

Comprende versione

ebook



Manlio De Domenico • Enrico Di Russo

Risolvere Problemi di Fisica



Risolvere Problemi di Fisica

Manlio **De Domenico** · Enrico **Di Russo**



Manlio De Domenico, Enrico Di Russo

Risolvere Problemi di Fisica

Copyright © 2025, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2029 2028 2027 2026 2025

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.

L'Editore

L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.

Stampato presso

Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

Per conto della

EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edises.it

assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 218 5

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma assistenza.edises.it

Indice

I	Teoria	1
1	Strumenti di base	2
1.1	Cosa è un problema di Fisica?	2
1.2	Risolvere un problema di Fisica	2
1.3	I 5 passi della risoluzione di un problema.	3
1.4	Analisi dimensionale.	6
1.5	Struttura di questo testo	8
2	Fondamenti di calcolo vettoriale	10
2.1	Rappresentazione e definizioni fondamentali	10
2.2	Operazioni fondamentali	12
2.3	Identità vettoriali ed operazioni fondamentali	15
2.3.1	Derivata di un vettore	15
2.3.2	Integrale di un vettore	16
2.3.3	Esempio: operazioni elementari con i vettori	16
2.3.4	Esempio: calcoli tipici in un problema di fisica	18
2.3.5	Esempio: teorema dei coseni o di Carnot	20
2.3.6	Esempio: moto di precessione	21
2.4	Derivata temporale di un vettore in rotazione	22
2.5	Campi Scalari.	24
2.6	Campi Vettoriali.	25
2.7	Spunti di riflessione	27
3	Sistemi di riferimento e coordinate	30
3.1	Coordinate cartesiane	31
3.2	Coordinate polari e sferiche.	32
3.3	Coordinate cilindriche	36
3.4	Ascissa curvilinea	37
3.5	Moti relativi e sistemi di riferimento non inerziali	41
3.5.1	Spostamento	42
3.5.2	Velocità	42
3.5.3	Accelerazione	43

3.5.4	Casi particolari e forze apparenti	45
3.6	Spunti di riflessione	47
4	Fondamenti di calcolo differenziale per la fisica	52
4.1	Sviluppo in serie di Taylor	54
4.2	Operatori vettoriali differenziali	56
4.2.1	L'operatore $\vec{\nabla}$	57
4.2.2	L'operatore gradiente	57
4.2.3	L'operatore rotore	58
4.2.4	L'operatore divergenza	58
4.2.5	L'operatore Laplaciano	58
4.2.6	L'operatore D'Alambertiano	59
4.2.7	Relazioni fondamentali tra operatori differenziali	59
4.3	Flussi attraverso superfici chiuse ed aperte	59
4.3.1	Teorema di Gauss	60
4.3.2	Teorema di Stokes	61
4.4	Equazioni differenziali di interesse per fisica ed ingegneria	62
4.4.1	ODE e PDE	63
4.4.2	ODE lineari del primo ordine	66
4.4.3	ODE lineari del secondo ordine	68
4.4.4	ODE non lineari	73
4.5	Trasformata di Fourier	74
4.6	Applicazioni fisiche del teorema della media integrale	76
4.6.1	Meccanica	76
4.6.2	Elettromagnetismo	79
4.6.3	Onde	81
4.7	Spunti di riflessione	83
5	Leggi di conservazione: sistemi isolati e non	85
5.1	Sistemi isolati.	86
5.1.1	Quantità di moto	86
5.1.2	Momento angolare	87
5.1.3	Energia meccanica	88
5.2	Sistemi non isolati.	93
5.2.1	Quantità di moto	93
5.2.2	Momento angolare	94
5.2.3	Energia meccanica	94
5.3	Spunti di riflessione	96
6	Fenomeni oscillatori	101
6.1	Oscillatore armonico semplice	101

