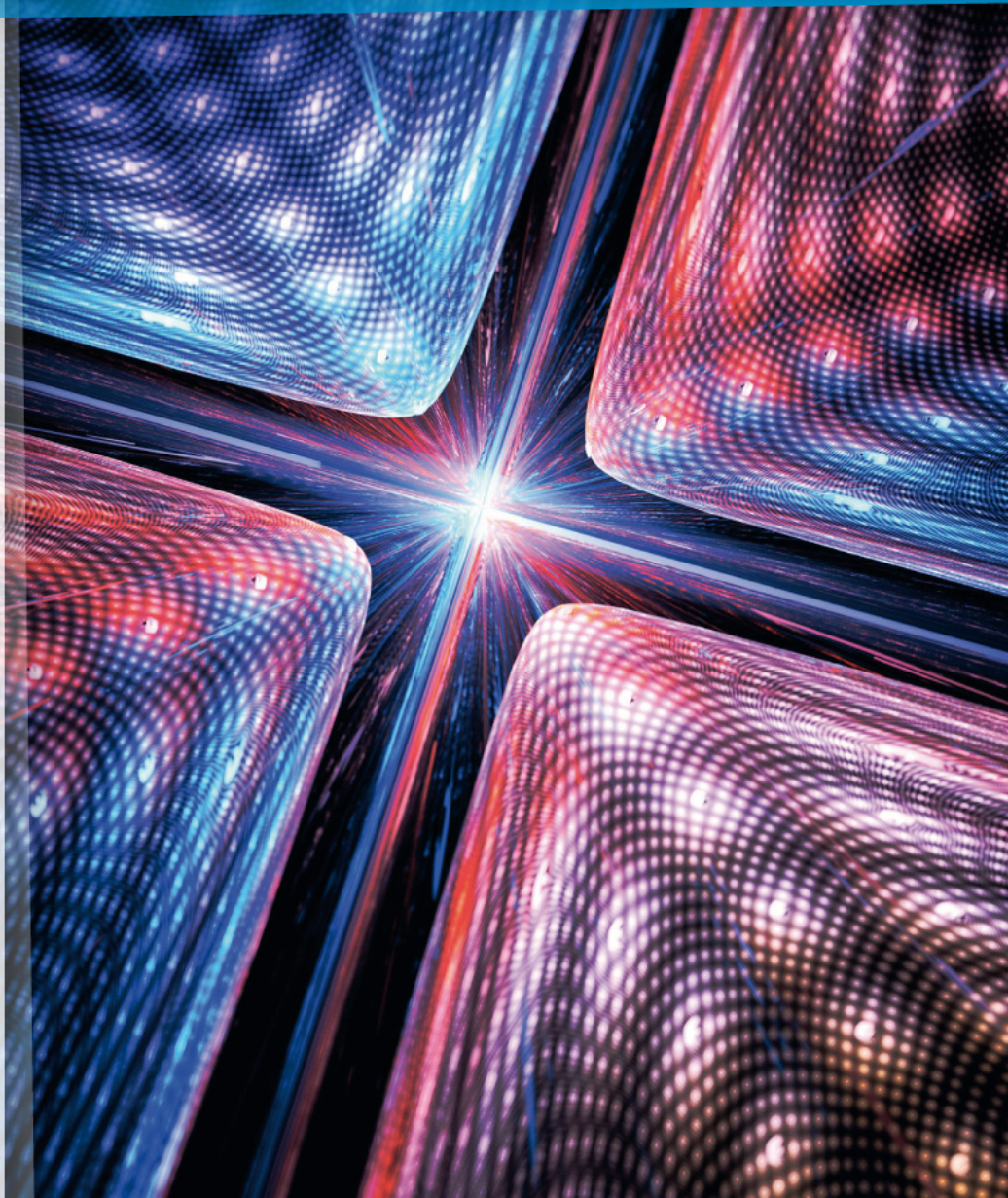


Franco Ciccacci • Andrea Benfenati • Raffaele Farinaro

Introduzione alla Fisica dei Quanti

Temi d'esame risolti



FRANCO CICCACCI
ANDREA BENFENATI
RAFFAELE FARINARO

INTRODUZIONE ALLA FISICA DEI QUANTI

TEMI D'ESAME RISOLTI



Franco Ciccacci, Andrea Benfenati, Raffaele Farinaro
Introduzione alla fisica dei quanti – temi d'esame risolti
Copyright © 2016, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1
2019 2018 2017 2016

