



$$V_1 - \frac{V_2}{\epsilon_2} = 10^{25} \frac{e}{r} \quad 10^m \quad \infty$$

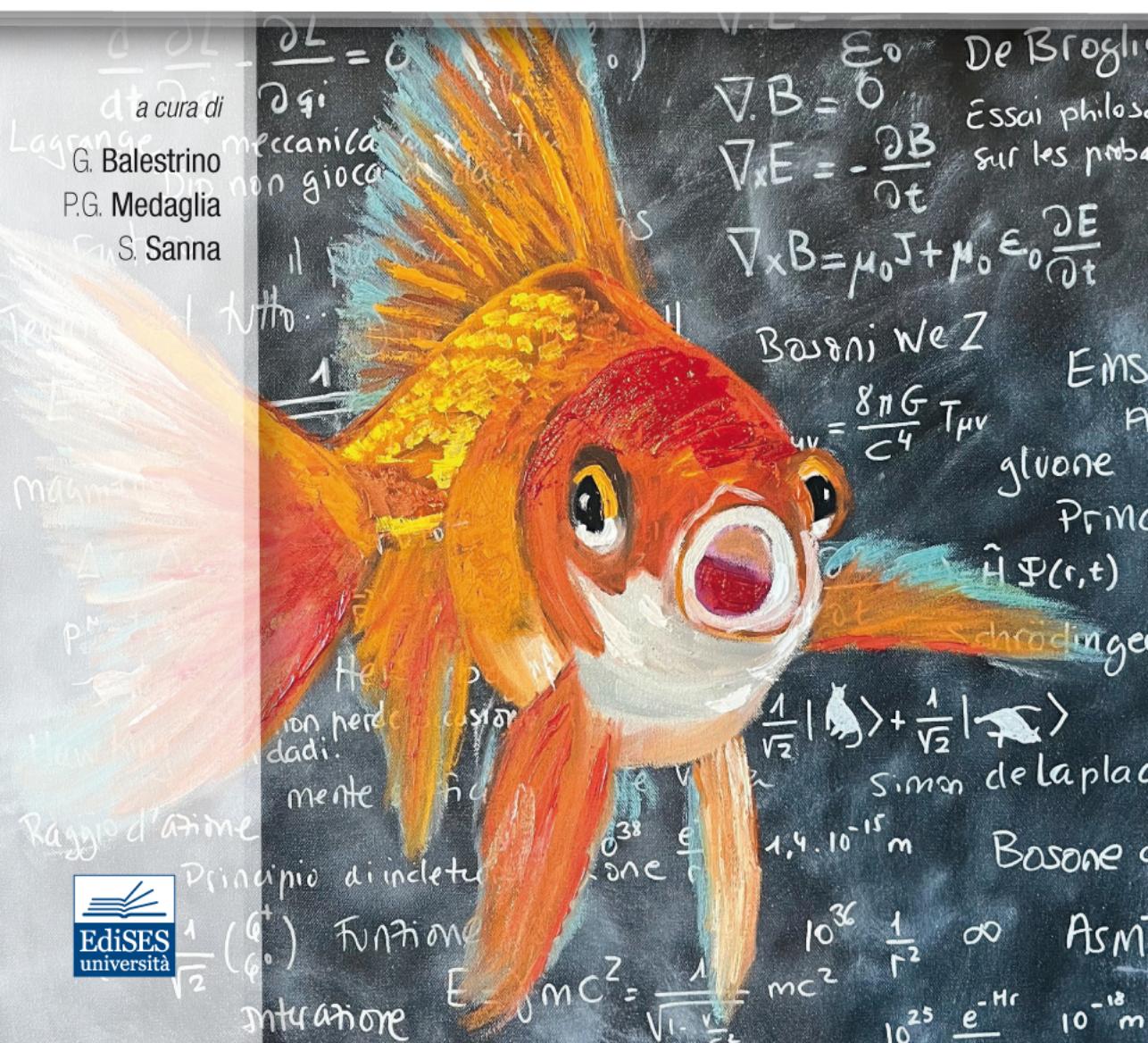
onati
di cose reali: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$ $10^0 \frac{1}{r^2} \infty$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Elettromagnetismo e Onde

Guida alla Soluzione degli Esercizi da

Mazzoldi, Nigro, Voci - Fisica
Mazzoldi, Nigro, Voci - Elementi di Fisica



Accedi ai contenuti digitali

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuoi lettore!**



Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it**
e accedere ai contenuti digitali.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie

Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'accesso ai **contenuti digitali** sarà consentito per **18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito **edises.it**
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*



I contenuti digitali sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere all'**Ebook**, ovvero la versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita Bookshelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

Giuseppe Balestrino • Pier Gianni Medaglia • Simone Sanna

Elettromagnetismo e Onde

Guida alla Soluzione degli **Esercizi** da

Mazzoldi, Nigro, Voci – Fisica
Mazzoldi, Nigro, Voci – Elementi di Fisica



Giuseppe Balestrino, Pier Gianni Medaglia, Simone Sanna

Elettromagnetismo e Onde

Guida alla Soluzione degli Esercizi da Mazzoldi, Nigro, Voci – Fisica

Mazzoldi, Nigro, Voci – Elementi di Fisica

Copyright © 2023, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2027 2026 2025 2024 2023

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

*L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere
il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare
del copyright e resta comunque a disposizione di tutti
gli eventuali aventi diritto.*

In copertina:

Fluttuando nel mio caos - Olio su tela

Isabel Aledo

www.isabelaledo.com

Progetto grafico e Fotocomposizione: V colore di Francesco Omaggio - Pordenone

Stampato presso:

Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

Per conto della

EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edises.it

assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 160 7

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma assistenza.edises.it

Autori

GIUSEPPE BALESTRINO

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

PIER GIANNI MEDAGLIA

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

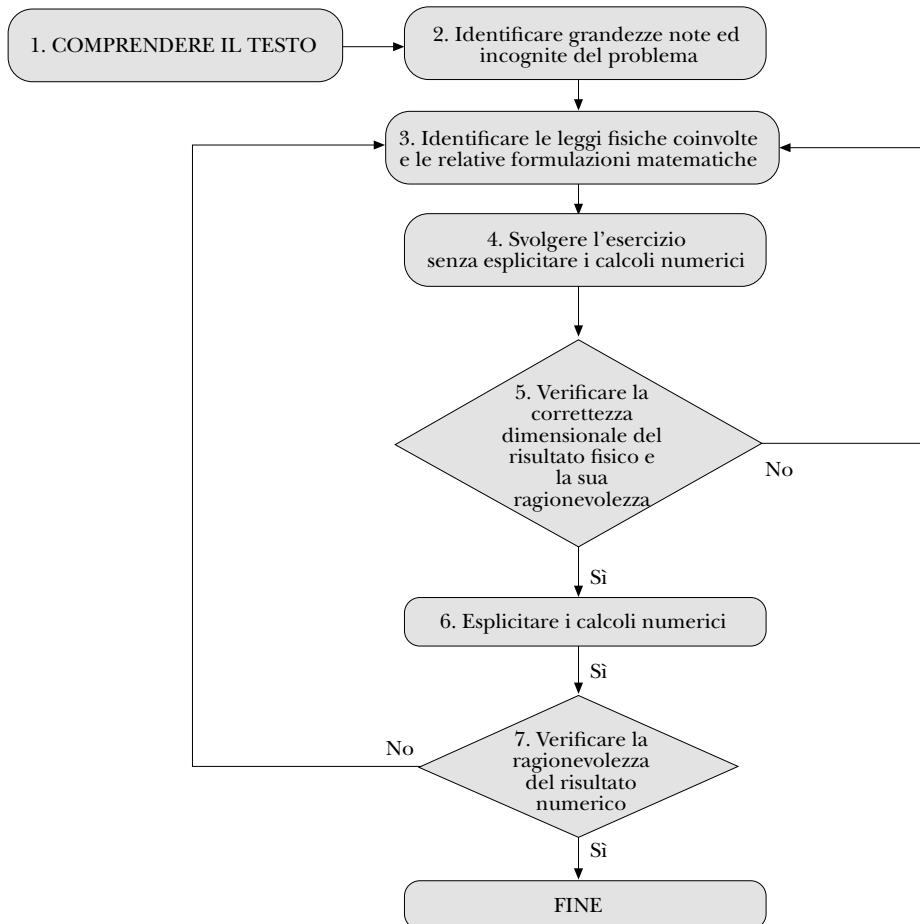
SIMONE SANNA

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Introduzione

Questo testo intende essere una guida alla soluzione degli esercizi di Elettromagnetismo e Onde. Gli esercizi sono ripresi da un testo molto diffuso ed oramai un classico quale il *"Mazzoldi, Nigro e Voci, Elementi di Fisica, Elettromagnetismo e onde"*. Il presente testo utilizza, per la soluzione degli esercizi, i risultati ottenuti dalla teoria dell'elettromagnetismo e delle onde. Pertanto, per ulteriori chiarimenti si rimanda ai testi di teoria.

Nella soluzione degli esercizi di fisica può essere vantaggioso utilizzare l'approccio illustrato nel diagramma di flusso riportato di seguito.



VI Introduzione

Tale approccio prevede cinque obiettivi intermedi e due operazioni di verifica prima di raggiungere il risultato finale. Il primo obiettivo che lo studente si deve porre è quello di comprendere il testo dell'esercizio, ovvero comprendere nei dettagli la struttura del sistema fisico proposto e capire quale sia il risultato finale che ci viene chiesto di ottenere. A volte, qualora non sia fornito già nel testo dell'esercizio, è utile disegnare una rappresentazione schematica del problema.

Il secondo obiettivo è quello di identificare le grandezze i cui valori numerici sono noti e quelle che, invece, devono essere calcolate a partire dalle grandezze note. In alcuni esercizi è possibile che le grandezze note siano ridondanti, ovvero che alcune di esse non siano necessarie per la soluzione del problema. Questa possibilità rispecchia la circostanza che nella soluzione di problemi reali spesso si conosca il valore di un certo numero di grandezze fisiche ma che non si sappia quali, tra queste grandezze, siano quelle strettamente necessarie per arrivare al risultato finale.

Il terzo obiettivo è, probabilmente, quello più complesso: una volta "capito" il problema è necessario individuare le leggi fisiche coinvolte nella soluzione e le loro espressioni matematiche. A volte è possibile seguire vie diverse, e tutte corrette, per risolvere il problema. Per esempio, se dobbiamo calcolare l'energia complessiva dissipata su di una resistenza è possibile calcolare la potenza istantanea dissipata sulla resistenza per effetto Joule e poi integrare tra l'istante iniziale ed un tempo infinito per calcolare l'energia totale dissipata
$$W = \int_0^2 i^2(t) R dt$$
. In alternativa è possibile cercare l'origine dell'energia dissipata sulla resistenza ed applicare il principio di conservazione dell'energia. Se, per esempio, l'energia dissipata era inizialmente tutta immagazzinata in un condensatore che al tempo $t = 0$ è carico a tensione V e che poi si scarica attraverso il resistore, allora l'energia totale dissipata sarà proprio quella inizialmente immagazzinata nel condensatore sotto forma di energia potenziale eletrostatica
$$W = \frac{1}{2} CV^2$$
. In generale, sebbene entrambi gli approcci siano corretti, conviene seguire l'approccio più semplice dal punto di vista del calcolo e che, quindi, minimizza il tempo di svolgimento dell'esercizio e la probabilità di errori durante lo svolgimento stesso: nel caso illustrato l'approccio che utilizza la conservazione dell'energia è quello più rapido e semplice.

A questo punto (quarto obiettivo), a partire dalle espressioni matematiche delle leggi fisiche, è necessario svolgere i calcoli in forma simbolica senza ancora esplicitare i calcoli numerici. Una volta ottenuta la formula risolutiva si può procedere alla verifica della correttezza dimensionale: se, ad esempio, a primo membro della formula risolutiva appare una resistenza elettrica, anche il secondo membro deve avere le dimensioni di una resistenza elettrica. A titolo esemplificativo, se stiamo calcolando la resistenza di un tronco di cono (raggio base minore a , base maggiore b e lunghezza d), costituito da un materiale avente resistività ρ ,
$$R = \rho \frac{ab}{\pi d^3}$$
 è una soluzione *dimensionalmente corretta*, mentre
$$R = \rho \frac{d^3}{\pi ab}$$
 è *dimensionalmente sbagliata* e, quindi, sicuramente fisicamente sbagliata. Tuttavia, la correttezza dimensionale è condizione *necessaria ma non sufficiente* perché il risultato fisico sia veramente corretto.

A valle di una verifica dimensionale, è possibile valutare la *ragionevolezza del risultato* nel caso della soluzione che potrebbe essere corretta
$$R = \rho \frac{ab}{\pi d^3}$$
: se si osserva con attenzione questa formula si nota che, se il cilindro tronco è molto corto ($d \rightarrow 0$), la resistenza diverge, risultato paleamente non verosimile (per il risultato corretto vedi esercizio 5.6). A questo punto, se il risultato non supera entrambe le verifiche, dopo aver attentamente verificato di non aver commesso qualche banale errore algebrico nello svolgimento dell'esercizio, è necessario tornare al punto 3. del diagramma di flusso ed analizzare criticamente le leggi fisiche coinvolte e le relative formulazioni matematiche.

Se, invece, l'esito di tali verifiche è positivo, è possibile passare allo svolgimento dei calcoli numerici facendo molta attenzione a convertire le unità di misura delle varie grandezze fisiche coinvolte in unità di misura dello stesso sistema di misura, in generale il sistema SI. L'ultima rapida verifica da effettuare riguarderà la ragionevolezza del risultato numerico: se, per esempio, l'esercizio chiede di calcolare la velocità di una carica puntiforme di massa m sottoposta a forze elettrostatiche e tale velocità risulta, in base ai nostri calcoli, maggiore della velocità della luce ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$), allora è altamente probabile che il risultato numerico sia errato. Alla stessa conclusione si giunge se, in base al calcolo finale, la carica su un condensatore reale risulta pari a molti Coulomb. A questo punto è molto probabile che vi sia stato un errore nel calcolo finale (attenzione ancora alle unità di misura!). Tuttavia, se, a seguito di attenti controlli, il risultato numerico *non ragionevole* viene confermato, è necessario tornare al punto 3. del diagramma di flusso per verificare con attenzione l'impostazione del problema. Ovviamente, quest'ultima verifica è piuttosto delicata in quanto richiede, da parte dello studente, una buona sensibilità a riguardo del significato intrinseco delle diverse grandezze fisiche.