6.2	Oscillatore armonico smorzato	104
6.3	Oscillatore armonico smorzato e forzato	108
6.4	Risonanza	112
6.5	Spunti di riflessione	114
II	Problemi	116
7	Esempi classici	117
7.0.1	Moto di un pendolo semplice	117
7.0.2	Moto di un sistema molla - punto materiale	118
7.0.3	Moto di un pendolo di torsione	119
7.0.4	Moto di un pendolo fisico	120
7.0.5	La macchina di Atwood	121
7.0.6	L'orologio a fotone	122
7.0.7	L'atomo di Bohr.	125
7.0.8	Il buco nero classico	127
8	Cinematica del Punto Materiale	129
	Scenario 8.1: Moto su strada ed in pista	129
8.1.1	La frenata	129
8.1.2	Il ciclista	129
8.1.3	Cinematica di una passeggiata	130
8.1.4	100 metri piani	132
8.1.5	Limite di velocità	134
	Scenario 8.2: Dal lancio all'atterraggio: analisi del moto dei proiettili	137
8.2.1	Lancio del razzo.	137
8.2.2	Competizione aerea	137
8.2.3	Bersaglio in caduta libera.	138
8.2.4	Lancio di una palla	138
8.2.5	Contraerea - I	138
8.2.6	Contraerea - II	140
8.2.7	Battaglia sottomarina	141
8.2.8	Lancio con molla	144
	Scenario 8.3: Moto circolare: fondamenti	145
8.3.1	Rotazione sul piano	145
	Soluzioni	147

9 Statica e Dinamica del Punto Materiale	148
Scenario 9.1: Dinamica del quotidiano: spinte, trazioni e diagrammi delle forze	148
9.1.1 Spingere una barca in acqua	148
9.1.2 Spingere un satellite	148
9.1.3 Forze di contatto	149
9.1.4 Massa trascinata su un piano liscio	150
9.1.5 Masse sospese su carrucola	151
9.1.6 Cassa su un piano liscio	152
9.1.7 Massa trascinata su un piano scabro	153
9.1.8 Massa su piano orizzontale e pesi sospesi.	155
Scenario 9.2: Piani inclinati: un approccio metodico alla dinamica	155
9.2.1 Massa trascinata su un piano inclinato	156
9.2.2 Massa spinta su piano inclinato	157
9.2.3 Massa su doppio piano inclinato.	158
9.2.4 Due masse su un piano inclinato.	161
Scenario 9.3: L'automobile: un caso studio di fisica applicata.	162
9.3.1 Automobile in caduta libera.	162
9.3.2 Automobile in frenata	163
9.3.3 Automobile su strada curva	164
9.3.4 Automobile su sopraelevata.	165
Scenario 9.4: Dinamica rotazionale	167
9.4.1 Giostra a seggiolini	167
9.4.2 Peso rotante con molla	168
9.4.3 Looping	169
Scenario 9.5: Forze elastiche	170
9.5.1 Piano inclinato, molla e peso	170
9.5.2 Molla, fune e peso sospeso	170
9.5.3 Cassa su un piano scabro	171
9.5.4 Rampe e molla	173
9.5.5 Molla con due pesetti	173
9.5.6 Massa su piano liscio e molla	175
Scenario 9.6: Meccanica degli urti	175
9.6.1 Urto anelastico	176
9.6.2 Esplosione e rampa	176
9.6.3 Molla tra due corpi	177

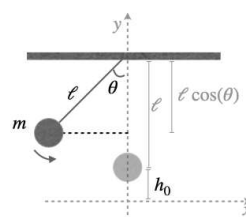
9.6.4	Urto con rampa e attrito	178
9.6.5	Carrello con effetto fionda	180
Soluzioni		184
10 Statica e Dinamica del Corpo Rigido		185
Scenario 10.1: Nello spazio		185
10.1.1	Per aspera ad astra	185
10.1.2	Questione di quota	187
10.1.3	Lancio del satellite	190
10.1.4	Rendez-vous spaziale	191
Scenario 10.2: Il volano nei sistemi meccanici		194
10.2.1	Disco semplice	194
10.2.2	Disco con peso	194
10.2.3	Trascinamento di un cilindro	196
10.2.4	Carrello e puleggia	197
10.2.5	Volano e molla	198
10.2.6	Sbarra con pesetto	200
Scenario 10.3: Corpi rigidi su piani inclinati		202
10.3.1	Rotolamento di una sfera	202
10.3.2	Cilindro su piano inclinato con peso	204
Scenario 10.4: Urti avanzati: dal punto materiale al corpo rigido		206
10.4.1	Sbarra rotante colpita da un proiettile - I	206
10.4.2	Sbarra rotante colpita da un proiettile - II	207
10.4.3	Disco rotante colpito da un proiettile - I	208
10.4.4	Disco rotante colpito da un proiettile - II	212
10.4.5	Disco colpito da un proiettile	214
Soluzioni		216
11 Elettrostatica e correnti		217
Scenario 11.1: Dalla legge di Coulomb al teorema di Gauss		217
11.1.1	Push-pull	217
11.1.2	Elettrogravità	220
11.1.3	Moto lungo linee equipotenziali	222
11.1.4	Sfere cariche nello spazio	223
11.1.5	Conduttori concentrici	225

