandosi di fronte alla scelta di più procedimenti per risolvere un esercizio, si è fatto sempre ricorso al metodo più semplice, che poi vuol dire più vicino a quanto l'allievo ha appreso durante gli studi scolastici.
Questo lavoro è stato concepito nella speranza che possa essere innanzitutto utile a chi voglia tentare l'accesso a questa prestigiosissima istituzione culturale. Nondimeno, il desiderio più profondo dell'autore è offrire alla scuola italiana un nuovo strumento formativo che, guardando all'eccellenza, possa essere di aiuto a ritrovare stimoli e valori, in grado di aiutare l'allievo a comprendere alcuni cambiamenti in essere nella società contemporanea. Esso è stato concepito quale testo integrativo dell'ordinario materiale scolastico, per aiutare coloro che vogliono approfondire le conoscenze matematiche e fisiche e cimentarsi con i problemi di ammissione alla Normale Superiore di Pisa. Questi problemi sono famosi per frantumare tutte le certezze degli studenti, nel senso che sono piuttosto al di sopra della media della secondaria superiore italiana e sono concepiti per scremare la futura classe di ricercatori, ponendo da subito l'allievo di fronte a problemi di ricerca.
Infine, si desidera con questo libro risvegliare la parte critica della coscienza degli addetti ai lavori, di coloro che preparano i test di selezione per l'ammissione ad un corso di laurea oppure per i concorsi più vari e dei docenti, in generale: una delle più prestigiose istituzioni culturali del nostro paese, quando seleziona i nuovi membri, lo fa scremando le più sottili capacità di risolvere problemi, in situazioni mai viste prima, per giudicare le capacità algoritmiche e procedurali dell'allievo, le sole che saranno lampada ai passi dei futuri ricercatori. Dunque, non vuote formule o decine di capitoli da imparare a memoria,

ma solo sviluppo di ragionamenti forti, chiari ed originali. Bisognerebbe meditare un po' di più su queste cose, oggi che la preparazione dello studente liceale è tutta incardinata sui pochi concetti e metodi, acquisiti in profondità.

Buona lettura e buon divertimento,

Luigi Verolino.

Indice

Anno accademico 1960-1961-M

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

Dissertazione: Teorema di Talete nel piano e dimostrazione di uno solo (a scelta) dei criteri di similitudine fra triangoli.

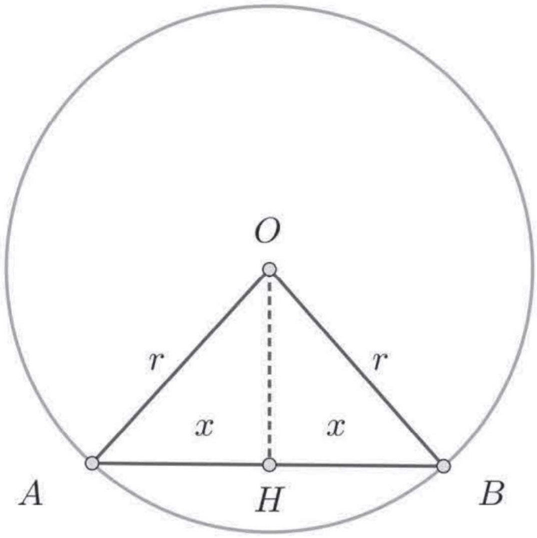
1) In un cerchio dato, il cui raggio è misurato da r, determinare un triangolo che abbia un vertice nel centro del cerchio e gli altri due, A e B, sulla circonferenza, in modo che la somma della base AB e della relativa altezza sia uguale a un dato segmento misurato da a, supponendo $a < 2r$.

Riferendosi alla figura che segue, posto $AB = 2x$, è facile determinare l'altezza

$$OH = \sqrt{r^2 - x^2}\ ,$$

per cui il problema posto si può riassumere nell'unica relazione

$$AB + OH = a = 2x + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 < a < 2r\ .$$

