

Comprende



versione **Ebook**  
e **Software**  
di simulazione

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

# Elementi di Fisica

## Meccanica e Termodinamica

**III edizione**

a cura di

Enrico **Milani**

Marco **Marinelli**

Gianluca **Verona Rinati**

Claudio **Verona**





Comprende



versione **Ebook**  
e **Software**  
di simulazione

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

# Elementi di Fisica

## Meccanica e Termodinamica

**III edizione**

a cura di

Enrico **Milani**

Marco **Marinelli**

Gianluca **Verona Rinati**

Claudio **Verona**



# Accedi all'ebook e ai contenuti digitali

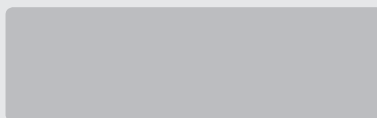
## Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**  
e si **adatta** alle dimensioni  
del **tuo lettore!**



Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edisesuniversita.it** e attivare la tua **area riservata**. Potrai accedere alla **versione digitale** del testo e a ulteriore **materiale didattico**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.  
L'**accesso al materiale didattico** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edisesuniversita.it** e segui queste semplici istruzioni

### Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

### Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticali tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edisesuniversita.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*



Ulteriori materiali e strumenti didattici sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere a:

- **Ebook:** versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.
- **Software di simulazione:** un vastissimo database di quesiti a risposta multipla per effettuare esercitazioni sull'**intero programma** o su **argomenti specifici**.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

P. Mazzoldi · M. Nigro · C. Voci

# ELEMENTI DI FISICA

TERZA EDIZIONE

## Meccanica e Termodinamica

Edizione a cura di

E. Milani

M. Marinelli

G. Verona Rinati

C. Verona



P. Mazzoldi · M. Nigro · C. Voci  
Elementi di Fisica – Meccanica e Termodinamica – III Edizione  
a cura di E. Milani, M. Marinelli, G. Verona Rinati, C. Verona

Copyright © 2021, 2008, Edises Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2025 2024 2023 2021 2021

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

*L'Editore*

*L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.*

*Fotocomposizione:* doma book di Massimo Di Grazia – Napoli

*Stampato presso la*

Tipografia Sograte S.r.l. – Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG)

*per conto della*

Edises Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

[www.edisesuniversita.it](http://www.edisesuniversita.it)

[assistenza.edises.it](mailto:assistenza.edises.it)

ISBN 978 88 3623 036 5

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma [assistenza.edises.it](mailto:assistenza.edises.it)

# PREFAZIONE ALLA NUOVA EDIZIONE

Nel procedere all'aggiornamento di un testo stimato e diffuso come gli "Elementi di Fisica" di Mazzoldi, Nigro, Voci si affrontano esigenze contrapposte. Da una parte gli interventi da apportare per garantire aggiornamento e compattezza logica nella presentazione delle varie parti, dall'altra lo stile concreto e privo di prolissità da preservare, che ha ricevuto indubbio apprezzamento.

Nel nostro intervento si è cercato quindi di mantenere le caratteristiche di compattezza e semplicità di esposizione, ma di rivedere i contenuti sia estendendoli per coprire, per quanto possibile, le esigenze di tutti i corsi di Fisica Generale del primo anno delle facoltà tecnico-scientifiche, sia riarrangiandoli parzialmente per ottenere nella successione logica degli argomenti la stessa solidità che è sempre stata presente nella loro esposizione.

A parte l'aggiornamento alle moderne definizioni delle unità di misura (Appendice B) e un'accurata ricerca ed eliminazione dei refusi inevitabilmente presenti nella precedente edizione, i principali interventi sono elencati di seguito, ripercorrendo lo sviluppo del testo nei vari capitoli.

Tutta la cinematica del punto in un singolo sistema di riferimento (prima separata in 2 capitoli) è stata riunita nel capitolo 1. Poiché alcuni docenti preferiscono un'impostazione "dal generale al particolare", partendo dalle definizioni generali per il moto tridimensionale per poi applicarle a quello monodimensionale, e altri l'approccio opposto, si è inteso rendere il testo fruibile a tutti, intervenendo in modo che l'argomento possa essere presentato con la successione di paragrafi 1.2-1.3 (moto generale e poi rettilineo) oppure 1.3-1.2 (moto rettilineo e poi generale), per poi affrontare il resto del capitolo. Si è resa necessaria una piccola ridondanza nell'esposizione del processo logico di definizione delle variabili cinematiche per il moto unidimensionale (paragrafo 1.3), che confidiamo possa costituire un utile rielaborazione anche per gli studenti che seguano la successione 1.2-1.3.

Le leggi di Newton sono presentate nel capitolo 2, insieme all'esame delle principali forze e dei corrispondenti moti. Qui si è intervenuti per ottimizzare la successione di presentazione delle varie forze in modo che non fosse mai necessario anticipare proprietà di forze non ancora introdotte. Inoltre è stata accorpata qui la discussione di tutti i tipi di oscillatore, prima divisa tra capitolo 3 e capitolo 10.

Nel capitolo 3 vengono trattati i moti relativi. Sono stati molto approfonditi il ruolo e le caratteristiche delle forze apparenti. Rispetto al testo originale il capitolo è stato anticipato (prima della discussione dei concetti di lavoro ed energia) perché in tal modo, una volta introdotte le forze apparenti, i capitoli successivi possono riferirsi al caso di un sistema di riferimento qualsiasi.

Il capitolo 4 è dedicato agli aspetti energetici del moto. Si è approfondito l'argomento delle forze conservative e della definizione di energia potenziale, e riportata qui la discussione del bilancio energetico nell'oscillatore armonico, in precedenza trattata nel capitolo 10.

I capitoli 5 e 6 trattano i sistemi di punti materiali e i corpi solidi rispettivamente. Per questi ultimi si è privilegiata la discussione dei corpi rigidi continui attraverso il formalismo integrale. Nel capitolo 6 è anche trattata l'elasticità dei solidi.

Nel capitolo 7 sono stati discussi i processi d'urto, sia tra punti materiali, sia coinvolgenti corpi rigidi.

I capitoli 8, 9, 10 sono dedicati rispettivamente a gravitazione, propagazione di onde meccaniche e dinamica dei fluidi. In particolare, la trattazione delle onde meccaniche non era presente in origine ma si è ritenuto di inserirla per completezza in quanto, se non sempre, spesso inclusa nei programmi dei corsi di Fisica Generale del primo anno. Nel capitolo 10 tutto quanto riguarda i fluidi reali viene presentato nei paragrafi finali, in modo che i docenti che si limitano a discutere i fluidi ideali non abbiano discontinuità nella successione degli argomenti.

Infine, gli ultimi capitoli (11, 12, 13) sono tradizionalmente dedicati alla termodinamica. Abbiamo riunito nel primo di essi (Sistemi termodinamici) tutte le definizioni generali, indipendenti dal particolare sistema scelto, delle quantità termodinamiche rilevanti: equilibrio, temperatura, calore, trasformazioni, lavoro. Il capitolo 12 tratta il Primo principio e gli aspetti energetici della termodinamica, in particolare con applicazione al caso dei gas perfetti, e l'ultimo naturalmente il Secondo principio e il concetto di entropia.

Quando necessario, sono stati aggiunti nuovi esempi ed esercizi.