Scenario 11.2: Circuiti elettrici e correnti	227
11.2.1 Deflettore elettrostatico	227
11.2.2 Circuito con resistori e condensatore.	229
A Tabella della notazione	231
B Derivate e integrali fondamentali	232
C Ringraziamenti	233

7 | Esempi classici

Problema 7.0.1 | Moto di un pendolo semplice

Quando l'energia meccanica si conserva, la sua derivata rispetto al tempo ci fornisce un modo pratico per ricavare la legge oraria per almeno una delle grandezze dinamiche in gioco. Consideriamo un pendolo semplice, con una massa m (punto materiale) appeso ad un filo ideale di lunghezza ℓ , come in figura.



Ad un qualunque istante del moto del pendolo sappiamo che l'energia meccanica totale si conserva:

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgh(t) = \text{costante},$$

dove $v(t) = \ell\dot{\theta}(t)$ è la velocità del pendolo al tempo t e $h(t) = \ell + h_0 - \ell \cos \theta(t)$ è l'altezza a cui questo si trova al tempo t . Per via della conservazione, sappiamo che $\dot{E}(t) = 0$, che si traduce nella seguente equazione:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}m\ell^2 (2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t)) + mg(-\ell \times (-\sin \theta(t))\dot{\theta}(t)), \\ &= \ell\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t), \quad \implies \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t), \end{aligned}$$

che, nell'approssimazione di piccole oscillazioni ($\sin \theta(t) \approx \theta(t)$) porta a

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta(t), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

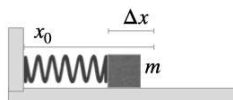
che è la ben nota equazione del moto per il pendolo semplice in regime di piccole oscillazioni, ossia l'equazione del moto armonico semplice.

Utilità pratica.

La conoscenza dell'equazione del moto per un sistema fisico così semplice permette – dalla misura di alcune grandezze fisiche quali il periodo ($T = 2\pi/\omega$) o la lunghezza del pendolo – di stimare il valore di una costante fondamentale, come l'accelerazione gravitazionale.

Problema 7.0.2 | Moto di un sistema molla - punto materiale

Analogamente al caso affrontato nel problema precedente, quando l'energia meccanica si conserva, la sua derivata rispetto al tempo ci fornisce un modo pratico per ricavare la legge oraria per almeno una delle grandezze dinamiche in gioco. Consideriamo un sistema dove un punto materiale di massa m è legato ad una molla ideale, comprimendola di una lunghezza Δx rispetto alla posizione di equilibrio x_0 , come in figura.



Ad un qualunque istante del moto del pendolo sappiamo che l'energia meccanica totale si conserva:

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) = \text{costante},$$

dove $v(t) = \dot{x}(t)$ è la velocità del punto materiale al tempo t e $x(t)$ è la posizione in cui questo si trova al tempo t . Per via della conservazione, sappiamo che $\dot{E}(t) = 0$, che si traduce nella seguente equazione:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}m(2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)) + \frac{1}{2}k(2x(t)\dot{x}(t)), \\ &= m\ddot{x}(t) + kx(t), \quad \implies \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t), \end{aligned}$$

che può essere scritta nella forma

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

che è, come nel caso del problema precedente, l'equazione del moto armonico semplice, la cui soluzione generale è del tipo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

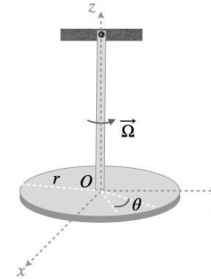
dove l'ampiezza di oscillazione A e la phase ϕ possono essere calcolati una volta fissate le condizioni iniziali.

Utilità pratica.

La conoscenza dell'equazione del moto per un sistema fisico così semplice permette – dalla misura di alcune grandezze fisiche quali il periodo ($T = 2\pi/\omega$) o la massa del blocco – di stimare il valore della costante elastica della molla.

Problema 7.0.3 | Moto di un pendolo di torsione

Un pendolo di torsione è un sistema composto da un filo sottile, generalmente in metallo, a cui è appeso un corpo, solitamente una sfera di piombo. Il filo è avvolto su se stesso in modo che, quando viene ruotato attorno al suo asse, si sviluppi una torsione. Quando il filo viene rilasciato, il pendolo inizia a oscillare lungo l'asse del filo, come in figura. La torsione del filo produce una forza di richiamo, nota come momento di torsione, che agisce sul pendolo. Questa forza dipende dall'angolo di torsione del filo. Come risultato, il pendolo si muove in modo oscillatorio, tornando sempre verso la sua posizione di equilibrio.