Indice generale

Introduzione	V
1 Forza elettrostatica, campo elettrostatico	1
2 Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico	25
3 La legge di Gauss	47
4 Conduttori. Dielettrici. Energia elettrostatica.	65
5 Corrente elettrica	103
6 Campo magnetico. Forza magnetica	131
7 Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère. Proprietà magnetiche della materia	155
8 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	179
9 Oscillazioni elettriche. Correnti alternate	219
10 Onde elettromagnetiche	245
11 Riflessione e rifrazione della luce	257
12 Ottica geometrica	283
13 Interferenza	315
14 Diffrazione	337
15 Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia	355
16 Onde meccaniche	377
Alcune costanti fisiche	391

ESERCIZIO 6.11

Due griglie G_1 e G_2 metalliche parallele molto estese distanti $d = 4$ cm, tra le quali è applicata una d.d.p. V ($V_{G_1} > V_{G_2}$), separano due regioni in cui esiste un campo magnetico $B = 0.8$ T uniforme, ortogonale al piano del foglio. All'istante $t = 0$, nel punto A_1 viene iniettato un protone che attraversa la griglia G_1 perpendicolarmente con velocità \mathbf{v}_1 . Dopo un tempo $t = 1.22 \cdot 10^{-7}$ s il protone rientra attraverso G_1 con velocità \mathbf{v}_1 nello stesso verso iniziale in un punto A_2 , distante $h = 5.2$ cm da A_1 . Calcolare: a) la velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 del protone nelle due regioni in cui c'è il campo magnetico e b) la d.d.p. ΔV applicata tra le griglie.

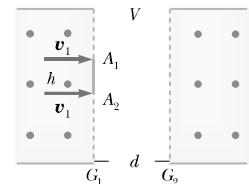


Figura 6.12

Soluzione

La situazione è illustrata schematicamente in figura 6.13. Il campo elettrico generato dalle due griglie, che costituiscono un doppio strato di carica, è confinato nella regione delimitata dalle griglie stesse, al di fuori di tale regione il campo elettrico è nullo. Il protone viene iniettato nel punto A_1 con velocità \mathbf{v}_1 , attraversa la regione di spazio di spessore d dove si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m_p}$, dove m_p e q rappresentano la massa del protone e la sua carica, rispettivamente. In questa regione la velocità del protone aumenta: infatti, il protone ha carica positiva e la forza elettrostatica è concorde al verso del campo elettrico. Il protone attraversa quindi la seconda griglia con una velocità \mathbf{v}_2 maggiore di \mathbf{v}_1 . Il modulo della velocità \mathbf{v}_2 si potrà esprimere come $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}t^* = \mathbf{v}_1 + \frac{q\mathbf{E}}{m_p}t^*$, dove t^* rappresenta il tempo necessario a percorrere la distanza d . Una volta all'interno della regione a destra della seconda griglia, il protone si muoverà, sotto l'effetto della forza di Lorentz, lungo una traiettoria circolare di raggio $r_2 = \frac{m_p \mathbf{v}_2}{qB}$. Dopo aver percorso una semicirconferenza di raggio r_2 in un tempo pari al semiperiodo del moto circolare $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m_p}{qB}$, il protone rientra attraverso la griglia come illustrato in figura 6.13. Nella regione tra le due griglie il protone sarà soggetto di nuovo alla forza elettrostatica: questa volta il protone sarà decelebrato. La velocità con la quale il protone attraversa per la seconda volta la griglia di sinistra sarà ancora \mathbf{v}_1 ed il tempo impiegato per percorrere lo spazio che separa la griglia di destra da quella di sinistra sarà lo stesso t^* . Il tempo totale intercorso tra i due attraversamenti consecutivi della griglia di sinistra sarà pari alla somma del tempo per passare da G_1 a G_2 (t^*) più il tempo per percorrere la semicirconferenza oltre la griglia G_2 (che è sempre $T/2$, dal momento che il periodo dipende da massa, carica e campo magnetico, che non cambiano), più il tempo per tornare da G_2 a G_1 (t^*) più il tempo per percorrere la semicirconferenza a sinistra della griglia G_2 ($T/2$),

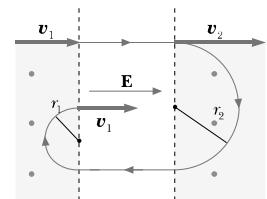


Figura 6.13

da cui:

$$t = 2t^* + T = 2t^* + \frac{2\pi m_p}{qB}$$

$$t^* = \frac{1}{2} \left(t - \frac{2\pi m_p}{qB} \right) = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

140 Capitolo 6 . Campo magnetico. Forza magnetica

La velocità media del protone nel moto ad accelerazione costante tra le due griglie sarà:

$$\frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{d}{t^*} \longrightarrow v_2 + v_1 = \frac{2d}{t^*}$$

Nella regione a sinistra della prima griglia il protone si muoverà ancora lungo una traiettoria circolare ma con un raggio più piccolo $r_1 = \frac{m_p v_1}{qB}$. La distanza h tra i punti A_1 e A_2 sarà (vedi figura 6.13):

$$h = 2r_2 - 2r_1 = 2 \frac{m_p}{qB} (v_2 - v_1)$$

ovvero:

$$v_2 - v_1 = \frac{qBh}{2m_p}$$

A questo punto è possibile calcolare separatamente i valori di v_1 e v_2 :

$$v_2 = \frac{d}{t^*} + \frac{qBh}{4m_p} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \longrightarrow v_1 = \frac{d}{t^*} - \frac{qBh}{4m_p} = 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'aumento dell'energia cinetica del protone nello spostamento dalla prima alla seconda griglia sarà uguale al lavoro compiuto dalla forza elettrostatica:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_p v_2^2 - \frac{1}{2} m_p v_1^2 = q\Delta V$$

Da questa equazione ricaviamo infine la differenza di potenziale tra le griglie:

$$\Delta V = \frac{m_p}{2q} (v_2^2 - v_1^2) = 4.18 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

ESERCIZIO 6.12

Un ciclotrone ha un raggio $R = 0.5$ m e opera con una radiofrequenza accelerante di frequenza $\nu_{RF} = 12$ MHz. Calcolare: a) il valore del campo magnetico B per accelerare deutoni ($m_d = 2m_p$, carica $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) e b) l'energia cinetica massima $E_{k,max}$ dei deutoni.

Soluzione

Per un ciclotrone, il campo magnetico è legato alla pulsazione $\omega_{RF} = 2\pi\nu_{RF}$ del campo elettrico applicato dalla relazione

$$B = \frac{m_d \omega_{RF}}{e} = 1.57 \text{ T}$$

La velocità massima dei deutoni, per un ciclotrone di raggio R sarà

$$v_{max} = \omega_{RF} R = 3.77 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'energia cinetica massima risulterà essere

$$E_{k,max} = \frac{1}{2} m_d v_{max}^2 = 2.25 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 1.4 \text{ GeV.}$$

NOTA - IL CICLOTRONE. Un metodo per accelerare particelle cariche, realizzato nel 1934 da Lawrence e Livingstone, consiste nella ripetuta applicazione di una differenza di potenziale elettrico. La macchina si chiama ciclotrone e funziona secondo lo schema seguente (figura 6.14): tra due cavità metalliche semicilindriche, chiamate D per la loro forma a d maiuscola, viene applicata una forza elettromotrice $V = V_0 \cos \omega_0 t$ che varia nel tempo t con una pulsazione ω_0 ; le cavità sono immerse in un campo magnetico uniforme B ad esse ortogonale.