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata



A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La Casa Editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

Stampato presso la: Print Sprint srl - Napoli

Per conto della:

EdiSES srl – Piazza Dante 89 – 80135 Napoli
Tel. 081/7441706-07 Fax. 081/7441705

<http://www.edises.it>

E-mail: info@edises.it

ISBN 978 88 7959 899 6

Prefazione

Queste note sono state redatte a cura di Andrea Benfenati e Raffaele Farinaro, due studenti del Politecnico di Milano che hanno seguito con profitto il corso da me tenuto di “Introduzione alla Fisica dei Quanti” (2° semestre del 2° anno della Laurea Triennale in Ingegneria Fisica). Andrea e Raffaele hanno deciso di dedicare del tempo a favore dei loro colleghi, venendo incontro ad una richiesta che mi veniva rinnovata di anno in anno da parte degli studenti del corso, e che io non avevo mai trovato tempo e modo di soddisfare. Vengono qui presentate le soluzioni di diversi temi d’esame del corso di cui sopra, in particolare dei tredici il cui testo è incluso come appendice (sotto la voce “Problemi”) nel mio libro “Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica”, edito dalla EdiSES, che viene più volte richiamato anche nel presente testo con la sigla FAQ. Ogni tema d’esame è composto da 6 problemi che fanno riferimento ad altrettanti diversi argomenti trattati nel corso: tipicamente i primi 3 ai primi 9 capitoli e gli altri 3 ai restanti capitoli di FAQ. Laddove la soluzione al problema si trovasse già del tutto o in parte in FAQ, se ne indica il capitolo e paragrafo (es.: vedi FAQ 3.4.1).

Franco Ciccacci

Milano, Febbraio 2016

Indice

1	Esame	5
1.1	Soluzione	8
2	Esame	15
2.1	Soluzione	18
3	Esame	25
3.1	Soluzione	28
4	Esame	35
4.1	Soluzione	38
5	Esame	49
5.1	Soluzione	52
6	Esame	59
6.1	Soluzione	62
7	Esame	73
7.1	Soluzione	75
8	Esame	87
8.1	Soluzione	90
9	Esame	103
9.1	Soluzione	105
10	Esame	121
10.1	Soluzione	124
11	Esame	131
11.1	Soluzione	134
12	Esame	149
12.1	Soluzione	152
13	Esame	165
13.1	Soluzione	168

5 Esame

Problema 5.1. Una cella fotoelettrica è costituita da un tubo a vuoto con due elettrodi metallici (emettitore E e collettore C) tra cui è possibile stabilire una differenza di potenziale VCE. L'emettitore, una lastrina di rame (funzione lavoro $\Phi_{Cu} = 4.5$ eV) di superficie 1 cm^2 , è illuminato con una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 200 \text{ nm}$ proveniente da una sorgente monocromatica puntiforme di potenza $P = 5 \text{ W}$ posta a 20 cm dall'emettitore stesso.

1. descrivere brevemente l'effetto fotoelettrico
2. trovare il numero di fotoni incidenti sull'emettitore per unità di tempo
3. fare un grafico qualitativo $I(V_{CE})$ della corrente che circola nella cella in funzione della differenza di potenziale tra emettitore e collettore (specificandone il segno)
4. trovare il valore del potenziale per cui la corrente si annulla (specificandone il segno)
5. trovare il valore della corrente di saturazione (si assuma pari al 2% la probabilità che un fotone dia luogo a un elettrone emesso)
6. Si ripeta il tutto nel caso che la sorgente monocromatica emetta onde di lunghezza d'onda pari a 400 nm a parità di potenza.