Come nei casi precedenti, l'energia meccanica si conserva e la sua derivata rispetto al tempo ci fornisce un modo pratico per ricavare la legge oraria per almeno una delle grandezze dinamiche in gioco. Ricordiamo che il momento torcente in questo caso vale, in modulo, $M(t) = -k\theta(t)$, dove k è la costante di torsione del filo. Indichiamo la velocità angolare di questo pendolo con $\Omega(t) = \dot{\theta}(t)$ e il suo momento d'inerzia con I , per cui $M(t) = I\alpha(t)$, dove α è l'accelerazione angolare. Ad un qualunque istante del moto del pendolo sappiamo che l'energia meccanica totale si conserva:

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}I\Omega^2(t)}_{\text{Cin.rotaz.}} + \underbrace{\frac{1}{2}k\theta^2(t)}_{\text{Pot.elast.}} = \text{costante}.$$

La conservazione dell'energia ($\dot{E}(t) = 0$) si traduce nella seguente equazione:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}I(2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t)) + \frac{1}{2}k(2\theta(t)\dot{\theta}(t)), \\ &= I\ddot{\theta}(t) + k\theta(t), \quad \implies \ddot{\theta}(t) = -\frac{k}{I}\theta(t), \end{aligned}$$

che può essere scritta nella forma

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta(t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}},$$

che è la ben nota equazione del moto per il pendolo semplice, ossia l'equazione del moto armonico semplice. Si noti che la pulsazione ω (frequenza di oscillazione del pendolo attorno al punto di equilibrio del pendolo) è diversa dalla velocità angolare $\Omega(t)$ (velocità con cui il pendolo ruota intorno al suo punto di sospensione).

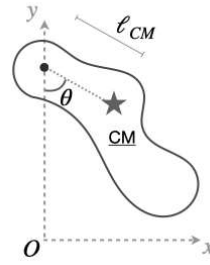
Utilità pratica.

La conoscenza dell'equazione del moto per un sistema fisico così semplice permette – dalla misura di alcune grandezze fisiche quali il periodo ($T = 2\pi/\omega$) o il momento di inerzia del sistema – di stimare il valore della costante di torsione del filo, o la costante di gravitazione universale di Newton.

Problema 7.0.4 | Moto di un pendolo fisico

Un pendolo fisico è un sistema costituito da una massa puntiforme, solitamente un oggetto in metallo, sospeso da un filo o un'asta rigida. Quando il pendolo viene sollevato e rilasciato, inizia a oscillare lungo un piano verticale sotto l'effetto della forza di gravità.

L'energia meccanica si conserva e la sua derivata rispetto al tempo ci fornisce un modo pratico per ricavare la legge oraria per almeno una delle grandezze dinamiche in gioco. Indichiamo la velocità angolare di questo pendolo con $\Omega(t) = \dot{\theta}(t)$, e con m la sua massa. Ad un qualunque istante del moto, l'energia meccanica totale è data da:



$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}I\Omega^2(t)}_{\text{Cin. rotaz.}} + \underbrace{mgh_{CM}(t)}_{\text{Pot. grav.}} = \text{costante},$$

dove I è il momento di inerzia del corpo rigido che costituisce il pendolo e $h_{CM}(t) = h_0 + \ell_{CM}(1 - \cos \theta(t))$ indica l'altezza del centro di massa al tempo t . La conservazione dell'energia ($\dot{E}(t) = 0$) si traduce nella seguente equazione:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}I(2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t)) + mg(\ell_{CM} \sin \theta(t)\dot{\theta}(t)), \\ &= I\ddot{\theta}(t) + mg\ell_{CM}\theta(t), \quad \implies \ddot{\theta}(t) \simeq -\frac{mg\ell_{CM}}{I}\theta(t), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'approssimazione di piccole oscillazioni ($\sin \theta(t) \simeq \theta(t)$) per poter arrivare alla forma

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta(t), \quad \omega = \sqrt{\frac{mg\ell_{CM}}{I}}$$

che è la ben nota equazione del moto armonico semplice. Si noti che la pulsazione ω (frequenza di oscillazione del pendolo attorno al punto di equilibrio del pendolo) è diversa dalla velocità angolare $\Omega(t)$ (velocità con cui il pendolo ruota intorno al suo punto di sospensione).