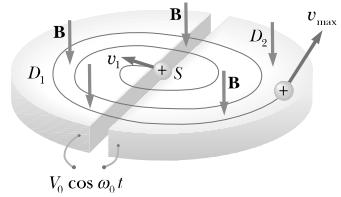


Figura 6.14

La particella di massa m e carica q viene iniettata al tempo $t = 0$ nel sistema dalla sorgente S che si trova al centro del ciclotrone e viene accelerata dalla differenza di potenziale V_0 esistente in quell'istante tra le due D . La particella entra in D_1 , al cui interno il campo elettrico è sostanzialmente nullo, e viene deviata dalla forza di Lorentz compiendo una semicirconferenza di raggio $r_1 = \frac{mv_1}{qB}$ dove v_1 è la velocità acquisita a seguito dell'applicazione della forza elettrostatica. Tale velocità si può facilmente calcolare considerando che l'energia cinetica finale della particella è pari al lavoro del campo elettrico presente tra le due D : $\frac{1}{2}mv_1^2 = qV_0$.

Dopo un tempo $t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m}{qB}$ la particella esce da D_1 per entrare in D_2 . Se la pulsazione ω_0 della forza elettromotrice è proprio $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1} = \frac{qB}{m}$, nel tempo t_1 la differenza di potenziale tra D_1 e D_2 si sarà invertita assumendo il valore $-V_0$; la particella carica subisce una seconda accelerazione tra D_1 e D_2 tale che

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_0 = 2qV_0$$

Una volta entrata in D_2 la particella compie una semicirconferenza di raggio $r_2 = \frac{mv_2}{qB} > r_1$ nel tempo

$$t_2 = \frac{\pi r_2}{v_2} = \frac{\pi m}{qB} = t_1$$

identico al precedente (il tempo di percorrenza di un'orbita circolare in campo magnetico non dipende dalla velocità della particella). Di conseguenza, il periodo per un giro completo sarà

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2\pi m}{qB}$$

142 Capitolo 6 • Campo magnetico. Forza magnetica

Se intanto nel tempo t_2 la radiofrequenza ha cambiato di nuovo segno, il processo di accelerazione si ripete tra D_2 e D_1 e così via.

La condizione di funzionamento è dunque che il tempo t impiegato a percorrere mezzo giro sia eguale al semiperiodo della forza elettromotrice variabile, ovvero:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1} = \frac{qB}{m}$$

Il processo continua finché lo ione raggiunge il raggio massimo R , determinato dalle dimensioni del magnete del ciclotrone. A tale raggio corrisponde la velocità massima dello ione

$$v_{max} = \omega_0 R = \frac{qBR}{m}$$

e quindi l'energia cinetica massima

$$E_{k,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}.$$

ESERCIZIO 6.13

Con i dati dell'Esercizio 6.12, nell'ipotesi che tra le due D del ciclotrone venga applicata una d.d.p. $V = V_0 \cos(\omega_{RF}t)$ con $V_0 = 1.4 \cdot 10^4$ V e $\omega_{RF} = 7.53 \cdot 10^7$ s⁻¹, calcolare: a) il numero N di giri compiuto dai deutoni nel ciclotrone durante un ciclo di accelerazione e b) la durata t del ciclo stesso.

Soluzione

Per ogni ciclo l'energia del deutone aumenta di $2eV_0$. L'energia massima è pari a

$$E_{k,max} = \frac{e^2B^2R^2}{2m_d}$$

Il numero complessivo di cicli necessari per raggiungere l'energia massima sarà dunque

$$N = \frac{E_{k,max}}{2eV_0} = \frac{eB^2R^2}{4V_0m_d} = 500$$

La durata del singolo ciclo sarà pari a

$$T = \frac{2\pi m_d}{eB} = 8.34 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Infine, il tempo totale impiegato a raggiungere l'energia massima sarà uguale al periodo T necessario per completare un ciclo moltiplicato il numero totale di cicli

$$t_{tot} = NT = 4.17 \mu\text{s}$$

Per ottenere questo risultato abbiamo sfruttato la circostanza che la distanza tra le due D del sincrotrone è molto piccola in modo tale che si possa trascurare il tempo necessario a percorrere lo spazio che le separa.

ESERCIZIO 6.14

Quando un nastro conduttore di spessore $h = 15$ mm, attraversato da una corrente $i = 12$ A, viene posto in un campo magnetico $B = 1.8$ T si rivela una tensione di Hall $\mathcal{E}_H = 0.122 \mu\text{V}$. Calcolare il numero di portatori di carica per unità di volume n_e .

Soluzione

In questo esercizio l'effetto Hall viene utilizzato per determinare la concentrazione n dei portatori di carica. Si supponga di avere un conduttore con sezione $\Sigma = hb$ percorso da corrente i lungo la direzione x come in figura 6.15. Possiamo quindi scrivere la densità di corrente come:

$$J = \frac{i}{hb} u_x = ne v_d$$

dove v_d è la velocità di deriva. Applicando un campo magnetico lungo la direzione y , sui portatori di carica agisce una forza di Lorentz pari a $F = ev_d \times B$. Pertanto, possiamo definire un campo elettromotore detto campo di Hall

$$E_H = \frac{F}{e} = v_d \times B = \frac{J}{ne} \times B$$

dove e rappresenta la carica dei portatori ed n la loro concentrazione.

Il campo E_H , perpendicolare alla velocità di deriva, causa una deflessione dei portatori di carica provocando l'accumulo di cariche di segno opposto sulle facce ortogonali all'asse z . Il doppio strato di carica che così viene generato, genera a sua volta un campo E_{el} di verso opposto a E_H . Quando sarà stata raggiunta la configurazione di equilibrio, avremo che: $E_H + E_{el} = 0$. In queste condizioni, tra i due lati del nastro a distanza h si manifesta una f.e.m. (tensione di Hall) pari a

$$\mathcal{E}_H = E_H h$$

Essendo J e B ortogonali tra di loro, possiamo scrivere il modulo della tensione di Hall come:

$$\mathcal{E}_H = E_H h = \frac{J}{ne} Bh = \frac{i}{neb} B$$

Da quest'ultima espressione si può calcolare il numero dei portatori di carica:

$$n_e = \frac{iB}{\mathcal{E}_H eb} = 7.38 \cdot 10^{28} \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}.$$