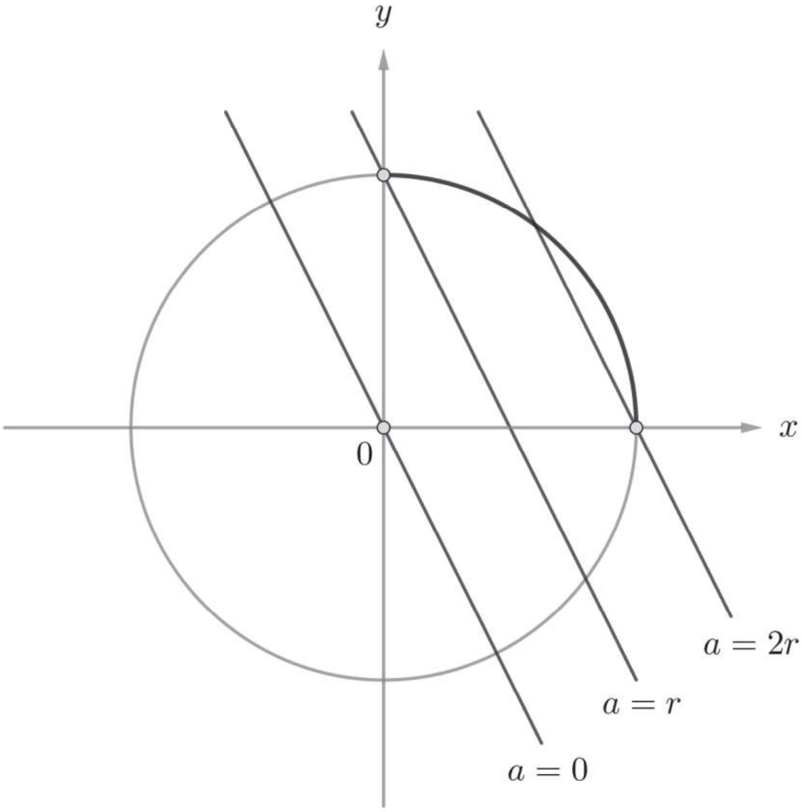


Discutendo sinteticamente questa relazione, si può dire che essa regola le intersezioni tra una retta ed una circonferenza, che si discutono agevolmente per via grafica. In maniera più precisa, si può porre

$$y = a - 2\,x = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 < a < 2r\ ,$$

un problema che si può risolvere utilizzando la figura che segue. In realtà, non interessa l'intera circonferenza, ma soltanto la porzione contenuta nel primo quadrante, laddove

$$0 \le x \le r \quad \wedge \quad 0 \le y \le r\,.$$



Risolvere il sistema, e quindi il problema, equivale a determinare i valori del parametro di discussione a, in corrispondenza dei quali le rette del fascio improprio intersecano l'arco di circonferenza posto nel primo quadrante. In tal modo, si può osservare quanto di seguito descritto.

■ Nell'intervallo $0 < a < r$, non esiste alcuna soluzione del problema, dato che l'ascissa del punto di intersezione è negativa.

■ Nell'intervallo $r \leq a < 2r$, si ottiene sempre una sola soluzione, che si ricava dall'equazione

$$(a - 2\,x)^2 = r^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad 5x^2 - 4ax + a^2 - r^2 = 0\,,$$

la cui unica soluzione, che verifica la restrizione $0 \leq x < 3r/5$, vale

$$x = \frac{2a - \sqrt{5r^2 - a^2}}{5}\,.$$

2) Dimostrare che nessun $x \neq 0$ soddisfa la disuguaglianza

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x} < 1\,.$$

I radicali vanno intesi in valore assoluto.

Si osserva anzitutto che la disuguaglianza assegnata esiste per

$$x = 0 \quad \vee \quad x > 1\,.$$

Da ciò discende che, escludendo il valore $x = 0$, essa non risulta verificata da alcun valore di x del campo di esistenza, dal momento che, posto