Come ultima annotazione, quando è stato possibile senza appesantire la trattazione, si è preferito mantenere un elevato rigore formale nelle definizioni delle grandezze fisiche e nella derivazione delle formule.

Milano, Gennaio 2021

E. MILANI  
M. MARINELLI  
G. VERONA RINATI  
C. VERONA

# PREFAZIONE ALLA PRECEDENTE EDIZIONE

Nella prefazione della prima edizione del volume **Meccanica e Termodinamica** di questi **Elementi di Fisica** abbiamo spiegato le scelte adottate nella stesura del testo, che riportiamo.

*La riforma che ha portato all'istituzione della laurea triennale e della successiva laurea specialistica ha generato una revisione dei programmi e del peso, misurato in crediti, assegnato alle singole materie. Al primo livello la riduzione della durata degli studi e il taglio professionalizzante stanno comportando di fatto una compressione delle materie di base e tra queste della Fisica (fatta eccezione per i corsi della classe di Fisica), compressione che può arrivare fino ad un dimezzamento rispetto alla situazione precedente.*

*Non vogliamo discutere qui le conseguenze formative e culturali che la riforma può avere. Notiamo soltanto che, nelle nuove condizioni in cui deve operare, il docente di una materia istituzionale come la Fisica Generale si trova di fronte ad una scelta: ridurre il livello di presentazione per conservare il numero di argomenti che normalmente si illustravano agli studenti oppure operare un taglio di argomenti per rimanere ad un adeguato livello di presentazione, simile a quello finora adottato. Noi abbiamo optato per la seconda soluzione, che consideriamo la più valida per gli insegnamenti impartiti nelle facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali e di Ingegneria. Abbiamo pertanto operato una revisione critica del testo, che tanto favorevolmente è stato accolto dai colleghi in questi anni, consistente in una riduzione di approfondimenti e di nozioni specifiche che erano stati pensati in vista di successivi insegnamenti di materie fisiche, mentre invece è rimasta inalterata la presentazione degli argomenti che costituiscono la base culturale della materia. Ciò nonostante, è sicuro che le nozioni contenute nei capitoli 8, 9, 10, 11 (Fenomeni d'urto, Proprietà meccaniche dei fluidi, Oscillazioni, Gravitazione) non possono tutte rientrare in un solo corso; le abbiamo mantenute per offrire al docente la possibilità di una scelta congeniale al corso che insegna.*

*È evidente che ci troviamo di fronte ad un difficile passaggio, se ci proponiamo di mantenere anche nella laurea triennale un insegnamento e un accertamento del risultato qualitativamente in linea con la nostra tradizione e nello stesso tempo vogliamo adeguarci alla logica della riforma.*

Per questa nuova edizione il testo è stato rivisto apportando tra l'altro alcuni cambiamenti derivati da suggerimenti e osservazioni di colleghi e di studenti. La nuova veste tipografica è intesa a facilitare la lettura del testo. Con ciò intendiamo continuare a dare un contributo all'impegno professionale dei docenti e uno strumento di apprendimento agli studenti che sia utile per la loro formazione, oltre che per il superamento dell'esame.

Padova, settembre 2007

Paolo MAZZOLDI, Massimo NIGRO, Cesare VOCI



# INDICE GENERALE

## MECCANICA

Premessa allo studio della meccanica. . . . . 1

<b>1</b>	<b>Cinematica del punto</b> . . . . .	3
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.2	Variabili cinematiche . . . . .	4
1.3	Moto rettilineo . . . . .	9
1.4	Moto verticale di un corpo . . . . .	16
1.5	Moto armonico semplice . . . . .	18
1.6	Velocità e accelerazione in funzione della posizione . . . . .	20
1.7	Moti su traiettoria curvilinea. Accelerazione tangenziale e normale . . . . .	21
1.8	Moto circolare . . . . .	23
1.9	Moto parabolico dei corpi . . . . .	28
1.10	Alcune osservazioni sulla cinematica del punto . . . . .	31
	Riepilogo . . . . .	32
	Quesiti . . . . .	33
	Problemi . . . . .	34

<b>2</b>	<b>Dinamica del punto: le leggi di Newton</b> . . . . .	39
2.1	Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza . . . . .	39
2.2	Leggi di Newton . . . . .	40
2.3	Classificazione delle forze . . . . .	42
2.4	Quantità di moto. Impulso . . . . .	43
2.5	Risultante delle forze. Equilibrio statico . . . . .	44
2.6	Azione dinamica delle forze. Equilibrio dinamico . . . . .	46
2.7	Forza peso . . . . .	48
2.8	Reazione vincolare . . . . .	49
2.9	Forza di attrito radente . . . . .	51
2.10	Piano inclinato . . . . .	53
2.11	Forza di attrito viscoso . . . . .	56
2.12	Tensione dei fili . . . . .	58
2.13	Forza elastica. Oscillatore armonico semplice . . . . .	61
2.14	Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa . . . . .	65
2.15	Oscillatore armonico forzato . . . . .	67
2.16	Pendolo semplice . . . . .	69
	Riepilogo . . . . .	71
	Quesiti . . . . .	73
	Problemi . . . . .	74

<b>3</b>	<b>Moti relativi</b> . . . . .	79
3.1	Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative . . . . .	79
3.2	Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana . . . . .	82
3.3	Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti . . . . .	83
3.4	Moto di trascinamento traslatorio rettilineo uniforme . . . . .	84
3.5	Moto di trascinamento traslatorio rettilineo accelerato . . . . .	86
3.6	Moto di trascinamento rotatorio uniforme . . . . .	89
3.7	Alcuni commenti . . . . .	91
	Riepilogo . . . . .	93
	Quesiti . . . . .	94
	Problemi . . . . .	94

<b>4</b>	<b>Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti</b> . . . . .	97
4.1	Lavoro. Potenza. Energia cinetica . . . . .	97
4.2	Forze conservative . . . . .	102
4.3	Energia potenziale . . . . .	103
4.4	Conservazione dell'energia meccanica . . . . .	105
4.5	Momento angolare. Momento della forza . . . . .	109
4.6	Alcune osservazioni sulla dinamica del punto Riepilogo . . . . .	111
	Quesiti . . . . .	113
	Problemi . . . . .	114

<b>5</b>	<b>Dinamica dei sistemi di punti materiali</b> . . . . .	119
5.1	Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne . . . . .	119
5.2	Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa . . . . .	120
5.3	Conservazione della quantità di moto . . . . .	124
5.4	Teorema del momento angolare . . . . .	126
5.5	Conservazione del momento angolare . . . . .	128
5.6	Sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	129
5.7	Teoremi di König . . . . .	130
5.8	Il teorema dell'energia cinetica . . . . .	133
5.9	Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi . . . . .	135
	Riepilogo . . . . .	137