Problema 5.2. Si consideri un elettrone confinato in una buca infinita unidimensionale, cioè vincolato a muoversi in una sola direzione tra $-a/2 < x < a/2$ con $a = 10 \text{ \AA}$.

1. cosa si otterrebbe se si facesse la misura dell'energia dell'elettrone (espressa in eV)?
2. si immagini di aver misurato l'energia e di aver trovato il valore più basso tra quelli permessi (stato fondamentale): qual è la funzione d'onda dell'elettrone subito dopo la misura (cioè al tempo $t = 0$)? Quale sarà la funzione d'onda per tempi successivi ($t > 0$)? e la densità di probabilità? Commentare il risultato.
3. si immagini ora di aver preparato il sistema al tempo $t = 0$ in modo che facendo una misura si possa ottenere con ugual probabilità o il valore

dell'energia dello stato fondamentale o quello subito superiore (primo stato eccitato): qual'è la funzione d'onda $\Psi(t = 0)$ in questo caso? E quale sarà la funzione d'onda per tempi successivi ($t > 0$)? e la densità di probabilità? Commentare il risultato confrontandolo con il punto 2.

Problema 5.3. La serie di Balmer per l'idrogeno è costituita da righe nel visibile (righe $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ rispettivamente a lunghezza d'onda pari a 0.656, 0.486 e 0.434 μm) seguite da righe nell'ultravioletto che si addensano fino al "limite della serie" posto a 0.365 μm .

1. descrivere una possibile disposizione sperimentale per osservare tali righe
2. esprimere le energie delle righe in eV e spiegare quantitativamente l'origine della serie di Balmer alla luce del modello di Bohr
3. dire come cambierebbe lo spettro se una frazione pari al 33% degli atomi di idrogeno fosse sostituita da atomi di deuterio (atomo con un solo elettrone ma nucleo formato da un protone e un neutrone)
4. fare un grafico quantitativo dell'intensità in funzione della lunghezza d'onda relativo al punto 3

Problema 5.4. La parte di spin della funzione d'onda (spinore) di un elettrone è data $\chi = A[(1 - 2i)\chi_+ + 2\chi_-]$ dove i è l'unità immaginaria, χ_+ e χ_- sono gli autostati della componente z dello spin

1. determinare la costante A dalla condizione di normalizzazione della funzione d'onda
2. cosa si otterrebbe dalla misura della componente z dello spin (\hat{S}_z)? (quali sono i valori possibili? e con che probabilità?); trovare il valore di aspettazione di S_z
3. cosa si otterrebbe dalla misura delle componenti x e y dello spin (\hat{S}_x e \hat{S}_y)? trovare i valori di aspettazione di \hat{S}_x e \hat{S}_y
4. cosa si otterrebbe dalla misura del quadrato del modulo dello spin (\hat{S}^2)?

Problema 5.5. Si dica cosa si intende rispettivamente per metallo di transizione e terra rara. Si discuta in modo dettagliato e motivato la configurazione elettronica di due di tali atomi per esempio il manganese (Mn, $Z = 25$) e l'eurobio (Eu, $Z = 63$) Si trovi quanto valgono lo spin, il momento angolare orbitale e quello totale in questi due atomi nello stato fondamentale

Problema 5.6. Scrivere e commentare le distribuzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Discutere un esempio di applicazione per ciascuna di tali distribuzioni.

5.1 Soluzione

Soluzione 5.1. Chiamiamo S_{eff} la superficie del collettore e D la distanza tra esso e l'emettitore.

1. Vedi FAQ par. 5.5
2. Possiamo calcolare il numero di fotoni al secondo dividendo la potenza totale (energia/tempo) per l'energia del singolo fotone che sappiamo essere $E_{fotone} = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Per calcolare la potenza totale dobbiamo stare attenti nel considerare solo la superficie efficace che viene irraggiata:

$$\begin{aligned} N_{fotoni/s} &= \frac{P \frac{S_{eff}}{S_{tot}}}{E_{fotone}} \\ &= \frac{P}{h\frac{c}{\lambda}} \frac{S_{eff}}{4\pi D^2} \\ &\approx 10^{15} \frac{fotoni}{secondo} \end{aligned}$$