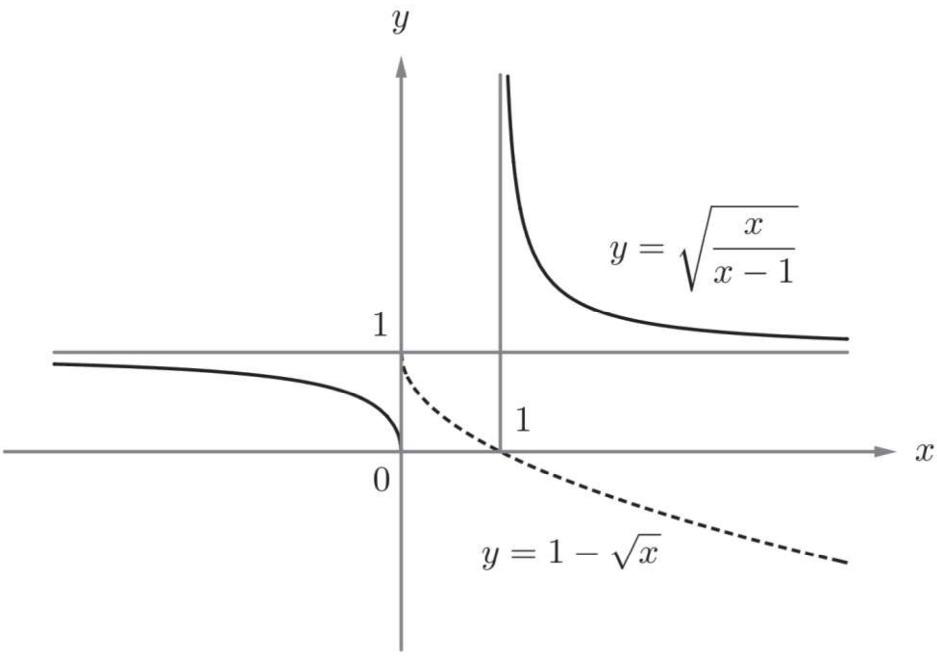
$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} < 1 - \sqrt{x}\,,$$

il primo membro risulta sempre positivo, mentre il secondo è sempre negativo.
Un altro modo di procedere è stringatamente indicato in quel che segue

$$x > 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} > 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} + \sqrt{\frac{x}{x-1}} > 1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}} > 1\,.$$

Si ritiene che soltanto pochi allievi di scuola secondaria risolvano le disequazioni guardando i segni dei due membri, essendo la maggior parte di essi assuefatti a procedure algoritmiche, basate su formule da applicare in maniera pedissequa e ripetitiva.
Prima di terminare questo esercizio, è interessante mostrare anche la soluzione grafica della disequazione discussa. Precisamente, la figura che segue riporta l'andamento delle due funzioni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad \text{(a tratto continuo)}\,, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x} \quad \text{(in tratteggio)}\,.$$



Si nota chiaramente che, per $x > 1$, la curva nera si trova sempre al di sopra di quella tratteggiata.

3) È più facile, gettando una volta un dado, ottenere 6, oppure, gettandolo tre volte, ottenere tutte e tre le volte un numero pari?

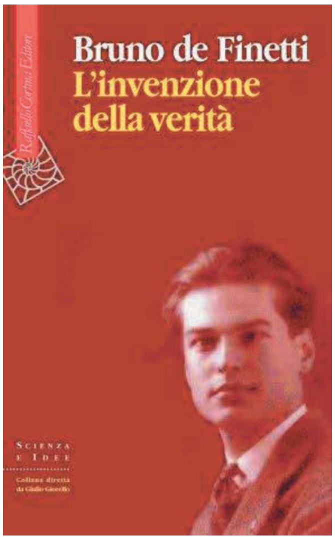
Prima di entrare nel vivo della soluzione dell'esercizio proposto, conviene presentare un veloce quadro delle diverse definizioni della probabilità.
Si chiama probabilità di un evento E, il numero reale p, con $0 \leq p \leq 1$, che misura il grado di aspettativa che si attribuisce al verificarsi di un evento E. Un evento è un concetto elementare che indica un fatto o una situazione che può verificarsi o non verificarsi. Indicato con E l'evento, la sua probabilità si indica con $p(E)$.
Se $p(E) = 0$, allora E rappresenta un evento impossibile; se $p(E) = 1$, allora E rappresenta un evento certo.
La teoria della probabilità è quella parte della Matematica che, sulla base delle informazioni che si possiedono, sviluppa metodi e calcoli per esprimere quantitativamente il grado di aspettativa o fiducia sul fatto che certi eventi si verifichino. Questa misura di probabilità è attribuita in base a valutazioni di diversi aspetti. L'accentuazione di uno di questi aspetti porta a diverse definizioni della probabilità.
La probabilità *a priori* rappresenta il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un evento e il numero di casi possibili, supposti tutti ugualmente probabili. Ad esempio, se si lancia un dado non truccato, la probabilità di ottenere un numero pari, cioè di realizzare i tre casi favorevoli $(2, 4, 6)$ su sei possibili, per cui si può scrivere