Quesiti .....	137	8.6	Moto di un corpo sottoposto alla forza gravitazionale .....	211
Problemi .....	138	8.7	Cenni di relatività generale .....	215
<b>6</b>	<b>Dinamica del corpo rigido .....</b>		Riepilogo .....	215
6.1	Definizione di corpo rigido. Prime proprietà .....		Quesiti .....	216
			Problemi .....	216
6.2	Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa .....	<b>9</b>	<b>Onde meccaniche .....</b>	219
		9.1	Fenomeni ondulatori .....	219
6.3	Moto di un corpo rigido .....	9.2	Onde piane armoniche .....	221
6.4	Equilibrio statico del corpo rigido .....	9.3	Propagazione delle onde .....	223
6.5	Rotazioni rigide attorno a un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale .....	9.4	Propagazione dell'energia in una corda tesa .....	226
		9.5	Onde sonore .....	228
6.6	Momento d'inerzia .....	9.6	Onde sonore armoniche .....	229
6.7	Teorema di Huygens- Steiner .....	9.7	Effetto Doppler. Onda d'urto .....	232
6.8	Moto di puro rotolamento .....	9.8	Interferenza di onde sonore armoniche .....	235
6.9	Pendolo composto .....	9.9	Onde stazionarie in una corda tesa .....	237
6.10	Impulso angolare. Momento dell'impulso .....	9.10	Onde stazionarie in una colonna di gas .....	241
6.11	Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido .....	9.11	Battimenti .....	243
			Riepilogo .....	244
6.12	Cenni sulle proprietà elastiche dei solidi reali .....		Quesiti .....	245
			Problemi .....	247
	Riepilogo .....			
	Quesiti .....			
	Problemi .....			
<b>7</b>	<b>Fenomeni d'urto .....</b>	<b>10</b>	<b>Proprietà meccaniche dei fluidi. . .</b>	249
7.1	Urti tra due punti materiali .....	10.1	Generalità sui fluidi. Pressione .....	249
7.2	Urto elastico .....	10.2	Equilibrio statico di un fluido in presenza della forza peso .....	251
7.3	Urto completamente anelastico .....	10.3	Principio di Archimede .....	256
7.4	Urto anelastico .....	10.4	Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata .....	258
7.5	Urti tra corpi rigidi o tra punti materiali e corpi rigidi .....	10.5	Teorema di Bernoulli .....	260
		10.6	Applicazioni del teorema di Bernoulli .....	261
	Riepilogo .....	10.7	Attrito interno. Viscosità .....	264
	Quesiti .....	10.8	Effetti dinamici. Vortici .....	265
	Problemi .....	10.9	Moto laminare .....	266
<b>8</b>	<b>Gravitazione .....</b>	10.10	Moto vorticoso. Numero di Reynolds .....	267
8.1	Forze centrali .....	10.11	Moto dei corpi in un fluido. Resistenza del mezzo .....	268
8.2	La forza gravitazionale .....		Riepilogo .....	270
8.3	Massa inerziale e massa gravitazionale .....		Quesiti .....	271
8.4	Campo gravitazionale .....		Problemi .....	271
8.5	Energia potenziale gravitazionale .....			

## TERMODINAMICA

<b>11</b>	<b>Sistemi termodinamici .....</b>	11.7	Trasmissione del calore .....	289
11.1	Introduzione .....	11.8	Dilatazione termica di solidi e liquidi .....	292
11.2	Equilibrio termodinamico .....	11.9	Trasformazioni termodinamiche .....	293
11.3	Definizione di temperatura. Termometri .....	11.10	Lavoro termodinamico .....	296
11.4	Termometro a gas ideale a volume costante .....		Riepilogo .....	298
11.5	Calorimetria .....		Quesiti .....	299
11.6	Processi isotermi. Cambiamenti di fase .....		Problemi .....	300

<b>12</b>	<b>Primo principio della termodinamica</b>	<b>301</b>
12.1	Esperimenti di Joule	301
12.2	Primo principio della termodinamica. Energia interna	302
12.3	Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali	305
12.4	Calori specifici del gas ideale	308
12.5	Energia interna del gas ideale	309
12.6	Studio di alcune trasformazioni del gas ideale	312
12.7	Trasformazioni cicliche. Ciclo di Carnot	318
12.8	Gas reali. Equazione di stato. Energia interna	323
12.9	Diagrammi $pV$ . Diagrammi $pT$ . Formula di Clapeyron	324
12.10	Teoria cinetica dei gas	328
12.11	Significato cinetico di temperatura e calore	334
	Riepilogo	335
	Quesiti	336
	Problemi	337

<b>13</b>	<b>Secondo principio della termodinamica</b>	<b>343</b>
13.1	Enunciati del secondo principio della termodinamica	343
13.2	Reversibilità e irreversibilità	345
13.3	Teorema di Carnot	346
13.4	Teorema di Clausius	349
13.5	La funzione di stato entropia	351
13.6	Il principio di aumento dell'entropia	354
13.7	Calcoli di variazioni di entropia	355
13.8	Entropia del gas ideale	360
13.9	Entropia e probabilità	362

13.10	Energia inutilizzabile	365
13.11	Conclusioni termodinamiche sull'entropia	366
13.12	Temperatura termodinamica assoluta	367
13.13	Cenni sul terzo principio della termodinamica	368
	Riepilogo	369
	Quesiti	370
	Problemi	370

<b>Appendice A</b>	<b>Richiami matematici</b>	<b>375</b>
A.1	Chiarimento sui simboli	375
A.2	Sviluppi in serie	376
A.3	Calcoli di integrali di superficie e di volume	376
A.4	Equazioni differenziali	377
A.5	Funzioni di più variabili. Derivate parziali	379

<b>Appendice B</b>	<b>Le unità di misura</b>	<b>381</b>
--------------------	---------------------------	------------

<b>Appendice C</b>	<b>Calcolo vettoriale</b>	<b>387</b>
C.1	Grandezze scalari e vettoriali	387
C.2	Prime proprietà dei vettori	388
C.3	Prodotti tra vettori	389
C.4	Proprietà di invarianza	391
C.5	Momento di un vettore	392
C.6	Derivata di un vettore	393
C.7	Integrazione vettoriale	395

<b>Soluzioni ai problemi di Meccanica e Termodinamica</b>	<b>397</b>
---	------------

<b>Indice analitico</b>	<b>429</b>
-------------------------	------------

# MOTI RELATIVI

# 3

## 3.1 | Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

### SOMMARIO

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che, fissato un sistema di riferimento e stabilita una *legge fisica*, questa resta uguale anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata. *Le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento* e non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: *lo spazio appare omogeneo e isotropo*.

La caratteristica sostanziale di *invarianza* acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza, come le grandezze scalari o quelle vettoriali o altre più complesse, come ad esempio i tensori.

La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Il moto viene descritto con leggi diverse in due sistemi di riferimento in moto relativo, a meno che questo moto non abbia certe caratteristiche che tra breve specificheremo. Non sussiste cioè invarianza delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi l'uno rispetto all'altro.

### Teorema delle velocità relative

Nella **Figura 3.1** è rappresentato un punto  $P$  in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in  $O$  che, per convenzione, chiamiamo **sistema di riferimento fisso**  $S(x, y, z)$  e da una terna cartesiana con centro in  $O'$  che, sempre per convenzione, chiamiamo **sistema di riferimento mobile**  $S'(x', y', z')$ . L'origine del sistema mobile ha una velocità  $\mathbf{v}_{O'}$  rispetto al sistema fisso; inoltre l'insieme dei tre assi mobili, che è assimilabile ad un corpo indeformabile, ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  (questa nozione di rotazione rigida verrà chiarita nel capitolo 6).