3. Vedi FAQ par. 5.5
4. La corrente si annulla quando il potenziale riesce a respingere anche gli elettroni più veloci (ovvero quelli che vengono espulsi dal livello di Fermi): dalla legge di Einstein abbiamo che $h\nu = \phi + eV_0$, per cui troviamo

$$V_0 = \frac{1}{e}(h\nu - \phi) \approx 1.68 \text{ eV}$$

5. Dalla teoria sappiamo che l'emissione di un elettrone è istantanea, per cui ogni fotone assorbito dà istantaneamente vita ad un elettrone in movimento. Possiamo quindi calcolare la corrente come:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\text{cariche}}{\text{tempo}} \\ &= N_{fotoni/s} \cdot q \cdot \alpha \\ &\approx 3.2 \mu A \end{aligned}$$

6. Abbiamo $N_{fotoni/s} \approx 2 \cdot 10^{15} \frac{fotoni}{secondo}$ ovvero il doppio rispetto al caso precedente. Nonostante questo non c'è fotoemissione in quanto i fotoni non sono abbastanza energetici. Infatti il quanto energetico $h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx 3 \text{ eV}$ è minore della funzione lavoro della lastrina di rame.

Soluzione 5.2. :

1. Se misurassimo il valore dell'energia otterremmo uno dei possibili autovalori dell'hamiltoniana, che nel caso di una buca infinita unidimensionale sono dati da

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 = \alpha n^2 \quad \text{con} \quad \alpha = 5 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.3 \text{ eV}$$

per cui

$$E_1 = 0.3 \text{ eV} \quad E_2 = 1.2 \text{ eV} \quad E_3 = 2.7 \text{ eV}$$

e così via.

2. Facciamo la misura e troviamo che il sistema si trova nello stato fondamentale, per cui $E = E_1 = 0.3 \text{ eV}$: in questo modo abbiamo provocato un collasso della funzione d'onda, che nell'istante $t = 0$ diventa proprio l'autofunzione corrispondente ad E_1 , ovvero

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Per tempi successivi però la funzione non rimane costante, mentre la sua densità di probabilità sì, in quanto il sistema è collassato in uno stato stazionario:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \quad |\Psi(x, t)|^2 = |\Psi(x, 0)|^2$$

3. Dobbiamo scrivere come la funzione d'onda come combinazione equiprobabile dei primi due stati di una buca infinita unidimensione: abbiamo quindi che

$$\Psi(x, 0) = A\psi_1 + B\psi_2$$

ma sappiamo che $A^2 = B^2$ per l'equiprobabilità ed andando a normalizzare la funzione abbiamo che

$$\int |\Psi(x, 0)|^2 dx = A^2 + B^2 = 1 \rightarrow A^2 = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi scrivere che

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right)$$

Per $t > 0$ si ha che

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

per cui lo stato non è più stazionario e la densità di probabilità evolverà nel tempo, a differenza del punto precedente. Andando a calcolare la densità di probabilità abbiamo infatti

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \frac{1}{a} \left| \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{a} \left| \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left[\cos\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) - i \sin\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \left[\cos\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) - i \sin\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{a} \left| \left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \cos\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + i \left[-\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \sin\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{a}2x\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \right. \\ &\quad \cdot \left[\cos\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) \cos\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) + \sin\left(\frac{E_1}{\hbar}t\right) \sin\left(\frac{E_2}{\hbar}t\right) \right] \left. \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}2x\right) \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right) \right\} \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo calcolato il modulo quadro di un generico numero complesso $A + iB$ come $A^2 + B^2$ e nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la formula di sottrazione del coseno

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

La probabilità quindi oscilla nel tempo come un coseno il cui argomento è proporzionale al ΔE .

Soluzione 5.3. La serie di Balmer rappresenta la serie di transizioni ottiche da uno stato eccitato a quello con $n = 2$.