Utilità pratica.

Il periodo di oscillazione di un pendolo fisico può essere utilizzato per misurare la costante di gravitazione universale di Newton, così come per determinare il centro di massa e il momento di inerzia di oggetti complessi.

Problema 7.0.5 | La macchina di Atwood

La risoluzione di un problema che coinvolge una macchina semplice come quella di Atwood, generalmente richiede l'identificazione delle forze agenti sugli elementi del sistema: i due blocchi connessi tramite un filo a contatto con una carrucola, e la carrucola stessa nel caso in cui questa non sia ideale (ma sia, per esempio, un disco omogeneo di raggio R e massa μ posto ad una quota h). In mancanza di resistenza dell'aria, il caso più comunemente analizzato, è possibile sfruttare la conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale e lo stato finale del sistema. Nello stato iniziale, l'energia meccanica è tutta potenziale gravitazionale per i due blocchi e la carrucola, rispettivamente:

$$E_{\text{iniziale}} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \mu g h,$$

dove il contributo cinetico è nullo perchè nessun corpo è in moto traslazionale o rotazionale. Nello stato finale, l'energia meccanica ha sia un contributo di energia potenziale gravitazionale sia un contributo cinetico, quest'ultimo dovuto al moto dei due blocchi (si noti che la velocità dei 2 blocchi è la stessa in modulo) e alla rotazione della carrucola:

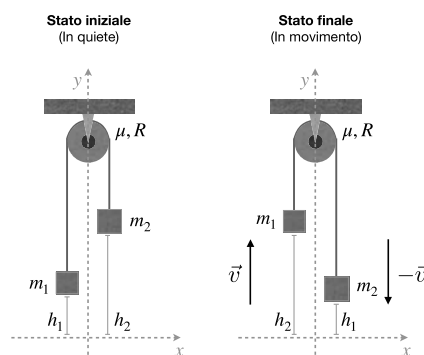
$$E_{\text{finale}} = m_1 g h_2 + m_2 g h_1 + \mu g h + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^2}_{\text{Cin. trasl. blocco 1}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v^2}_{\text{Cin. trasl. blocco 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{\text{carr}} \omega^2}_{\text{Cin. rotaz. carrucola}},$$

con $I_{\text{carr}} = \frac{1}{2} \mu R^2$ e $\omega = \frac{v}{R}$ in condizioni standard, con filo inestensibile. Da cui segue $\frac{1}{2} I_{\text{carr}} \omega^2 = \frac{1}{4} \mu v^2$. Per la conservazione dell'energia meccanica totale, da $E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}}$, e ponendo $\Delta h = h_2 - h_1$ segue:

$$-m_1 g \Delta h + m_2 g \Delta h = \frac{1}{2} v^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{\mu}{2} \right),$$

da cui otteniamo la velocità:

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \times \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{\mu}{2}}}.$$



Analizziamo questo risultato in casi specifici di interesse fisico. Per esempio, se la carrucola fosse ideale ($\mu = 0$) allora il denominatore sarebbe più piccolo di quello nel caso non ideale, e di conseguenza la velocità dei due blocchi sarebbe più elevata. Questo risultato ha senso, poiché non viene utilizzata energia per far ruotare la carrucola, e quindi l'energia corrispondente viene utilizzata per incrementare quella cinetica. Un altro risultato interessante è che per $m_2 = m_1$ la velocità è nulla: se i blocchi hanno la stessa massa, come è lecito ed intuitivo aspettarsi, non si muoveranno dal loro stato iniziale: il sistema rimane in equilibrio.

Andiamo dunque a calcolare l'accelerazione dei due blocchi, considerando la cinematica del moto verticale:

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, v(t) = v_0 + a(t - t_0),$$

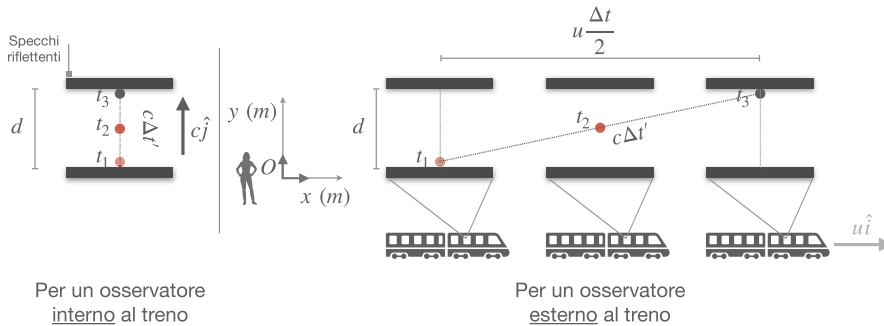
con $t_0 = 0$, $y_0 = h_1$, $y(t_{\text{finale}}) = h_2$ e $v_0 = 0$. Otteniamo il tempo $t_{\text{finale}} = v/a$ dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima, ottenendo $a = \frac{v^2}{2\Delta h}$. Sostituendo a v^2 l'espressione trovata in precedenza, avremo infine:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{\mu}{2}}g,$$

