memorix

MATEMATICA_4

Goniometria, trigonometria, logaritmi, esponenziali e progressioni

Area scientifica

EdiSES

memorix

Matematica 4

Goniometria, trigonometria, logaritmi, esponenziali e progressioni

EdiSES

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2019 2018 2017 2016 2015

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Progetto grafico:
ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione:
EdiSES – Napoli

Grafica di copertina:
Etacom – Napoli

Fotoincisione:
R.ES. Centro Prestampa S.n.c. – Napoli

Stampato presso:
Pittogramma S.r.l. – Napoli

Per conto della
EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edises.it info@edises.it

ISBN 978 88 6584 555 4

Memorix

Chiari nell'esposizione, esaurienti nei contenuti, gradevoli nella grafica, i Memorix si propongono di agevolare – come il nome stesso suggerisce – il processo di memorizzazione, stimolando nel lettore sia l'attenzione visiva sia la capacità di associazione tra concetti, così da "trattenerli" più a lungo nella mente. Schemi, uso frequente di elencazioni e neretti, parole-chiave, curiosità, brevi raccordi interdisciplinari, test di verifica a fine capitolo: ecco le principali caratteristiche di questi tascabili.

Utili per apprendere rapidamente i concetti base di una disciplina o per ricapitolarne gli argomenti principali, i libri della collana Memorix si rivolgono agli studenti della scuola superiore, a chi ha già intrapreso gli studi universitari, a quanti si accingono ad affrontare un concorso. Ma anche a tutti coloro che vogliono riappropriarsi di conoscenze che la mancanza di esercizio ha affievolito o semplicemente vogliono farsi un'idea su materie che non hanno fatto parte della propria esperienza scolastica o, ancora, vogliono avere a portata di mano uno strumento da consultare velocemente all'occorrenza.

Matematica 4

Nella prima parte del volume vengono proposti tutti i concetti di base della goniometria a cui segue lo studio delle equazioni e disequazioni goniometriche e il problema della determinazione di tutte le grandezze caratteristiche di un qualsiasi tipo di triangolo.

Nella seconda parte viene introdotto il concetto di logaritmo e viene affrontata la risoluzione delle equazioni e disequazioni logaritmiche ed esponenziali.

L'ultima parte tratta le progressioni aritmetiche e geometriche, sia da un punto di vista teorico che nelle loro applicazioni pratiche.

Gli argomenti sono esposti secondo una sequenza logica e una gradualità che ne rende facilmente comprensibili tutti gli aspetti sia pratici sia teorici.

La trattazione formale e simbolica è sempre affiancata da parti discorsive che tendono a presentare in modo intuitivo i concetti teorici. Particolare enfasi è posta sulla risoluzione degli esercizi e sull'applicazione dei concetti formalizzati.

Sommario

1. Gli angoli e le funzioni circolari

1.1. Definizione di angolo 1
1.2. Misura in gradi e in radianti 2
1.3. Conversioni 4
1.4. Coordinate cartesiane 5
1.5. La circonferenza goniometrica 6
1.6. Seno e coseno di un angolo 8
1.7. Considerazioni sui valori di seno e coseno 9
1.8. Tangente di un angolo 17
1.9. Considerazioni sui valori della tangente 18
1.10. Cotangente di un angolo 25
1.11. Secante e cosecante di un angolo 26
Test di verifica 29

2. Relazioni fondamentali della goniometria

2.1. Prima relazione fondamentale 35
2.2. Seconda relazione fondamentale 37
2.3. Terza relazione fondamentale 38
2.4. Quarta e quinta relazione fondamentale 39
2.5. Esprimere le funzioni circolari in termini di una sola funzione 43
Seno 43
Coseno 44
Tangente 45
Cotangente 47
Tabella riassuntiva 48
Test di verifica 50

3. Funzioni circolari per angoli associati ed angoli notevoli

3.1. Angoli complementari 55
3.2. Angoli che differiscono di 90° 57
3.3. Angoli supplementari 58
3.4. Angoli che differiscono di 180° 60
3.5. Angoli la cui somma è 270° 62
3.6. Angoli che differiscono di 270° 64
3.7. Angoli esplementari 65

3.8. Le funzioni circolari per angoli di 30° e 60° 67
3.9. Le funzioni circolari per angoli di 45° 70
3.10. Tabella riassuntiva 73
3.11. La sezione aurea di un segmento 74
3.12. Le funzioni circolari per angoli di 18° 77
Test di verifica 80

4. Formule goniometriche
4.1. Formule di addizione e di sottrazione 85
4.2. Formule di duplicazione 91
4.3. Formule di triplicazione 94
4.4. Formule di bisezione 96
4.5. Funzioni circolari per angoli compresi tra 0° e 90° 100
4.6. Formule di prostaferesi 102
4.7. Formule di Werner 105
4.8. Formule parametriche 105
Test di verifica 109

5. Equazioni goniometriche
5.1. Equazioni elementari 115
Equazioni in seno 115
Equazioni in coseno 120
Equazioni in tangente 123
Equazioni in cotangente 127
5.2. Equazioni riducibili ad equazioni elementari 130
Equazioni in seno 130
Equazioni in coseno 131
Equazioni in tangente 131
Equazioni in cotangente 132
5.3. Equazioni lineari 134
Equazione lineare omogenea 134
Equazione lineare completa 135
Metodo dell'angolo ausiliario 137
5.4. Equazioni di secondo grado 140
Equazione in una sola funzione circolare 140
Equazione omogenea in seno e coseno 141
Equazione completa in seno e coseno 142
Test di verifica 144