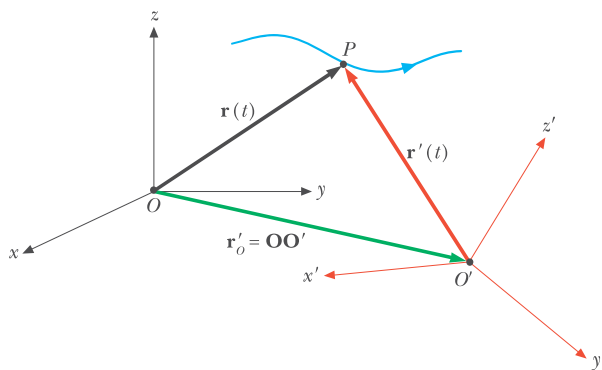
Vogliamo trovare che relazioni esistono tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto  $P$ , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la

- 3.1 | Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative
- 3.2 | Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana
- 3.3 | Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti
- 3.4 | Moto di trascinamento traslatorio rettilineo uniforme
- 3.5 | Moto di trascinamento traslatorio rettilineo accelerato
- 3.6 | Moto di trascinamento rotatorio uniforme
- 3.7 | Alcuni commenti

Sistema di riferimento fisso

Sistema di riferimento mobile

► **Figura 3.1** Sistema di riferimento fisso (nero) e in moto (rosso).



nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro. Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni. Vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse.

Indichiamo con  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$  il vettore posizione del punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento fisso  $S(x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}' = x' \mathbf{u}_{x'} + y' \mathbf{u}_{y'} + z' \mathbf{u}_{z'}$  il vettore posizione del punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento mobile  $S'(x', y', z')$  e  $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{OO}' = x_{O'} \mathbf{u}_x + y_{O'} \mathbf{u}_y + z_{O'} \mathbf{u}_z$  il vettore posizione dell'origine del sistema mobile  $O'$  rispetto a quello fisso. Come si evince dalla **Figura 3.1**, la relazione tra le posizioni del punto  $P$ , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (3.1)$$

Derivando rispetto al tempo la (3.1) e indicando con  $\mathbf{v}$  la velocità del punto  $P$  rispetto al sistema fisso e  $\mathbf{v}_{O'}$  la velocità del sistema mobile rispetto a quello fisso, si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (3.2)$$

Il vettore posizione  $\mathbf{r}'$  del punto  $P$  rispetto al sistema mobile può variare, sia perché varia la posizione di  $P$ , sia perché il sistema mobile ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ . Pertanto la derivata temporale del vettore  $\mathbf{r}'$  risulta essere:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \left( \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \right) + \left( x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \right). \quad (3.3)$$

Utilizzando la formula della derivata dei versore,  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_n$ , come descritta nell'appendice C, e ricordando la definizione del vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , possiamo scrivere vettorialmente  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ , detta *relazione di Poisson*. Pertanto la (3.3) diventa:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \left( v'_{x'} \mathbf{u}_{x'} + v'_{y'} \mathbf{u}_{y'} + v'_{z'} \mathbf{u}_{z'} \right) + \left( x' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'} + y' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'} + z' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'} \right) = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.4)$$

avendo indicato con  $\mathbf{v}'$  la velocità del punto  $P$  rispetto al sistema mobile (**velocità relativa**). Sostituendo la (3.4) nella (3.2) si ottiene:

**Teorema delle velocità relative**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_t. \quad (3.5)$$

Le velocità del punto  $P$  viste dai due sistemi di riferimento sono diverse, ma correlate dalla (3.5). Il termine correttivo, chiamato **velocità di trascinamento**, è

**Velocità di trascinamento**

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.6)$$

e dipende dal tipo di moto che compie il sistema mobile rispetto al sistema fisso (traslatorio,  $\mathbf{v}_{O'}$ , rotatorio,  $\boldsymbol{\omega}$ ) e dalla posizione del punto  $P$  rispetto al sistema mobile ( $\mathbf{r}'$ ).

Due casi particolari sono importanti.

- Il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ); si parla di **moto relativo traslatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento traslatorio**, e (3.5) e (3.6) diventano

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{O'}. \quad (3.7)$$

**Moto di trascinamento traslatorio**

- Il sistema mobile non si sposta rispetto a quello fisso ( $\mathbf{v}_{O'} = 0$ ), ma ruota:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'; \quad (3.8)$$

**Moto di trascinamento rotatorio**

si parla di **moto relativo rotatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento rotatorio**.

In entrambi i casi se il punto  $P$  è solidale con il sistema di riferimento mobile, ovvero  $\mathbf{v}' = 0$ , la velocità del punto  $P$  coincide con la velocità di trascinamento:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'}$ ,  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ .

Il caso generale (3.5) può allora essere pensato come somma di un moto relativo traslatorio e di un moto relativo rotatorio tra i due sistemi, risultato che di nuovo sarà chiarito nel capitolo 6.

## Teorema delle accelerazioni relative

Ricaviamo ora la relazione che sussiste tra le accelerazioni del punto  $P$  rispetto ai due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  in moto relativo. Chiamiamo con  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  l'accelerazione di  $P$  nel sistema di riferimento fisso e con  $\mathbf{a}_{O'} = d\mathbf{v}_{O'}/dt$  l'accelerazione dell'origine  $O'$  del sistema mobile rispetto a quello fisso. Derivando la (3.5), si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'. \quad (3.9)$$

Il vettore velocità  $\mathbf{v}'$  del punto  $P$  rispetto al sistema mobile può variare sia perché varia la posizione di  $P$ , sia perché il sistema mobile ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ . Pertanto la derivata temporale del vettore  $\mathbf{v}'$  è

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \left( \frac{dv'_{x'}}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dv'_{y'}}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dv'_{z'}}{dt} \mathbf{u}_{z'} \right) + \left( v'_{x'} \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + v'_{y'} \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + v'_{z'} \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \right). \quad (3.10)$$

Utilizzando la *formula di Poisson*, come descritto nel paragrafo precedente, la (3.10) può essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \left( a'_{x'} \mathbf{u}_{x'} + a'_{y'} \mathbf{u}_{y'} + a'_{z'} \mathbf{u}_{z'} \right) + \left( v'_{x'} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'} + v'_{y'} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'} + v'_{z'} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'} \right) = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.11)$$

dove  $\mathbf{a}'$  è l'accelerazione del punto  $P$  rispetto al sistema mobile (**accelerazione relativa**).

Per la (3.4), il terzo termine della (3.9) diventa:

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (3.12)$$

Andando a sostituire le relazioni (3.12) e (3.11) nella (3.9) otteniamo la seguente espressione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (3.13)$$

**Teorema delle accelerazioni relative**

Le accelerazioni del punto  $P$  viste dai due sistemi di riferimento in moto relativo non coincidono, ma sono correlate dalla (3.13). Il termine

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad (3.14)$$

**Accelerazione di trascinamento**

si chiama **accelerazione di trascinamento** e dipende, come  $\mathbf{v}_l$ , dai parametri del moto relativo tra i due sistemi e dalla posizione di  $P$  nel sistema mobile. L'accelerazione di trascinamento è data da tre contributi: l'accelerazione  $\mathbf{a}_{O'}$  del moto di traslazione del sistema mobile, l'accelerazione centripeta  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  e l'accelerazione tangenziale  $d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r}'$  dovute al moto di rotazione del sistema mobile.

Queste ultime sono già state incontrate nel moto circolare, paragrafo 1.8, vedi (1.38).

Il termine

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.15)$$

è detto **accelerazione complementare** o **di Coriolis** e dipende dal moto di  $P$  rispetto al sistema mobile ( $\mathbf{v}'$ ).