che chiaramente corrisponde al risultato ottenuto utilizzando il classico metodo delle forze. Da notare che per $m_2 \gg m_1$ e $m_2 \gg \mu$ la velocità si riduce a $v \simeq \sqrt{2g\Delta h}$ e, di conseguenza, $a \simeq g$: equivalente al caso di caduta libera di un corpo (in questo caso m_2 è così pesante da rendere trascurabile l'influenza di m_1 e della massa della carrucola sul moto).

E' anche interessante notare che se la carrucola è eccessivamente pesante rispetto ai blocchi ($\mu \gg m_1, m_2$) allora $v \simeq 0$ e $a \simeq 0$: sostanzialmente il sistema rimane in equilibrio perché l'energia potenziale dei due blocchi non è sufficiente a soddisfare il bisogno di energia per far ruotare la carrucola.

Problema 7.0.6 | L'orologio a fotone



Un altro esempio classico, utilizzato per illustrare i concetti di tempo e relatività, è dato dall'orologio a fotone (*photon clock*). In questo esperimento teorico¹, un segnale luminoso – che per semplicità può essere considerato una particella singola, come un fotone, che si muove alla velocità della luce – viene riflesso tra due specchi perfettamente paralleli posti ad una distanza d nota. Il tempo Δt che impiega il fotone per viaggiare da uno specchio all'altro e ritorno può essere utilizzato per misurare lo scorrere del tempo, come un vero e proprio orologio. In sostanza, ogni “ticchettio” corrisponde a mezzo ciclo, quindi due rintocchi definiscono un ciclo completo: l'orologio misurerà il tempo in unità di tale ciclo, in modo del tutto analogo a quello di un comune orologio a pendolo da salotto.

Supponiamo che questo sistema si trovi a bordo di un treno che si muove a velocità costante $\vec{u} = u\hat{i}$ rispetto ad un sistema di riferimento fisso (es., la stazione del treno). Consideriamo un osservatore O' che si trova in un sistema di riferimento inerziale solidale con l'orologio (es., a bordo del treno), ed un osservatore O che si trova in un sistema di riferimento fisso come la stazione del treno.

Indicando con $\Delta t'$ l'intervallo temporale misurato da O' e con Δt quello misurato da O , da domanda che ci poniamo è: i due osservatori concorderanno nella loro misura di un ciclo? Chiaramente consideriamo condizioni ideali, e supponiamo il caso ideale in cui entrambi gli osservatori siano dotati di un sistema di monitoraggio ad altissima definizione che permette loro di contare, senza errori, il numero di cicli dell'orologio.

Per l'osservatore interno al treno, il percorso del fotone è verticale e la distanza percorsa in un viaggio di andata e ritorno è $2d$. Indicando il modulo della velocità della luce con c , l'intervallo temporale $\Delta t'$ misurato durante un ciclo è:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

Possiamo definire $\Delta t'$ come il “tempo proprio” che viene misurato da un qualunque osservatore solidale con l'orologio.

Per l'osservatore esterno, che vede il treno muoversi con velocità \vec{u} , il percorso del fotone è naturalmente obliquo – non verticale, come per l'osservatore solidale O' – e pertanto deve necessariamente essere maggiore di $2d$. Poiché lo spostamento lungo mezzo ciclo sarà pari a $c\frac{\Delta t}{2}$, in generale ci aspettiamo $c\Delta t \geq 2d$. Infatti, il percorso del fotone dipenderà dalla velocità \vec{u} del treno: nel caso limite $u = 0$, cioè quando il treno è in quiete, O misurerà lo stesso intervallo temporale, ossia $\Delta t = \Delta t'$. Ma se $u > 0$, durante l'intervallo di tempo $\frac{\Delta t}{2}$ il treno si sposterà orizzontalmente coprendo una distanza pari a $u\frac{\Delta t}{2}$. Osservando il triangolo rettangolo che si viene a formare durante mezzo ciclo – tra gli istanti t_1 e t_3 – è possibile utilizzare il teorema