1. Vedi FAQ par. 6.1

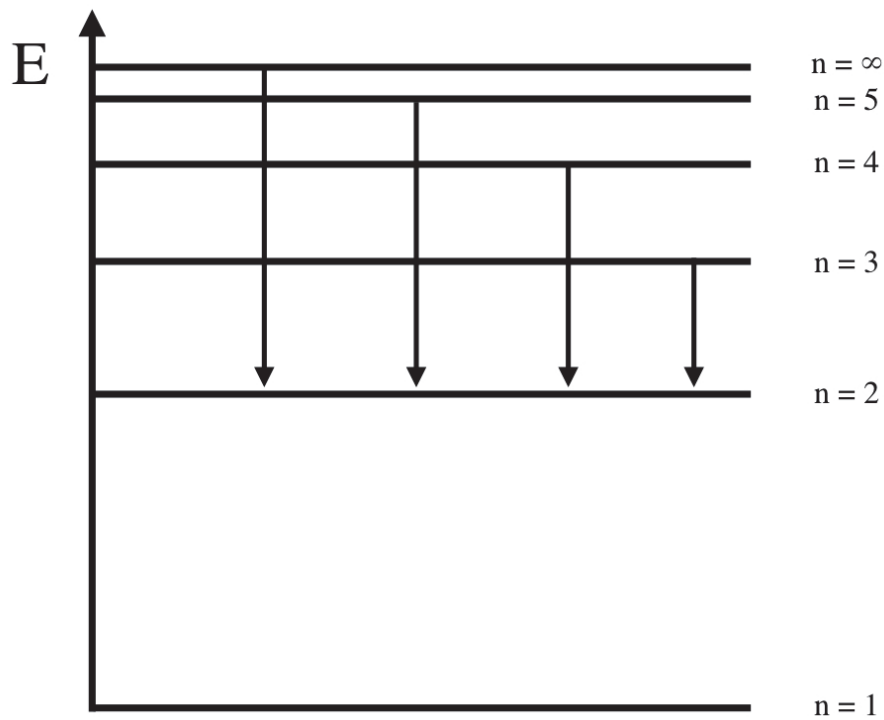


Figura 11: Schema emissione Balmer

2. Sappiamo che un elettrone che compie una transizione ottica emette un'onda con energia pari alla differenza tra i due livelli, $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$, per cui possiamo facilmente calcolare le energie corrispondenti alle lunghezze in questione (per riconoscere le transizioni sappiamo che lunghezze d'onda maggiori corrispondono energie e quindi salti energetici minori):

$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = 1.88 \text{ eV} \quad \Delta E_{4 \rightarrow 2} = 2.54 \text{ eV} \quad \Delta E_{5 \rightarrow 2} = 2.85 \text{ eV} \quad \Delta E_{\infty \rightarrow 2} = 3.39 \text{ eV}$$

3. Per esaminare il caso del deuterio bisogna prestare attenzione nel ridefinire la costante di Rydberg che compare nella forma dell'energia: essa infatti è diversa da R_{∞} poichè cambia la massa del nucleo: abbiamo che $R = R_{\infty} \frac{\mu}{m}$, con $\mu_{idrogeno} = \left(\frac{1830}{1831}\right)$ e $\mu_{deuterio} = \left(\frac{1830}{1832}\right)$. Questa correzione porta a livelli energetici leggermente diversi rispetto a quelli dell'idrogeno e quindi diverse lunghezze d'onda:

$$\begin{aligned} \lambda_{n \rightarrow 2, \text{deuterio}} &= \frac{hc}{\Delta E_{n \rightarrow 2}} \\ &= - \frac{hc}{R_{\text{deuterio}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right)} \end{aligned}$$

da cui ricavo le varie lunghezze:

$$\lambda_{3 \rightarrow 2} = 0.655 \mu\text{m} \quad \lambda_{4 \rightarrow 2} = 0.485 \mu\text{m} \quad \lambda_{5 \rightarrow 2} = 0.433 \mu\text{m} \quad \lambda_{\infty \rightarrow 2} = 0.364 \mu\text{m}$$

Le lunghezze d'onda del deuterio sono tutte più piccole di circa un nanometro rispetto a quelle dell'idrogeno.