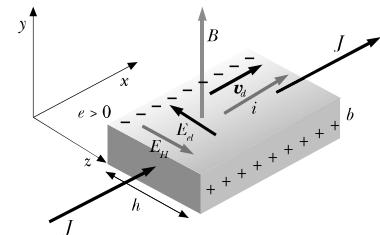


Figura 6.15

ESERCIZIO 6.15

Una lamina metallica quadrata di rame, con le dimensioni riportate in figura 6.16, è percorsa da una corrente $i = 10 \text{ A}$ ed è sottoposta all'azione di un campo magnetico $B = 1.5 \text{ T}$. Calcolare: a) la velocità di deriva v_d degli elettroni e b) la f.e.m. di Hall \mathcal{E}_H . La densità di elettroni liberi nel rame è $n_e = 8.48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

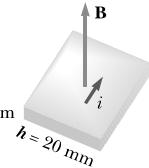

Soluzione

Figura 6.16

La densità di corrente associata alla corrente i che scorre lungo la lamina sarà pari a

$$J = \frac{i}{hb} = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

dove h è la larghezza della lamina, b il suo spessore. Questa relazione consente di calcolare il valore della velocità di deriva degli elettroni, conoscendone la carica e la concentrazione:

$$v_d = \frac{J}{n_e e} = 3.7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nelle condizioni geometriche descritte nella figura 6.16, per effetto della forza di Lorentz che agisce sugli elettroni, si genera un campo elettrico trasversale detto campo di Hall il cui valore è:

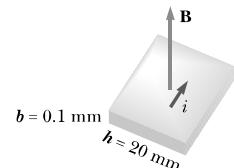
$$E_H = \frac{JB}{n_e e}$$

Tale campo elettrico genera, a sua volta, una forza elettromotrice trasversale pari al valore del campo di Hall moltiplicato per la larghezza della lamina h

$$\mathcal{E}_H = E_H h = \frac{JB}{n_e e} h = 1.1 \mu\text{V}.$$

ESERCIZIO 6.16

Una lamina di rame ($n_e = 8.48 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$) ha le dimensioni riportate in figura 6.17 ed è percorsa da una corrente $i = 20 \text{ A}$. Essa viene utilizzata come sonda per la misura di campi magnetici. Calcolare i valori di B per i valori misurati della f.e.m. di Hall: $\mathcal{E}_1 = 1 \mu\text{V}$, $\mathcal{E}_2 = 2 \mu\text{V}$ e $\mathcal{E}_3 = 2.5 \mu\text{V}$.


Soluzione

Avendo chiamato h la larghezza della lamina e b il suo spessore, la densità di corrente e la velocità di deriva possono essere espresse come:

$$J = \frac{i}{hb} = 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}; \quad v_d = \frac{J}{n_e e} = 7.37 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Figura 6.17

Il valore del raggio del diottro è negativo e, secondo le convenzioni adottate, questo implica che il diottro sia concavo.

ESERCIZIO 12.18

Su un foglio di un quotidiano è appoggiata una lastra di vetro ($n = 1.5$) di spessore $h = 2$ cm. Calcolare a quale distanza apparirà il foglio se osservato in direzione normale al foglio stesso.

Soluzione

L'osservatore legge il giornale guardando lungo la normale e attraverso la lastra di vetro (figura 12.24). Poiché il diametro della cornea è molto minore della distanza tra l'occhio ed il giornale, soltanto quei raggi che sono molto vicini alla normale potranno superare la cornea e contribuire a formare un'immagine dell'oggetto S sulla retina. Questa condizione implica che, rispetto alla superficie di separazione vetro aria, sia l'angolo di incidenza α che l'angolo di rifrazione α' siano molto piccoli.

Per la rifrazione vale la legge

$$\sin \alpha' = n \sin \alpha$$

Inoltre, essendo α e α' molto piccoli, abbiamo $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ e $\sin \alpha' = n \sin \alpha \approx n \tan \alpha$.

In figura 12.25 sono mostrati due raggi emessi dalla sorgente S che vengono rifratti alla superficie di separazione tra vetro ed aria. L'immagine virtuale Q si forma sul prolungamento ideale dei raggi rifratti, ad una profondità h' . Se consideriamo il triangolo SOO' possiamo scrivere $\tan \alpha = \frac{\overline{OO'}}{h} \approx \sin \alpha$. Analogamente, per il triangolo QOO' , possiamo scrivere $\tan \alpha' = \frac{\overline{OO'}}{h'} \approx \sin \alpha'$. Facendo il rapporto tra queste due relazioni otteniamo

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = n \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \approx \frac{h}{h'}$$

da cui $h' = \frac{h}{n} = 1.33$ cm.

Allo stesso risultato si poteva giungere utilizzando la legge dei diottri $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$. In questo caso il diottro è rappresentato dalla superficie di separazione tra vetro ed aria. La superficie di separazione è piana, il che corrisponde ad un raggio di curvatura infinito ($R = \infty$). Il punto S rappresenta l'oggetto e si trova ad una distanza h dal diottro. La posizione dell'immagine Q si trova ad una distanza h' dal diottro. Infine $n_1 = n$ ed $n_2 = 1$. In queste condizioni l'equazione del diottro diviene

$$\frac{n}{h} + \frac{1}{h'} = 0 \quad \longrightarrow \quad h' = -\frac{h}{n} = -1.33 \text{ cm}$$

Il valore negativo di h' , in accordo con la convenzione utilizzata, indica che l'immagine virtuale si forma all'interno del vetro, prima del diottro (superficie di separazione vetro/aria).

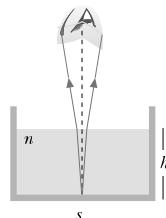


Figura 12.24

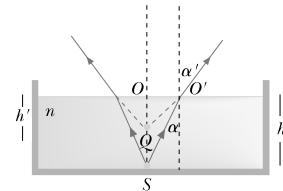


Figura 12.25

ESERCIZIO 12.19

Una sferetta colorata di 1.5 cm di diametro è posta sul fondo di un recipiente pieno di un liquido ($n = 1.42$). Osservandola normalmente la sferetta appare ad una profondità $h' = 35.2$ cm. Calcolare la profondità h del recipiente e il diametro apparente della sferetta.

Soluzione

Seguendo il medesimo ragionamento seguito nell'Esercizio 12.18 possiamo scrivere l'equazione del diottro costituito dalla superficie di separazione tra liquido ed aria. Il valore di h' , in base alle convenzioni adottate, sarà negativo.

$$\frac{n}{h} + \frac{1}{h'} = 0 \quad \longrightarrow \quad h = -nh' = 50 \text{ cm}$$

L'ingrandimento sarà

$$I = -\frac{nh'}{h} = 1$$

L'immagine virtuale è diritta ed ha le stesse dimensioni dell'oggetto.

ESERCIZIO 12.20

Una lastra di vetro ($n_3 = 1.6$) di spessore $h = 5 \text{ cm}$ è posta sul fondo di un acquario profondo $p = 12 \text{ cm}$. Calcolare lo spessore apparente h' della lastra.