La (3.13) può essere scritta in modo sintetico, tramite le (3.14) e (3.15)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_c. \quad (3.16)$$

In corrispondenza ai due casi particolari già evidenziati per la velocità abbiamo:

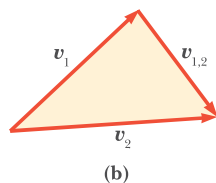
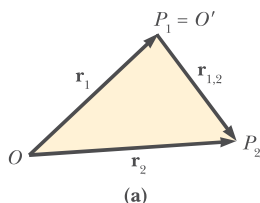
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (3.18)$$

La complessa struttura della (3.13) fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento. Passeremo nei prossimi paragrafi ad esaminare, dopo le relazioni cinematiche, gli aspetti dinamici del moto relativo. Prima trattiamo però un particolare caso cinematico di moto relativo.

**Moto di trascinamento traslatorio**

**Moto di trascinamento rotatorio**



▲ **Figura 3.2** Posizione relativa (a) e velocità relativa (b) tra due punti.

## Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro

È necessario talvolta considerare il moto di un punto  $P_2$  rispetto ad un altro punto  $P_1$ , ossia, con ovvio significato dei simboli, calcolare posizione  $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , velocità  $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  e accelerazione  $\mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$  di  $P_2$  rispetto a  $P_1$ , **Figura 3.2**. Ciò può essere fatto scegliendo come sistema di riferimento mobile un sistema che non ruota rispetto al sistema fisso ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ) e la cui origine  $O'$  coincide con il punto  $P_1$ , **Figura 3.2**. Il moto relativo di  $P_2$  rispetto a  $P_1$  diventa allora il moto di  $P_2$  nel sistema mobile e si può quindi risolvere il problema utilizzando le (3.1), (3.5), (3.13) con le seguenti corrispondenze tra i simboli usati nelle formule citate e quelli riportati in **Figura 3.2**:

$$\begin{aligned} \text{punto } P_1 = O' \text{ rispetto ad } O: & \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{O'}, & \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{O'}, & \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{O'} \\ \text{punto } P_2 \text{ rispetto ad } O: & \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, & \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}, & \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} \\ \text{punto } P_2 \text{ rispetto a } P_1 = O': & \quad \mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}', & \mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}', & \mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{a}'. \end{aligned} \quad (3.19)$$

## 3.2 | Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

**Sistema di riferimento inerziale**

Definiamo come **sistema di riferimento inerziale** un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto

è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (2.1) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le *forze reali* (o *vere*) cioè quelle che abbiamo esaminato nel capitolo 2 e che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, classificate nel paragrafo 2.3; la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\mathbf{v}_{O'} = \text{costante}, \quad \mathbf{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Da (3.13) ricaviamo  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ : **le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali**. Se  $\mathbf{a} = 0$  anche  $\mathbf{a}' = 0$  e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: **definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali**. Per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di  $\mathbf{F}$  e di  $\mathbf{a}$ : se cioè nel sistema inerziale  $O$  la relazione tra l'accelerazione e la forza agente è  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , nel sistema inerziale  $O'$  la legge di Newton si scrive allo stesso modo  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ .

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di **relatività galileiana**.

Forza reale

Sistemi inerziali

Relatività galileiana

### 3.3 | Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti

Definiamo come **sistema di riferimento non inerziale**, un sistema in moto accelerato  $\mathbf{a}_{O'} \neq 0$  oppure in rotazione  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  o entrambi, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. In tale sistema non vale il principio di inerzia e quindi neanche la legge di Newton (2.1): ossia la forza che agisce sul punto materiale non è proporzionale all'accelerazione  $\mathbf{a}'$  relativa a tale sistema mobile. Tale risultato appare chiaro da (3.16): infatti se  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  è la forza reale che agisce sul punto materiale nel sistema inerziale, nel sistema mobile, ossia non inerziale, non può sussistere la relazione  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ , in quanto  $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$ . Per capire meglio quanto detto, moltiplichiamo i termini della (3.16) per la massa del punto e tenendo conto che  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , abbiamo:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_c.$$

Volendo scrivere una relazione analoga alla legge di Newton (2.1) ma valida nel sistema non inerziale, riscriviamo l'ultima equazione nel seguente modo:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}'.$$

Questa può essere ricondotta alla forma  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ , del tutto analoga all'equazione di Newton (2.1), se come forza totale agente sul corpo si considera la forza  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c$ . Introducendo quindi le **forze apparenti**

$$\mathbf{F}_{\text{app}} = -m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c = -m\mathbf{a}_{O'} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.20)$$

possiamo scrivere:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{app}} = m\mathbf{a}'. \quad (3.21)$$

Sistema di riferimento non inerziale

Forze apparenti

**Forza di trascinamento****Forza centrifuga****Forza di Coriolis**

La (3.21) rappresenta l'equazione di Newton per sistemi di riferimento non inerziali. In tali sistemi si può quindi utilizzare l'equazione di Newton (e tutto ciò che ne deriva) allo *stesso modo* purché oltre alle forze reali vengano considerate anche le forze apparenti (3.20).

I primi tre termini della (3.20) costituiscono la **forza di trascinamento**  $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_l$  che dipende solo dal moto del sistema di riferimento non inerziale e dalla posizione del punto materiale. In particolare, il primo termine è diretto in verso opposto all'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento non inerziale, il secondo (presente solo se la velocità angolare non è costante nel tempo) ha direzione tangenziale (ortogonale ad  $\mathbf{r}'$ ) mentre il terzo prende il nome di **forza centrifuga** poiché come si può notare è diretta radialmente verso l'esterno rispetto all'asse di rotazione. L'ultimo termine della (3.20) è la **forza di Coriolis**  $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$  che agisce sui punti materiali in moto relativo rispetto a un sistema di riferimento rotante.

Risulta evidente che le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali ma dal moto del sistema di riferimento e *non esistono* in un sistema di riferimento inerziale. Inoltre, esse sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche **forze di inerzia**.

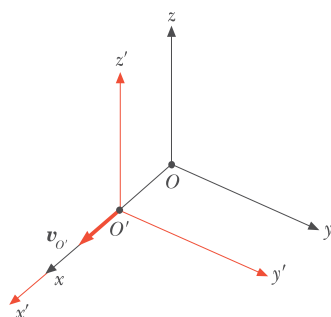
Abbiamo quindi visto che il moto di un punto materiale può essere determinato in maniera corretta sia riferendosi ad un sistema di riferimento inerziale tramite la (2.1) sia attraverso un sistema di riferimento non inerziale tramite la (3.21).

In un sistema di riferimento inerziale la descrizione di un fenomeno dinamico è solitamente più semplice in quanto è più semplice l'espressione delle forze. In molti casi specifici però può essere più diretta e intuitiva una trattazione che faccia uso di sistemi di riferimento non inerziali. È quindi opportuno valutare caso per caso il sistema di riferimento che rende più semplice la soluzione di un determinato problema fisico.

Nei prossimi paragrafi presenteremo vari esempi di moti osservati da due sistemi di riferimento diversi, di cui almeno uno inerziale. Assumeremo come inerziale il sistema con origine  $O$ , mentre l'altro avrà origine in  $O'$  e metteremo in evidenza cosa misurano due osservatori, detti per brevità  $O$  e  $O'$ , solidali con i due sistemi.