$$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questa definizione è applicabile solo a determinate categorie di eventi.
La probabilità stimata sulla base della frequenza, detta *frequentista* oppure a posteriori, cioè la probabilità di un evento E, fatto oggetto di rilevazioni statistiche, è il rapporto fra il numero delle volte in cui è stato registrato ed il numero totale delle rilevazioni. Ad esempio, Stefano, in un allenamento di basket, su 100 tiri a canestro ne realizza 80. Qual è la probabilità, o frequenza, dell'evento «Alberto fa canestro»? La risposta è

$$p(E) = \frac{80}{100} = 0.8\,.$$

Infine, esiste probabilità attribuita come grado di fiducia soggettiva, detta *soggettivistica*. Vi sono eventi che non possono essere analizzati né da un punto di vista frequentista, né da un punto di vista a priori: la vincita di una squadra in un torneo, la vincita in una lotteria, non conoscendo il numero di biglietti venduti, e così via. In molti casi dunque è solo possibile ordinare gli eventi sulla base del grado di fiducia che ogni individuo personalmente assegna a ciascuno di essi.



Bruno De Finetti
Innsbruck, 13 giugno 1906 – Roma, 20 luglio 1985

Una definizione operativa per questa probabilità è stata data dal matematico italiano Bruno De Finetti (1906-1985): la probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un determinato individuo, è uguale al prezzo che egli ritiene equo pagare per ricevere un importo unitario al verificarsi dell'evento E. Questa definizione non richiede necessariamente che l'evento di cui si calcola la probabilità sia legato a giochi di azzardo: si tratta soltanto di poter attribuire un valore numerico a un evento aleatorio cui, idealmente, si associa una scommessa.
L'inizio del calcolo delle probabilità viene fatto risalire a Gerolamo Cardano, che fra i molti interessi coltivava anche il gioco d'azzardo. Si possono poi citare le riflessioni contenute in uno scambio epistolare dell'estate 1654 tra Pierre de Fermat e Blaise Pascal, interpellato al riguardo da Antoine Gombaud, cavaliere di Méré che gli aveva posto numerosi problemi riguardo il gioco: i problemi e le soluzioni sono privi

di importanza, ma segnarono l'origine della teoria della probabilità. Entrambi applicarono la teoria delle combinazioni. Neanche Galilei fu risparmiato dai quesiti di nobili giocatori. Le prime trattazioni complete su questo nuovo settore risalgono al Settecento e si devono a Jacob Bernoulli e Pierre Simon de Laplace, autori di due testi fondamentali rispettivamente *Ars conjectandi* e *Teoria analitica della probabilità*.
Ebbene, nella soluzione dell'esercizio si adopererà la probabilità *a priori*, assumendo che ciascuna faccia del dado abbia la stessa probabilità di uscire ad ogni lancio. Si tratta di una ipotesi implicita nel testo, ma che nella realtà potrebbe essere non verificata, qualora il dado fosse truccato!

Nel *primo esperimento*, la probabilità che al primo lancio esca il numero 6, essendo le sei facce equiprobabili, vale proprio

$$P_1 = \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}\,.$$

Invece, nel *secondo esperimento*, dato che la probabilità che ad un lancio esca un numero pari è 1/2, considerando come eventi indipendenti i tre successivi lanci, la probabilità che in tre lanci esca sempre un numero pari è

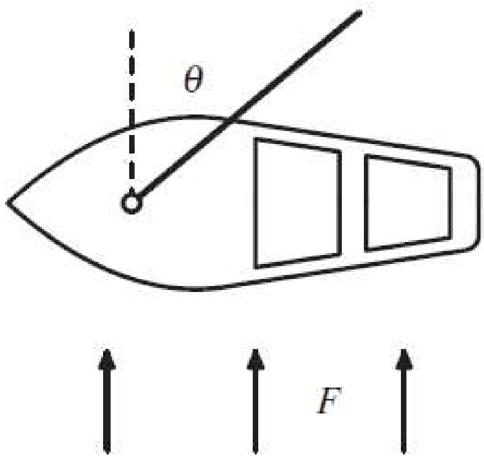
$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125\,.$$

Si deduce, allora, che è più facile ottenere 6, oppure una qualsiasi altra faccia del dado, con un lancio solo piuttosto che ottenere un numero pari in tre lanci consecutivi.