¹In una versione realistica di questo esperimento bisognerebbe considerare effetti aggiuntivi, che in questo caso trascuriamo per dimostrare che il risultato finale non dipende da questi.

di Pitagora per trovare la distanza percorsa dal fotone:

$$\left(c \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = d^2 + (u\Delta t)^2.$$

Semplificando e risolvendo per Δt , otteniamo:

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{d^2}{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Poiché la velocità del treno sarà sempre minore di quella della luce, il denominatore è una quantità minore di 1: di conseguenza, $\Delta t \geq \Delta t'$, ossia il tempo misurato dall'osservatore esterno è "dilatato" rispetto al tempo proprio misurato dall'osservatore in movimento con il treno. Questo effetto, noto come *dilatazione temporale*, sta alla base della teoria della relatività ristretta sviluppata da Einstein. I due osservatori saranno sempre in disaccordo sulla quantità di tempo misurata, tranne nel caso $u = 0$, cioè quando il treno è in quiete ed entrambi sono in sistemi di riferimento solidali con l'orologio. La dilatazione temporale è uno dei concetti più intriganti della teoria della relatività.

Utilità pratica.

Il paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un esperimento mentale in relatività ristretta che descrive una situazione in cui un gemello viaggia nello spazio intergalattico a una velocità prossima a quella della luce, mentre l'altro rimane sulla Terra. Al suo ritorno a casa, il gemello viaggiatore scopre di essere più giovane del gemello rimasto sulla Terra, proprio a causa della dilatazione temporale. Questo paradosso non è solo una curiosità teorica: è stato confermato attraverso esperimenti con orologi atomici molto precisi su aerei e satelliti che hanno mostrato minime differenze di tempo a causa delle loro velocità rispetto alla superficie terrestre.

Un esperimento per testare questo apparente paradosso fu condotto per la prima volta da Joseph Hafele e Richard Keating nel 1971^a. I due scienziati utilizzarono quattro orologi atomici molto precisi, basati sulle frequenze di vibrazione degli atomi di cesio. Gli orologi furono inizialmente sincronizzati con degli orologi a terra, ospitati presso lo *United States Naval Observatory*, e successivamente furono installati a bordo di un aereo di linea che circumnavigò la Terra.

I risultati dell'esperimento confermarono la previsione relativistica: gli orologi atomici che avevano viaggiato mostravano una piccola, seppur apprezzabile di qualche μs , differenza di tempo rispetto a quelli rimasti a terra.

Questa discrepanza non poteva essere spiegata da nessun'altra teoria fisica nota all'epoca, fornendo una solida conferma sperimentale della dilatazione temporale con orologi macroscopici.

Di fatto, l'esperimento ha importanti implicazioni pratiche, in particolare per il funzionamento dei sistemi di navigazione satellitare come il GPS, che devono tenere conto delle differenze relativistiche nel tempo misurato dai satelliti in orbita rispetto agli orologi sulla superficie terrestre per mantenere la precisione necessaria.

^a<https://www.science.org/doi/10.1126/science.177.4044.166>

Curiosità.

I raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle ad alta energia provenienti dallo spazio esterno, che quando interagiscono con l'atmosfera terrestre producono nuove particelle, tra cui i muoni. I muoni hanno una vita media molto breve, circa $2.2 \mu\text{s}$: per questo motivo, non dovrebbero essere in grado di raggiungere la superficie terrestre prima di decadere in elettroni (o positroni) e neutrini. Tuttavia, poiché viaggiano a velocità prossime a quella della luce, il loro tempo proprio è soggetto al fenomeno della dilatazione temporale: pertanto la loro vita media misurata da un osservatore in quiete sulla Terra si dilata e gli permette di essere rilevati a terra.

Problema 7.0.7 | L'atomo di Bohr

Si consideri un atomo di idrogeno come costituito da un nucleo (protone) di carica $+e$ e da un elettrone di carica $-e$ che ruota attorno al nucleo lungo un'orbita circolare di raggio r . Si assuma che il momento angolare dell'elettrone sia quantizzato² secondo il principio di Bohr, cioè che si possa scrivere $L = n\hbar$, dove n è un numero intero positivo. Cominciamo calcolando la velocità v dell'elettrone in orbita e determinando l'espressione per il raggio r_n dell'orbita in funzione del numero quantico n .