Questi due osservatori, che possono comunicare tra loro, sono esperti nella Fisica e cercano di cogliere il significato delle loro misure. Dall'esame di queste comprenderemo la diversità della cinematica e la differente interpretazione dinamica che si possono avere per uno stesso fenomeno visto da due sistemi in moto relativo tra loro.

### 3.4 Moto di trascinamento traslatorio rettilineo uniforme



▲ **Figura 3.3** Sistema di riferimento fisso (nero) e sistema di riferimento in moto traslatorio (rosso) lungo l'asse  $x$ .

Consideriamo il moto di trascinamento traslatorio più semplice, che è quello rettilineo in cui  $O'$  si muove rispetto a  $O$  lungo una traiettoria rettilinea, e ci mettiamo, per comodità, nella situazione della **Figura 3.3** (che però non è limitativa): gli assi dei due sistemi sono paralleli e tali restano durante il moto, il moto di trascinamento avviene lungo l'asse  $x$ , che coincide con l'asse  $x'$ . Dato che la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  è nulla, le formule utili sono (3.7) e (3.17), oltre a (3.1).

Prendiamo il caso in cui il moto di  $O'$  è uniforme ( $\mathbf{a}_{O'} = 0$ ). In questo caso  $O$  e  $O'$  sono entrambi sistemi di riferimento inerziali, **Figura 3.3**, le relazioni per velocità e accelerazione sono

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}',$$

mentre il legame tra i raggi vettori è

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{O'}t + \mathbf{r}';$$

infatti  $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{v}_{O'}t$ , nell'ulteriore ipotesi che al tempo  $t = 0$  le origini coincidano.

Le relazioni vettoriali possono essere proiettate sugli assi cartesiani fornendo le relazioni tra le componenti dei vettori:

$$\begin{aligned}
 x' &= x - v_{O'}t & y' &= y & z' &= z \\
 v'_x &= v_x - v_{O'} & v'_y &= v_y & v'_z &= v_z \\
 a'_x &= a_x & a'_y &= a_y & a'_z &= a_z.
 \end{aligned}
 \tag{3.22} \quad \text{Trasformazioni galileiane}$$

Queste trasformazioni di grandezze tra due sistemi entrambi inerziali si chiamano **trasformazioni galileiane**.

Vediamo nei due esempi che seguono applicazioni pratiche delle formule (3.22).

### ESEMPIO 3.1 Il moto di un punto materiale visto da due osservatori inerziali

Un punto  $P$  descrive nel piano  $x, y$  un moto rettilineo uniforme con velocità  $\mathbf{v}$ , di componenti  $v_x$  e  $v_y$ , partendo all'istante  $t = 0$  dalla posizione di coordinate  $x_0, y_0$ . Determinare il moto visto dal sistema  $O'$ , in moto con velocità  $v_{O'}$  parallela all'asse  $x$ .

#### Soluzione

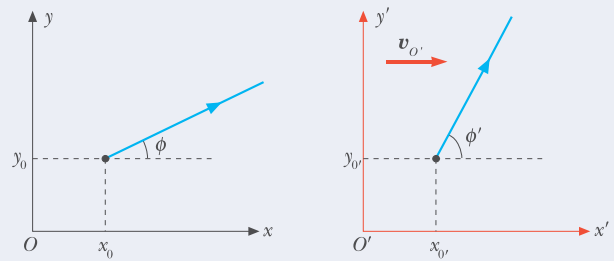
Scriviamo le equazioni dei moti proiettati sugli assi servendoci di (3.22):

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_x t, & x' &= x - v_{O'} t = x_0 + (v_x - v_{O'}) t, \\
 y &= y_0 + v_y t, & y' &= y = y_0 + v_y t, \\
 z &= 0, & z' &= z = 0, \\
 v'_x &= v_x - v_{O'}, & v'_y &= v_y = 0, & v'_z &= v_z = 0
 \end{aligned}$$

Anche nel sistema  $O'$  le componenti della velocità del punto sono costanti e quindi il moto è rettilineo uniforme (come ci aspettiamo essendo i due sistemi inerziali: se  $\mathbf{a} = 0$  anche  $\mathbf{a}' = 0$ ). Però l'inclinazione della traiettoria è diversa nei due sistemi, così come è diverso il modulo della velocità:

$$\begin{aligned}
 \tan \phi &= \frac{v_y}{v_x}, & \tan \phi' &= \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - v_{O'}}, \\
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, & v' &= \sqrt{(v_x - v_{O'})^2 + v_y^2}.
 \end{aligned}$$

Nella **Figura 3.4** è mostrato un caso particolare in cui  $v_{O'}$  è positiva e minore di  $v_x$  (si ricordi che nell'istante iniziale le origini dei due sistemi coincidono).



▲ Figura 3.4

Se fosse  $v_{O'} = v_x$ , cioè se il sistema  $O'$  si muovesse con velocità eguale alla componente  $v_x$  della velocità del punto, sarebbe  $v'_x = 0$  e il moto visto da  $O'$  risulterebbe parallelo all'asse  $y \equiv y'$ . Solo quando il moto in  $O$  è parallelo all'asse  $x$ , cioè all'asse della traslazione tra i due sistemi, anche in  $O'$  si osserva un moto parallelo all'asse  $x'$ .

Riassumendo, entrambi gli osservatori vedono un moto rettilineo uniforme e concordano sul fatto che l'accelerazione è nulla e che quindi non ci sono forze agenti; le traiettorie tuttavia appaiono diverse, e percorse con velocità diverse.

### ESEMPIO 3.2 La caduta di un grave vista da due osservatori inerziali

Nel sistema  $O$  un punto viene lasciato cadere lungo l'asse  $z$ , da un'altezza  $h$ . Cosa vede  $O'$  che si muove con velocità  $v_{O'}$  parallela all'asse  $x$ ?

#### Soluzione

Le equazioni del moto nel sistema  $O$  sono:

$$\begin{aligned}
 x &= 0, & y &= 0, & z &= h - \frac{1}{2}gt^2, \\
 v_x &= 0, & v_y &= 0, & v_z &= -gt, \\
 a_x &= 0, & a_y &= 0, & a_z &= -g.
 \end{aligned}$$

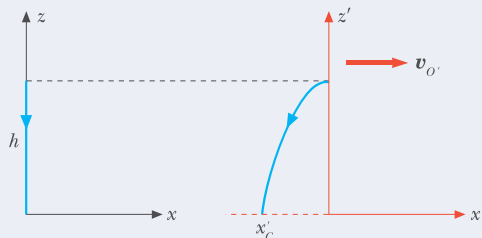
Invece in  $O'$  abbiamo per la (3.22):

$$\begin{aligned}
 x' &= -v_{O'}t, & y' &= 0, & z' &= h - \frac{1}{2}gt^2, \\
 v'_x &= -v_{O'}, & v'_y &= 0, & v'_z &= -gt, \\
 a'_x &= 0, & a'_y &= 0, & a'_z &= -g.
 \end{aligned}$$

Quindi in  $O'$  il moto è composto da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x'$  con velocità  $-v_{O'}$  e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse  $z$ : la traiettoria è un arco di parabola, e si verifica facilmente che il punto cade a distanza

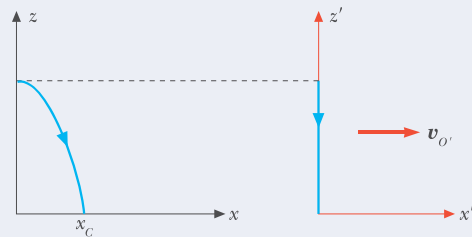
**ESEMPIO 3.2** *continua*

$x'_C = -v_{O'}\sqrt{2h/g}$  dall'origine  $O'$ . Entrambi gli osservatori misurano la stessa accelerazione, ma vedono traiettorie diverse perché sono diverse le condizioni iniziali, **Figura 3.5**.