Soluzione

Ancora una volta ragioniamo in analogia a quanto fatto negli Esercizi 12.18 e 12.19. Questa volta, però abbiamo due diottri che agiscono insieme: il primo è costituito dalla superficie di separazione vetro/acqua, il secondo dalla superficie di separazione acqua/aria. Per entrambi i diottri $R = \infty$. Per prima cosa consideriamo l'effetto che il diottro vetro/acqua ha sull'immagine del fondo della lastra di vetro utilizzando l'equazione del diottro

$$\frac{n_3}{h} + \frac{1}{q_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_1 = -\frac{n_3 h}{n_2} = -4.16 \text{ cm}$$

q_1 rappresenta la profondità dell'immagine rispetto all'interfaccia vetro/acqua, il suo valore è negativo in base alle convenzioni adottate perché l'immagine si forma prima del diottro vetro/acqua. L'immagine del fondo del vetro si forma 0.84 cm al di sopra del fondo reale della lastra di vetro. Tale immagine funge da oggetto per il secondo diottro acqua/aria. La distanza apparente del fondo della lastra dalla superficie di separazione acqua/aria è $p' = p - h - q_1 = 11.16 \text{ cm}$. Anche in questo caso possiamo utilizzare l'equazione del diottro per calcolare la posizione apparente del fondo del vetro vista da un osservatore in aria

$$\frac{n_2}{p'} + \frac{1}{q_2} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_2 = -\frac{p'}{n_2} = -8.39 \text{ cm}$$

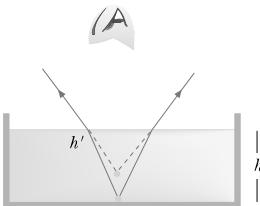


Figura 12.26

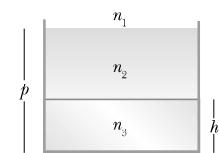


Figura 12.27

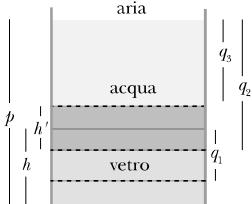


Figura 12.28

In definitiva q_2 rappresenta la profondità apparente della lastra per un osservatore in aria.

A questo punto è necessario valutare l'effetto del diottro acqua/aria sulla posizione apparente della superficie (superiore) della lastra di vetro. Ancora una volta scrivendo l'equazione del diottro si ottiene

$$\frac{n_2}{p-h} + \frac{1}{q_3} = 0 \longrightarrow q_3 = -\frac{p-h}{n_2} = -5.26 \text{ cm}$$

L'immagine della superficie della lastra di vetro si forma 5.26 cm sotto la superficie dell'acqua. Lo spessore apparente della lastra sarà infine

$$h' = |q_2| - |q_3| = 3.13 \text{ cm.}$$

ESERCIZIO 12.21

Quattro lenti sottili di vetro ($n = 1.5$) hanno rispettivamente i seguenti raggi di curvatura: a) $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = -20 \text{ cm}$; b) $R_1 = \infty$, $R_2 = -10 \text{ cm}$; c) $R_1 = -10 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$; d) $R_1 = \infty$, $R_2 = 20 \text{ cm}$. Fare uno schizzo di ciascuna lente, calcolando la sua distanza focale f e il suo potere convergente P (in aria). Verificare che ruotando la lente di 180° la focale non varia.

Soluzione

La distanza focale della lente, con $n_1 = 1$ (lente in aria), è

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Il potere convergente P è pari a $1/f$.

Ruotare la lente di 180° implica cambiare i raggi di curvatura secondo la regola $R_1 \rightarrow -R_2$ e $R_2 \rightarrow -R_1$.

Di conseguenza la distanza focale della lente ruotata di 180° sarà

$$f' = \frac{1}{n-1} \frac{(-R_2)(-R_1)}{-R_1 + R_2} = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

identica a quella della lente nella posizione originaria.

Per quanto riguarda le lenti indicate nel testo dell'esercizio, utilizzando la formula per il calcolo della lunghezza focale sopra riportata, si ottiene:

- a) $f = +1.33 \text{ cm}$, $P = 1/f = +7.5 \text{ diottrie (m}^{-1}\text{)}$, lente biconvessa convergente;
- b) $f = +20 \text{ cm}$, $P = +5 \text{ diottrie}$, lente piano-convessa convergente;
- c) $f = -10 \text{ cm}$, $P = -10 \text{ diottrie}$, lente biconcava divergente;
- d) $f = -40 \text{ cm}$, $P = -2.5 \text{ diottrie}$, piano-concava divergente.

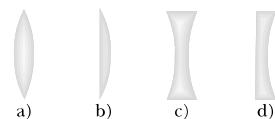


Figura 12.29

296 Capitolo 12 • Ottica geometrica

Si presti attenzione alla circostanza che il potere convergente di una lente ($P = \frac{1}{f}$) è misurato in diottrie o m^{-1} . Pertanto, prima di invertire la distanza focale per calcolare il potere convergente della lente è necessario convertire la distanza focale in m.

NOTA SULLE CONVENZIONI PER LE LENTI SOTTILI

- a) la luce incidente proviene sempre da sinistra;
- b) la distanza p di un oggetto P dalla lente è positiva se l'oggetto si trova a sinistra della lente, negativa se l'oggetto è a destra della lente;
- c) la distanza q dell'immagine Q dalla lente è positiva se l'immagine si trova a destra della lente, negativa se l'immagine è a sinistra;
- d) il raggio di curvatura R della superficie sferica è positivo se il centro di curvatura si trova a destra della lente, negativo se il centro di curvatura è a sinistra della lente (figura 12.30);
- e) le distanze y dall'asse della lente sono positive per punti al di sopra dell'asse, negative per punti al di sotto, sia per gli oggetti che per le immagini.

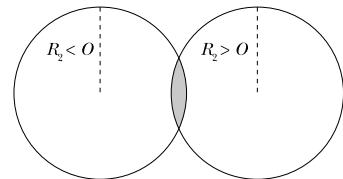


Figura 12.30

ESERCIZIO 12.22

Tre lenti sottili di vetro ($n = 1.5$) hanno rispettivamente i seguenti raggi di curvatura: a) $R_1 = 20 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$; b) $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$; c) $R_1 = -10 \text{ cm}$, $R_2 = -20 \text{ cm}$. Fare uno schizzo di ciascuna lente, calcolando la sua focale f e il suo potere convergente P .

Soluzione

Il profilo delle lenti è mostrato in figura 12.31 dove è stata utilizzata per il disegno la regola per R introdotta nella nota all'Esercizio 12.21.

Utilizzando la formula $f = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ per la distanza focale otteniamo

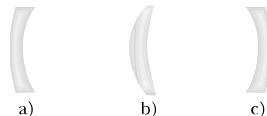


Figura 12.31

- a) $f = -40 \text{ cm}$, $P = -2.5$ diottrie, lente divergente;
- b) $f = +40 \text{ cm}$, $P = +2.5$ diottrie, lente convergente;
- c) $f = -40 \text{ cm}$, $P = -2.5$ diottrie, lente divergente.

ESERCIZIO 12.23

Per realizzare due lenti sottili simmetriche si usa un vetro d'indice di rifrazione $n = 1.6$. Calcolare il raggio di curvatura R se la distanza focale in aria è rispettivamente $f_1 = 5 \text{ cm}$ e $f_2 = -5 \text{ cm}$.

Soluzione

Per una lente sottile simmetrica $R_1 = -R_2 = R$. La distanza focale sarà quindi

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R}{2} \longrightarrow R = 2(n-1)f$$

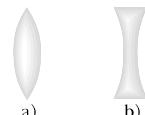


Figura 12.32

ESERCIZIO 15.26

Una pallottola, di lunghezza $l = 2$ cm e massa $m = 40$ g, viaggia ad una velocità $v = 1.5 \cdot 10^3$ m/s. Calcolare: la lunghezza d'onda di de Broglie λ_p della pallottola e a quante lunghezze d'onda λ_p è pari la lunghezza l della pallottola.