4) Si consideri una barca provvista di una vela girevole attorno all'albero maestro. Supponiamo che:

(a) la direzione del vento sia perpendicolare alla direzione del moto della barca;
(b) la forza F esercitata dal vento sulla vela sia proporzionale al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del vento;
(c) la velocità della barca sia proporzionale a F e al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del moto della barca.

Dire per quale posizione della vela si ottiene la massima velocità della barca.



Si tratta di un compito adatto ad aspiranti nocchieri. Introdotto l'angolo che la vela forma con la direzione del vento

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

peraltro indicato in figura, il libretto di navigazione informa che la spinta del vento, sempre perpendicolare alla direzione del moto della barca, vale

$$F = k \sin\theta \ ,$$

essendo k una opportuna costante, che ha le dimensioni di una forza, e che la velocità risulta pari a

$$v = hF \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = hF \cos\theta = hk \sin\theta \cos\theta = \frac{hk}{2} \sin(2\theta) \,,$$

dove anche h è una costante, avente le dimensioni di un tempo diviso per la massa. In tal modo, quando la funzione seno è unitaria, si procederà alla massima velocità, per cui

$$\sin(2\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} .$$

E si va a gonfie vele!
Chi desiderasse approfondire gli argomenti discussi in questo esercizio può leggere il libro riportato in figura, di cui si riporta un piccolo estratto.

La esperienza quotidiana suggerisce che, quando si applica una forza ad un oggetto, questo si muove nella direzione in cui viene spinto. Il fatto è che quando siamo su una imbarcazione a vela e navighiamo di bolina o al traverso, la barca si dirige prevalentemente verso prua, anche se il vento spinge lateralmente sulle vele; questo ci induce a pensare che ci siano altre forze in gioco. Naturalmente non c'è altra possibilità che tenere in considerazione le forze dell'acqua sulla barca. Arriviamo così all'affermazione, che può sembrare ovvia, ma che al contrario non è banale, che una barca senza vela e una vela senza barca non possono essere governate e, quindi, navigare. Una imbarcazione a vela può essere pensata come un sistema immerso in due fluidi, aria e acqua che si muovono rispetto alla terraferma: l'aria, muovendosi genera il vento e l'acqua nel suo moto genera la corrente. Se immaginassimo di avere una vela priva di scafo, essa "galleggerebbe" e si muoverebbe insieme all'aria, trascinata dal vento, senza cambiare direzione, come se fosse un palloncino.

Viceversa uno scafo privo di vela, motore o remi, si muoverebbe insieme all'acqua per effetto della corrente e andrebbe alla deriva, come se fosse un tronco. Immaginiamo di essere seduti sul palloncino o sul tronco: sebbene ci stiamo muovendo rispetto alla terra, siamo fermi rispetto all'aria e all'acqua e non sentiamo nessuna forza. Quindi, una vela e uno scafo considerati separatamente sono fermi nel fluido nel quale sono immersi. Ma cosa succede se attacchiamo la vela allo scafo? Se aria e acqua, ipoteticamente, si muovessero nello stesso modo (con la stessa velocità sia per quanto riguarda l'intensità che la direzione, come vedremo successivamente), non succederebbe nulla di diverso da quanto abbiamo già visto; ma, per fortuna dei marinai, in generale, vento e corrente hanno diversa intensità e direzione. In questo caso il vento, spingendo sulla vela, trascina anche lo scafo che acquista una velocità rispetto al mare e viene investito da un flusso d'acqua. D'altra parte anche la vela, trascinata a sua volta dallo scafo, si muove rispetto all'aria e si gonfia perché è investita da un flusso d'aria. A proposito di quanto detto vorrei proporre ai lettori un piccolo quesito, piuttosto di moda in ambiente velistico: Franco e Luisa vogliono sfidarsi regatando con una deriva lungo un fiume. Vincerà la competizione chi percorre 2 miglia nel minor tempo. Franco parte per primo. Le condizioni sembrano buone: il fiume scorre con una corrente pari a 15 nodi e ci sono 15 nodi di vento che soffiano nella stessa direzione in cui scorre la corrente. Quando è il

Luigi Verolino

Quesiti di Matematica e Fisica
per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1960 al 1970

EdiSES università

ISBN 978-88-3623-112-6

9 788836 231126