4. Il grafico vedrà affiancate alla serie di Balmer dell'idrogeno quella del deuterio (che è praticamente la stessa traslata di un nanometro) con intensità che è la metà della prima (solo il 33% degli atomi è deuterio, da cui seguono immediati i rapporti delle intensità).

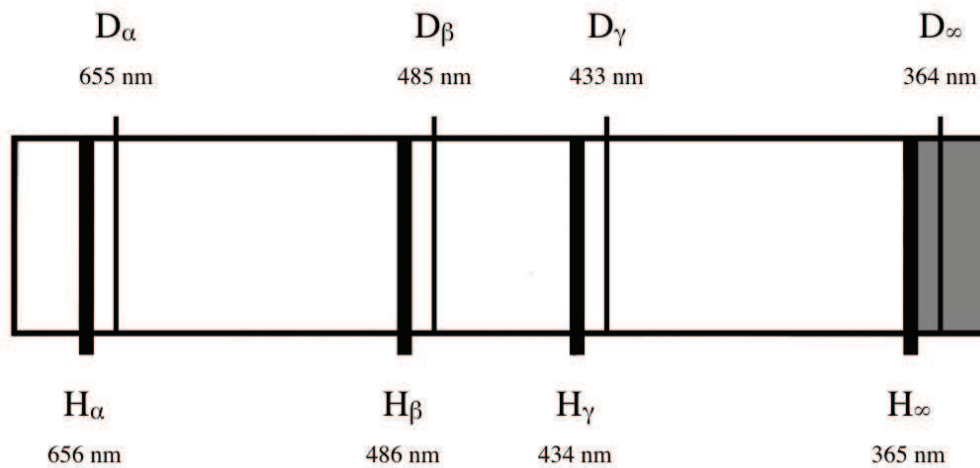


Figura 12: Serie di Balmer dell'idrogeno con impurezze di deuterio pari ad $1/3$ del totale. La differenza di intensità e resa attraverso lo spessore differente delle linee di emissione.

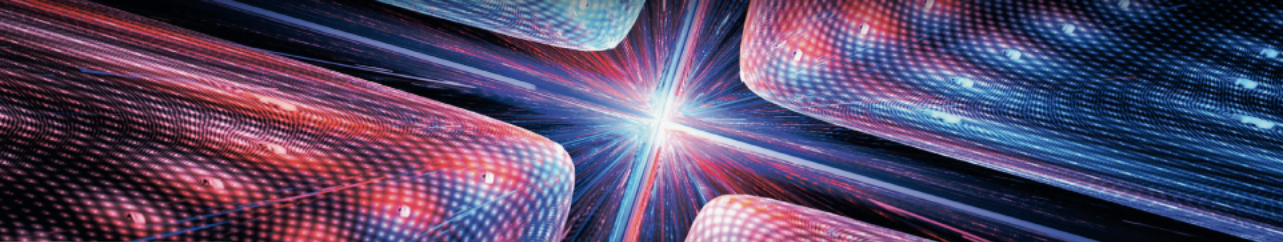
Soluzione 5.4. Essendo la base formata da i due versori χ_+ e χ_- sappiamo che $s = \frac{1}{2}$, per cui paliamo di un fermione.

1. Imponiamo la condizione di normalizzazione:

$$\langle \chi | \chi \rangle = \chi^* \cdot \chi = 1 \quad \rightarrow \quad A \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad \chi = \frac{1}{3}[(1 - 2i)\chi_+ + 2\chi_-]$$

2. Una misura della componente zeta dello spin non può che restituire uno dei possibili autovalori dell'operatore associato alla grandezza. Nel caso in questione abbiamo che i possibili autovalori di S_z sono $\pm \frac{\hbar}{2}$. In particolare si ha che $\mathcal{P}(S_z = +\frac{\hbar}{2}) = |\frac{1}{3}(1 - 2i)|^2 = \frac{5}{9}$ mentre $\mathcal{P}(S_z =$



Franco Ciccacci • Andrea Benfenati • Raffaele Farinaro

Introduzione alla Fisica dei Quanti

Temi d'esame risolti



www.edises.it
info@edises.it



€ 11,00