Soluzione

La "lunghezza d'onda" di una pallottola, in base alla relazione di de Broglie, è pari a:

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{mv} = 1.10 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

da cui

$$l = 2 \cdot 10^{33} \lambda_p$$

Come si vede la "lunghezza d'onda" della pallottola è estremamente piccola, anche se paragonata alle dimensioni del nucleo atomico. In queste condizioni non potrebbe essere concepito alcun esperimento per misurare una λ_p di de Broglie come quella calcolata: la pallottola è da considerarsi, a tutti gli effetti, una particella classica il cui comportamento è descritto dalle leggi della meccanica classica.

ESERCIZIO 15.27

Un fascio di elettroni di energia cinetica $E_k = 65$ eV viene diffratto da un cristallo, come nel caso dei raggi X. Il massimo del primo ordine viene osservato per un angolo radente $\theta = 45^\circ$. Calcolare la distanza d tra i piani del cristallo.

Soluzione

La lunghezza d'onda del fascio di elettroni con energia pari a E_k (eV) è data dalla solita espressione:

$$\lambda_e = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} = 1.52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Possiamo calcolare la distanza d tra i piani del cristallo utilizzando la legge di Bragg. Abbiamo interferenza costruttiva quando sono verificate le condizioni di Bragg

$$2d \sin \theta = n \lambda_e, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si presti attenzione alla circostanza che nella formula di Bragg θ rappresenta l'angolo di radenza, ovverosia l'angolo che il fascio incidente forma con il piano cristallografico. Pertanto, al primo ordine ($n = 1$), per $\theta = 45^\circ$ abbiamo

$$d = \frac{\lambda_e}{2 \sin \theta} = 1.075 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

ESERCIZIO 15.28

Un fascio di elettroni incide nel vuoto su due fenditure parallele molto strette, distanti $d = 0.05 \mu\text{m}$; la figura d'interferenza è osservata su uno schermo distante $L = 20$ cm dal piano del-

le fenditure. La distanza tra due frange chiare adiacenti risulta 0.6 mm. Calcolare la velocità v_e degli elettroni.

Soluzione

L'esperimento a doppia fenditura o esperimento di Young con particelle quantistiche è, probabilmente, uno dei più significativi esperimenti della fisica moderna. Richard Feynman, eminente fisico teorico statunitense del secolo scorso, era solito dire che questo esperimento "...sta al cuore della meccanica quantistica. In realtà ne contiene l'unico mistero."

In figura viene mostrato l'esperimento a doppia fenditura. Nel primo caso (in alto) viene utilizzata radiazione elettromagnetica che, dopo essere passata attraverso le due fenditure, forma una immagine d'interferenza sullo schermo. Questo fenomeno è stato ampiamente discusso nei capitoli 13 e 14. Nel caso intermedio viene considerato un flusso di particelle macroscopiche, ad esempio palle da tennis lanciate in rapida successione da un tennista.

Infine, in basso viene inviato verso le fenditure un flusso di particelle quantistiche come gli elettroni.

Nel caso intermedio sullo schermo non è visibile alcuna figura di interferenza ma solo due massimi, approssimativamente in corrispondenza delle due fenditure. Questo risultato non è sorprendente in quanto, come abbiamo visto nell'Esercizio 15.26, gli oggetti macroscopici, quali sono a tutti gli effetti le palline da tennis, obbediscono alle leggi della meccanica classica: essi possiedono di fatto una lunghezza d'onda di de Broglie talmente piccola da rendere impensabile la realizzazione di un esperimento per mettere in mostra gli aspetti ondulatori (interferenza, diffrazione, ecc.). Nel caso degli elettroni, invece, appare sullo schermo una evidente figura di interferenza che è necessariamente legata alla natura ondulatoria degli elettroni. Le proprietà dell'immagine di interferenza sullo schermo possono essere completamente spiegate tramite le espressioni sviluppate nei capitoli 13 e 14 (e che qui semplicemente richiameremo) a patto di attribuire agli elettroni una lunghezza d'onda pari alla lunghezza d'onda di de Broglie.

Nell'esperimento di Young a doppia fenditura le condizioni per i massimi ed i minimi d'intensità nella figura di interferenza sono

$$\text{interferenza costruttiva: } x_{\max} = m \frac{\lambda L}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

$$\text{interferenza distruttiva: } x_{\min} = (2m+1) \frac{\lambda L}{2d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

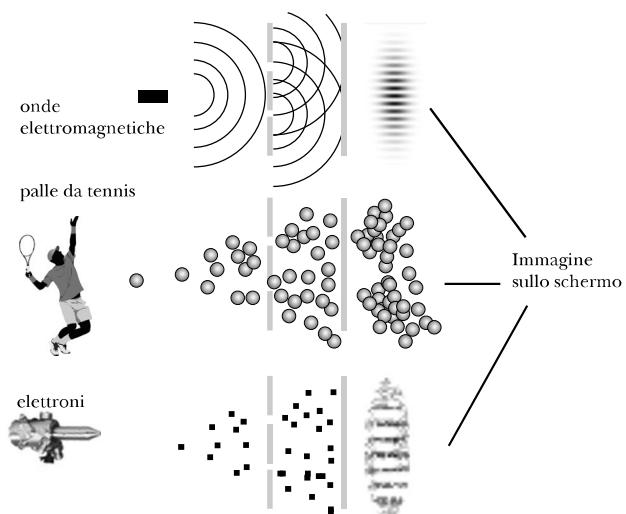


Figura 15.5

dove x rappresenta la posizione dei massimi (o minimi) misurata dal centro dello schermo, L è la distanza tra il piano contenente le fenditure e il piano dello schermo, d la distanza tra le fenditure e λ

374 Capitolo 15 · Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia

la lunghezza d'onda della radiazione. Per ulteriori dettagli lo studente può fare riferimento ai capitoli 13 e 14.

Nel caso presente, λ rappresenterà la lunghezza d'onda di de Broglie degli elettroni.

Pertanto, detta Δx la distanza tra due frange chiare adiacenti (di indice m e $m + 1$), si ha:

$$\Delta x = x_{max,m+1} - x_{max,m} = (m+1)\frac{\lambda L}{d} - m\frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d} \longrightarrow \lambda = d\frac{\Delta x}{L}$$

da cui, utilizzando la relazione di de Broglie, otteniamo

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hL}{d\Delta x}$$

Infine, la velocità degli elettroni sarà

$$v_e = \frac{p}{m_e} = \frac{hL}{d\Delta x m_e} = 4.9 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

ESERCIZIO 15.29

Un fascio di neutroni termici di velocità $v = 10^3 \text{ m/s}$ incide su un sistema di due fenditure parallele distanti $d = 1 \text{ mm}$; i rivelatori sono posti a $L = 10 \text{ m}$ di distanza dal piano delle fenditure. Calcolare la distanza Δx tra due punti adiacenti in cui non si osservano neutroni.

Soluzione

Questo esercizio è analogo al precedente, con la differenza che i corpuscoli da trattare sono neutroni, e che dobbiamo valutare la distanza tra i minimi.