L'elettrone, di massa m , si muove lungo un'orbita circolare attorno al nucleo a causa dell'attrazione elettrostatica tra la carica $-e$ dell'elettrone e la carica $+e$ del

²Lo studente non necessita di nozioni di meccanica quantistica in questo caso: basta immaginare che il momento angolare in questione può assumere solo valori specifici, multipli di una quantità costante fondamentale nota come \hbar .

protone. Questa forza è descritta, in modulo, dalla legge di Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (7.1)$$

dove r è il raggio dell'orbita e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. Questa forza fornisce la necessaria forza centripeta per mantenere l'elettrone in orbita, per cui abbiamo:

$$F_{\text{centr}} = \frac{mv^2}{r} \quad (7.2)$$

Uguagliando la forza centripeta alla forza di Coulomb, otteniamo

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (7.3)$$

da cui isoliamo la velocità:

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr}. \quad (7.4)$$

Secondo l'ipotesi di Bohr, il momento angolare L dell'elettrone è quantizzato, per cui vale la relazione

$$L = mvr = n\hbar, \quad (7.5)$$

da cui possiamo esprimere la velocità come

$$v = \frac{n\hbar}{mr}. \quad (7.6)$$

Sostituendo l'espressione di v nell'equazione derivata dall'uguaglianza delle forze, otteniamo

$$\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr}, \quad (7.7)$$

da cui, risolvendo rispetto ad r , ed indicando esplicitamente la dipendenza dal numero quantico n , otteniamo:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2. \quad (7.8)$$

Questo è il raggio quantizzato dell'orbita dell'elettrone per un numero quantico principale n . Il raggio più piccolo, per $n = 1$, è noto come *raggio di Bohr* a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot (1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Questo risultato, ottenuto a partire da principi basici della meccanica classica è in ottimo accordo con il risultato dei calcoli ben più sofisticati della meccanica quantistica. L'energia cinetica dell'elettrone in orbita è data da $K = \frac{1}{2}mv^2$, per cui utilizzando il risultato precedente per v^2 otteniamo:

$$K_n = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}, \quad (7.10)$$

mentre l'energia potenziale elettrostatica tra il nucleo e l'elettrone è data da

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}. \quad (7.11)$$

L'energia totale E_n dell'elettrone è ottenuta dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, per cui abbiamo:

$$E_n = K_n + U_n = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (7.12)$$

Si noti come l'energia totale E_n dell'elettrone risulta negativa. Questo risultato ha un significato fisico molto importante: indica che l'elettrone si trova in uno stato legato al nucleo. Un'energia negativa implica che, per liberare l'elettrone dal nucleo (cioè per ionizzare l'atomo), è necessario fornire energia pari al valore assoluto dell'energia totale $|E_n|$. Si noti che $U_n = -2K_n$ in questa circostanza: un risultato che si ripresenta in tutti i sistemi dove la forza di legame è centrale e mostra una dipendenza di tipo $1/r^2$, un risultato noto come il *teorema del viriale*. In tal caso, l'energia totale è sempre pari a metà dell'energia potenziale. Sebbene il modello di Bohr sia un modello molto semplificato e non accurato, secondo la moderna meccanica quantistica, è notevole come riesca a fornire una buona approssimazione per sistemi semplici come l'atomo di idrogeno. Si noti che, tuttavia, non descrive correttamente atomi più complessi o gli effetti di natura non classica, che richiedono quindi un trattamento della meccanica quantistica più completo.

Problema 7.0.8 | Il buco nero classico

Consideriamo un pianeta di massa M e raggio R , che per semplicità assumiamo essere una sfera perfettamente omogenea assolutamente in quiete. Un oggetto di massa m è posizionato sulla superficie di questo pianeta e ci chiediamo quale sia la velocità di fuga v_{fuga} per m . Inoltre, assumendo che il pianeta sia adesso in rotazione con velocità angolare Ω , calcoleremo come cambia la velocità di fuga.

Da una parte, si tratta di un problema classico di teoria gravitazionale. Dall'altra, ci fornisce una base per chiederci quale raggio R^* dovrebbe avere il pianeta per impedire la fuga anche di un fotone, assumendo $v_{\text{fuga}} = c$, dove c è la velocità della luce. Questa semplice richiesta si allinea con una delle proprietà di un oggetto astrofisico molto speciale: il buco nero. Infatti, è possibile ottenere alcune proprietà

Manlio De Domenico • Enrico Di Russo

Risolvere Problemi di Fisica

Accedi ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai **contenuti digitali**.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