▲ **Figura 3.5**

Se invece il punto inizialmente è in quiete rispetto ad  $O'$  (e si muove quindi con velocità  $v_{O'}$  rispetto ad  $O$ ), durante la caduta esso continua a muoversi orizzontalmente con la stessa velocità di  $O'$  e pertanto in  $O'$  cade verticalmente. Per  $O$  il

punto ha la velocità iniziale  $v_{O'}$  e cadendo descrive un arco di parabola, con uno spostamento  $x'_C$  dall'origine eguale a quello  $x'_C$  prima calcolato, **Figura 3.6**.

▲ **Figura 3.6**

La caduta appare verticale nel sistema in cui il punto è in quiete e appare parabolica nell'altro sistema. Dalla forma della traiettoria l'osservatore non può dedurre se è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

### 3.5 Moto di trascinamento traslatorio rettilineo accelerato

Passiamo adesso al caso in cui  $O'$  abbia un'accelerazione costante  $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}_t$  e una velocità iniziale  $\mathbf{v}_{in}$ , ambedue parallele e concordi agli assi  $x$  e  $x'$  (stessa configurazione geometrica della **Figura 3.3**). In questo caso  $O'$  diventa un sistema di riferimento non inerziale, mentre  $O$  rimane un sistema inerziale.

La posizione e la velocità di  $O'$  sono quindi espresse da

$$x_{O'} = v_{in}t + \frac{1}{2}a_t t^2, \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t.$$

Le trasformazioni galileiane (3.22) non valgono più e devono essere sostituite dalle:

**Trasformazioni in sistemi di riferimento non inerziali**

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}, & x' &= x - v_{in}t - \frac{1}{2}a_t t^2, & y' &= y, & z' &= z, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}, & v'_x &= v_x - v_{in} - a_t t, & v'_y &= v_y, & v'_z &= v_z, \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'}, & a'_x &= a_x - a_t, & a'_y &= a_y, & a'_z &= a_z. \end{aligned}$$

Come nel caso precedente illustriamo con esempi alcune semplici situazioni.

Caratteristica distintiva è la *diversità delle accelerazioni* nei due sistemi,  $O$  inerziale e  $O'$  non inerziale, e quindi la *diversità delle forze agenti*, con conseguente comparsa delle forze apparenti secondo (3.21).

**ESEMPIO 3.3** *La caduta di un grave vista da due osservatori*

Il sistema  $O'$  è solidale ad un carrello che si muove con accelerazione  $a_t$  positiva rispetto al sistema  $O$ , nella situazione geometrica della **Figura 3.3**. All'istante  $t = 0$ , quando  $O$  e  $O'$  coincidono il carrello ha velocità iniziale  $v_{in}$  e un punto materiale viene lasciato cadere da una piattaforma alta  $h$  solidale al carrello. Descrivere il moto di caduta visto da  $O$  e da  $O'$ , calcolando in particolare dove cade il punto.

**Soluzione**

Consideriamo prima cosa vede l'osservatore *inerziale*. All'istante  $t = 0$  il punto materiale è ad altezza  $h$  e possiede la velocità iniziale del carrello, cioè  $v_{in}$ , parallela all'asse  $x$ ; negli istanti successivi esso è sottoposto soltanto alla forza di gravità. La traiettoria osservata è parabolica e valgono le seguenti equazioni:

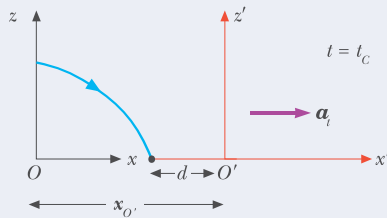
**ESEMPIO 3.3** *continua*

$$\begin{aligned}x &= v_{\text{in}} t, & y &= 0, & z &= h - \frac{1}{2} g t^2, \\v_x &= v_{\text{in}}, & v_y &= 0, & v_z &= -g t, \\a_x &= 0, & a_y &= 0, & a_z &= -g.\end{aligned}$$

Il tempo di caduta è  $t_c = \sqrt{2h/g}$  e lo spazio percorso lungo l'asse  $x$  è  $x_c = v_{\text{in}} t_c$ . Nello stesso tempo il carrello è avanzato di  $x_{O'} = v_{\text{in}} t_c + \frac{1}{2} a_i t_c^2$ . Pertanto il punto materiale tocca il pavimento del carrello più indietro rispetto a  $O'$  della quantità

$$d = x_{O'} - x_c = \frac{1}{2} a_i t_c^2 = \frac{a_i h}{g}.$$

Nella **Figura 3.7** è rappresentata la distanza tra il punto e  $O'$  nell'istante in cui il punto tocca il pavimento; la linea azzurra è la traiettoria vista da  $O$ .

▲ **Figura 3.7**

Se fosse  $v_{\text{in}} = 0$ , l'osservatore  $O$  vedrebbe una caduta rettilinea, ma la distanza  $d$  sarebbe la stessa, essendo questa indipendente da  $v_{\text{in}}$ .

Applicando le formule di trasformazione scritte all'inizio del paragrafo possiamo dedurre cosa vede  $O'$ :

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{2} a_i t^2, & y' &= 0, & z' &= h - \frac{1}{2} g t^2, \\v'_x &= -a_i t, & v'_y &= 0, & v'_z &= -g t, \\a'_x &= -a_i, & a'_y &= 0, & a'_z &= -g.\end{aligned}$$

Il risultato, indipendente da  $v_{\text{in}}$ , mostra come anche in  $O'$  l'accelerazione sia costante, ma diversa da  $\mathbf{g}$ . Essa vale

$$\mathbf{a}' = -a_i \mathbf{u}_{x'} - g \mathbf{u}_{z'} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_i.$$

La velocità è proporzionale all'accelerazione,  $\mathbf{v}' = \mathbf{a}' t$ . Pertanto  $O'$  osserva un moto di caduta rettilineo uniformemente accelerato nel piano  $x', z'$ , **Figura 3.8**, lungo la retta di equazione

$$z' = h + \frac{g}{a_i} x'.$$

Il punto materiale tocca il pavimento del carrello ( $z' = 0$ ) nella posizione

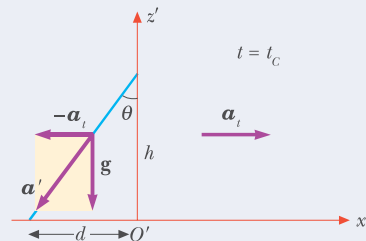
$$d = -\frac{a_i h}{g},$$

cioè all'indietro rispetto a  $O'$  della stessa quantità calcolata in  $O$ .

L'angolo formato dalla linea di caduta con l'asse  $z'$  è

$$\theta = \arctg \frac{a_i}{g} = \arctg \frac{d}{h},$$

come mostrato nella **Figura 3.8**.