La lunghezza d'onda associata al fascio di neutroni è data dalla relazione di de Broglie

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{h}{m_n v} = 3.97 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Pertanto Δx ovvero la distanza tra due minimi adiacenti della figura di interferenza in cui non si osservano neutroni, sarà (vedi Esercizio 15.28) pari a

$$\Delta x = x_{min,m+1} - x_{min,m} = (2m+3)\frac{\lambda L}{2d} - (2m+1)\frac{\lambda L}{2d} = \frac{\lambda L}{d} = 3.97 \mu\text{m}.$$

ESERCIZIO 15.30

Un fascio di neutroni con energia cinetica $E_k = 50 \text{ MeV}$ incide su un sottile foglio di grafite. Misurando il numero di neutroni diffusi da urti con nuclei di carbonio in funzione dell'angolo θ tra la direzione uscente e la direzione incidente si trova una tipica figura di diffrazione con il primo minimo per $\sin\theta = 0.822$. Calcolare il raggio R del nucleo di carbonio.

Soluzione

Quando il fascio di neutroni passa attraverso una apertura circolare forma, in condizioni di Fraunhofer, una figura di diffrazione costituita da un disco luminoso centrale circondato da una serie di corone circolari. I neutroni sono particelle prive di carica elettrica, pertanto la loro interazione con gli elettroni che circondano il nucleo è molto debole. Invece il loro momento magnetico interagisce significativamente con il momento magnetico del nucleo atomico. Pertanto, è ragionevole pensare che i neutroni siano diffusi dai nuclei di carbonio. L'esperimento è mostrato in figura 15.6: un fascio di neutroni investe il nucleo di un atomo di carbonio di diametro D , viene diffuso e forma un'immagine di diffrazione su di uno schermo a distanza L dall'atomo di carbonio ($L \gg D$). Ciò premesso, l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità (anello scuro nell'immagine), si ottiene dalla relazione:

$$\sin \theta = 0.61 \frac{\lambda_n}{R}$$

dove $R = D/2$ è il raggio del nucleo atomico del carbonio. Questa espressione, che si ricava tramite una laboriosa dimostrazione che qui non ripetiamo, si può trovare nei testi di teoria della diffrazione.

La lunghezza d d'onda dei neutroni sarà data dall'espressione già ricavata nell'Esercizio 15.24

$$\lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2m_n E_k}} = 4.05 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Utilizzando tale valore della lunghezza d'onda del neutrone otteniamo il valore del raggio del nucleo dell'atomo di carbonio

$$R = 0.61 \frac{\lambda_n}{\sin \theta} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

In conclusione si osservi che la scelta di neutroni con energia $E_k = 5 \text{ MeV}$, e quindi $\lambda_n = 4.05 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, non è casuale, dovendo la lunghezza d'onda del fascio di corpuscoli incidenti essere confrontabile con le dimensioni dei nuclei per un efficace effetto di diffrazione.

ESERCIZIO 15.31

Una particella quantistica confinata a muoversi lungo l'asse x è rappresentata da una funzione d'onda indipendente dal tempo $\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{B}}$, con A costante e B pari a 10^{-18} m^2 . Si stimi l'indeterminazione sulla posizione della particella e l'indeterminazione sulla sua quantità di moto.

Soluzione

La densità di probabilità di trovare la particella quantistica in un punto di ascissa x è proporzionale al modulo quadro della funzione d'onda $\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{B}}$:

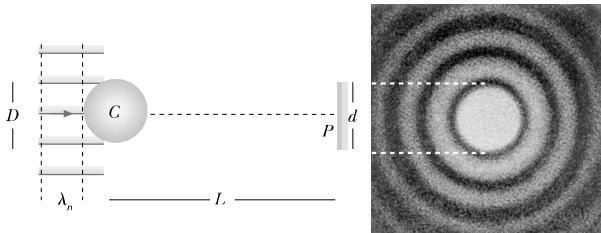


Figura 15.6

$$P(x) \propto |\Psi(x)|^2 = A^2 e^{-\frac{2x^2}{B}}$$

Tale funzione rappresenta una distribuzione di tipo gaussiano la cui larghezza a mezza altezza è:

$$\Delta x = \sqrt{B/2} = 7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Δx rappresenta anche l'indeterminazione sulla posizione della particella, nel senso che la probabilità di trovare la particella è alta soltanto nell'intervallo $-\frac{1}{2}\sqrt{B/2} \leq x \leq +\frac{1}{2}\sqrt{B/2}$ vedi figura 15.7.

Pertanto, in base al principio di Heisenberg, l'indeterminazione sulla quantità di moto sarà

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-24} \text{ N s.}$$

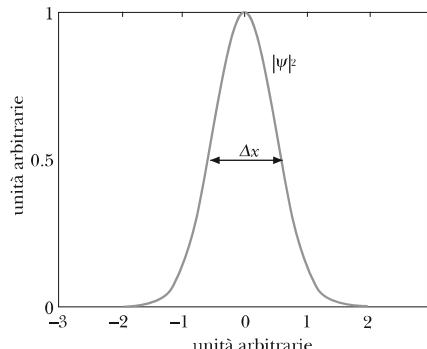


Figura 15.7

ESERCIZIO 15.32

Un elettrone alla temperatura dello zero assoluto $T = 0 \text{ K}$ si trova in una cella cubica di lato $2L = 1 \mu\text{m}$ all'interno della quale la sua posizione è completamente indeterminata. Calcolare l'energia cinetica E_k dell'elettrone, derivante da questa indeterminazione. In base a questa considerazione un elettrone, anche allo zero assoluto, ha un'energia E_k non nulla. Questo risultato della meccanica ondulatoria prende il nome di energia del punto zero.

Soluzione

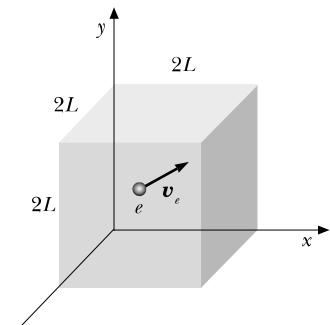
L'indeterminazione per ciascun grado di libertà sulla quantità di moto è

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2L \longrightarrow \Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \frac{\hbar}{2L}$$

Se la quantità di moto è indeterminata, anche l'energia dell'elettrone è indeterminata.

L'energia massima associata a tale indeterminazione è

$$E_e = \frac{1}{2m_e} [\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2] = \frac{3}{2m_e} \left[\frac{\hbar}{2L} \right]^2 = 2.9 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$



In altri termini possiamo affermare che, anche alla temperatura $T = 0 \text{ K}$, l'elettrone possiede un'energia detta di punto zero. Questo è un effetto puramente quantistico che non trova riscontro nella fisica classica dove l'energia termica di un elettrone vale $\frac{3}{2}K_B T$ e tende a zero per T che tende a 0 K.

Figura 15.8



Elettromagnetismo e Onde

Guida alla Soluzione degli Esercizi da

Mazzoldi, Nigro, Voci - Fisica
Mazzoldi, Nigro, Voci - Elementi di Fisica

Accedi ai **contenuti digitali** ➤ **Espandi** le tue risorse ➤ con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai **contenuti digitali**.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.