▲ **Figura 3.8**

Secondo  $O$  l'osservazione di  $O'$  si spiega semplicemente col fatto che  $O'$  si muove di moto accelerato. Invece  $O'$  per spiegare il moto deve aggiungere alla forza peso  $m\mathbf{g}$  la forza apparente  $-m\mathbf{a}_i$ ; la somma delle due forze è eguale a  $m\mathbf{a}'$ . Se identifichiamo con la verticale la linea di caduta libera dei corpi, nel sistema  $O'$  c'è una verticale apparente che forma l'angolo  $\theta$  con la verticale inerziale; un filo a piombo sul carrello si disporrebbe ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $z'$ . Dalla misura di  $\theta$  si può dedurre il valore di  $a_i$  e determinare che il moto di trascinamento è accelerato; se fosse  $a_i = 0$ , sarebbe anche  $\theta = 0$  e  $d = 0$ , il punto cadrebbe lungo l'asse  $z'$ , come nella **Figura 3.6** dell'esempio 3.2.

**ESEMPIO 3.4** *Una pallina appesa al soffitto di un vagone ferroviario*

Una pallina di massa  $m$  è appesa tramite un filo al soffitto di un vagone. Quando il treno accelera con accelerazione  $\mathbf{a}$  il filo si inclina formando un angolo  $\theta$  con la verticale. Descrivere la situazione fisica vista da un osservatore iniziale  $O$  e da un osservatore  $O'$  situato sul vagone.

**Soluzione**

Per l'osservatore *inerziale*  $O$  il moto della pallina con l'accelerazione  $\mathbf{a}$  del treno è determinato dalla risultante delle forze vere agenti, ovvero la tensione  $\mathbf{T}$  del filo e la forza peso  $m\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

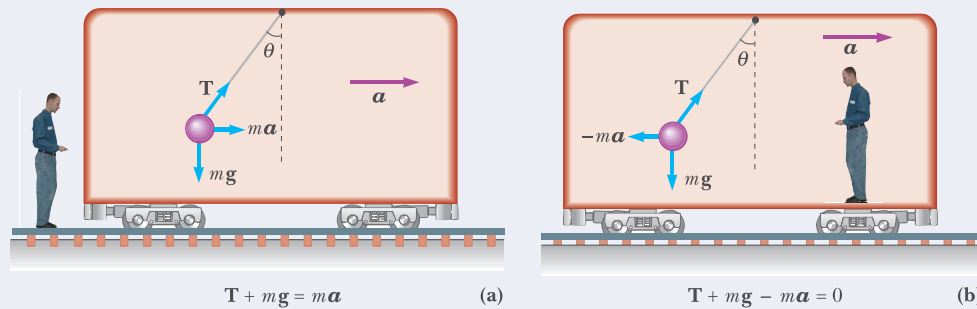
e dalla **Figura 3.9a**

$$T \sin \theta = ma, \quad T \cos \theta = mg, \quad \tan \theta = \frac{a}{g}.$$

L'accelerazione è fornita dalla componente orizzontale della tensione del filo e può essere calcolata misurando l'angolo di inclinazione. Per l'osservatore *non inerziale*  $O'$  sul vagone la pallina è ferma, per cui, **Figura 3.9b**:

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_a = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}.$$

Le forze vere sono equilibrate dalla forza apparente; in ogni caso  $\tan \theta = a/g$ ,  $a = g \tan \theta$ .

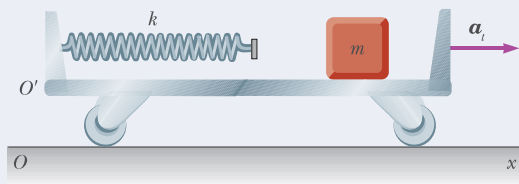
ESEMPIO 3.4 *continua*

▲ Figura 3.9

Se il treno decelera il filo si inclina in direzione simmetrica  $-\theta$ ; se il treno è fermo o si muove con moto rettilineo uniforme  $\theta = 0$ .

## ESEMPIO 3.5 Un punto materiale su un carrello in moto visto da due osservatori

Un punto materiale di massa  $m$  è posto sul pavimento liscio di un carrello (sistema non inerziale  $O'$ ) che avanza con accelerazione  $a_t$  rispetto al sistema inerziale  $O$ , Figura 3.10. Ad un estremo del carrello è fissata una molla di costante elastica  $k$ . Descrivere le osservazioni di  $O$  e  $O'$ .



▲ Figura 3.10

**Soluzione**

Nel sistema di riferimento inerziale si osserva la seguente successione di eventi. Il punto resta fermo mentre il carrello gli scorre sotto (non c'è attrito) fino a quando l'estremo libero

della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto a muoversi; a regime il punto è fermo rispetto al carrello e si muove con accelerazione  $a_t$  rispetto a  $O$ , la molla è compressa della quantità  $x_c = ma_t/k$ : infatti è la forza elastica della molla che applicata al punto gli comunica l'accelerazione  $a_t$  ( $kx_c = ma_t$ ).

Per l'osservatore  $O'$ , solidale al carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione  $-a_t$  (in effetti  $a' = a - a_t = -a_t$  dato che  $a = 0$ ). Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che inizia a comprimersi e alla fine il punto è fermo, con la molla compressa della quantità  $x_c$ .  $O'$  conclude che sul punto, apparentemente libero, agisce invece la forza  $-ma_t$  che viene bilanciata, raggiunto l'equilibrio statico, dalla forza elastica della molla:  $kx_c = ma_t$ .

Notiamo che dalla misura di  $x_c$  si può dedurre il valore di  $a_t$ . La molla di questo esempio, come il filo a piombo del precedente, costituisce in sostanza un **accelerometro**, che misura l'accelerazione del sistema non inerziale.

## ESEMPIO 3.6 L'accelerazione di un corpo in caduta libera in un ascensore

Un sistema con origine  $O'$  e asse  $z'$  verticale è solidale ad un ascensore che si muove lungo l'asse  $z$  (parallelo a  $z'$ ) di un sistema inerziale con origine in  $O$ . L'ascensore inizia a salire con accelerazione  $a_t$ , parallela e concorde all'asse  $z'$ , compie poi un moto uniforme e infine decelera con accelerazione  $-a_t$  fino a fermarsi. Se nell'ascensore si compiono esperimenti di caduta libera dei corpi, che accelerazioni  $a'$  si misurano nelle tre fasi del moto?

**Soluzione**

Nel sistema inerziale  $a = g$  e quindi la relazione tra le accelerazioni è

$$g = a' + a_t \Rightarrow a' = g - a_t.$$

Proiettando sull'asse  $z'$  abbiamo nelle tre fasi:

$$\begin{aligned} a_t > 0 & \quad a' = -g - a_t = -(g + a_t), \\ a_t = 0 & \quad a' = -g, \\ a_t < 0 & \quad a' = -g - (-a_t) = -(g - a_t). \end{aligned}$$

Nella fase di accelerazione  $O'$  constata che i corpi cadono con un'accelerazione maggiore di quella di gravità (aumento apparente di peso), nella fase uniforme anche  $O'$  misura  $g$ , nella fase di decelerazione i corpi cadono con un'accelerazione minore di  $g$  (diminuzione apparente di peso). Si riveda a questo proposito la discussione sulla sensazione di peso nel paragrafo 2.8.

Se fosse  $a_t = g$ , come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe  $a' = 0$ : un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad  $O'$ . È la cosiddetta *assenza di peso*, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben



P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

# Elementi di Fisica

## Meccanica e Termodinamica

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