6. Disequazioni goniometriche
6.1. Disequazioni elementari 151
Disequazioni in seno 151
Disequazioni in coseno 155
Disequazioni in tangente 159
Disequazioni in cotangente 164
6.2. Disequazioni riducibili a disequazioni elementari 169
6.3. Disequazioni lineari 171
Disequazione lineare omogenea 171
Disequazione lineare completa 172
Metodo dell'angolo ausiliario 175
6.4. Disequazioni di secondo grado 177
Disequazione in una sola funzione circolare 177
Disequazione omogenea in seno e coseno 180
Disequazione completa in seno e coseno 180
Test di verifica 183

7. Trigonometria
7.1. Relazioni trigonometriche per un triangolo rettangolo 187
7.2. Teorema dei seni 193
7.3. Teorema della corda 197
7.4. Teorema delle proiezioni 197
7.5. Teorema di Carnot o del coseno 198
7.6. Teorema di Nepero (o delle tangenti) 199
7.7. Formule di Briggs 202
7.8. Risoluzione di un triangolo qualsiasi 205
7.9. Formule per il calcolo dell'area di un triangolo 211
7.10. Formule per il calcolo del raggio della circonferenza circoscritta e inscritta in un triangolo 214
Test di verifica 218

8. I logaritmi
8.1. La funzione esponenziale 225
8.2. Definizione di logaritmo e proprietà fondamentali 226
8.3. La funzione logaritmica 227
8.4. Teoremi fondamentali dei logaritmi 229
Teorema del prodotto 229
Teorema del rapporto 230

Teorema della potenza 231
Teorema della radice 232
8.5. Sistemi di logaritmi e cambiamento di base 234
Sistemi di logaritmi 234
Teorema del cambiamento di base 235
Test di verifica 237

9. Equazioni esponenziali e logaritmiche
9.1. Equazioni esponenziali riducibili ad uguaglianze di potenze nella stessa base 241
9.2. Equazioni esponenziali riducibili ad equazioni algebriche attraverso un'incognita supplementare 243
9.3. Equazioni logaritmiche 244
9.4. Equazioni esponenziali risolvibili mediante i logaritmi o graficamente 249
Test di verifica 252

10. Disequazioni esponenziali e logaritmiche
10.1. Disequazioni esponenziali riducibili ad uguaglianze di potenze nella stessa base 255
10.2. Disequazioni esponenziali riducibili ad equazioni algebriche attraverso un'incognita supplementare 256
10.3. Disequazioni esponenziali risolvibili mediante i logaritmi 257
10.4. Disequazioni logaritmiche 260
Test di verifica 265

11. Le progressioni
11.1. Le successioni 269
11.2. Le progressioni aritmetiche 269
11.3. Relazioni tra i termini di una progressione aritmetica 271
11.4. Somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica 271
11.5. Le progressioni geometriche 274
11.6. Relazioni tra i termini di una progressione aritmetica 275
11.7. Prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica 276
11.8. Somma di termini consecutivi di una progressione geometrica 277
11.9. Somma di tutti i termini di una progressione geometrica decrescente 280
Test di verifica 282

8. I logaritmi

I punti-chiave

- ➢ Conoscere le caratteristiche della funzione esponenziale e di quella logaritmica.
- ➢ Conoscere le proprietà fondamentali dei logaritmi.
- ➢ Saper utilizzare le proprietà dei logaritmi per semplificare espressioni algebriche.
- ➢ Saper operare un cambiamento di base logaritmica.

8.1. La funzione esponenziale

Indicato con R l'insieme dei numeri reali e con R^+ l'insieme dei numeri reali positivi, si può considerare un qualsiasi $a \in R^+$ e definire la **funzione esponenziale di base *a***:

$$f : x \longrightarrow a^x$$

Questa funzione compie l'operazione di associare ad un numero reale x il numero reale positivo a^x.

Se la base è pari al numero di Nepero e (pari a circa 2,71828), allora la f è detta semplicemente **funzione esponenziale**.

$$f : x \longrightarrow e^x$$

La funzione esponenziale è definita in tutto l'insieme R, ossia può associare un valore a qualsiasi numero reale x. Si dice in tal caso che il **dominio** o il **campo di esistenza** della funzione esponenziale è l'insieme R.

I numeri associati dalla funzione esponenziale ai valori x spaziano su tutto l'insieme dei numeri reali positivi R^+. Pertanto si dice che il **codominio** o l'**immagine** della funzione esponenziale è l'insieme R^+.

Se la base $a > 1$ la funzione esponenziale si comporta in modo da associare a due valori x_1 ed x_2, tali che $x_1 < x_2$, due valori corrispondenti a^{x_1} e a^{x_2} tali che $a^{x_1} < a^{x_2}$. In questo caso si dice che la funzione esponenziale è **strettamente crescente** in R. Quindi si ha:

Equazione 8-1 $$a > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Se la base $0 < a < 1$ la funzione esponenziale si comporta in modo da associare a due valori x_1 ed x_2, tali che $x_1 < x_2$, due valori corrispondenti a^{x_1} e a^{x_2} tali che $a^{x_1} > a^{x_2}$. In questo caso si dice che la funzione esponenziale è **strettamente decrescente** in R. Quindi si ha:

Equazione 8-2 $$0 < a < 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Si noti invece che se $a = 1$ la funzione esponenziale si riduce alla funzione costante pari ad 1.

In Figura 8-1 sono mostrate le funzioni esponenziali per $a > 1$ ed $0 < a < 1$ in un sistema di riferimento cartesiano.

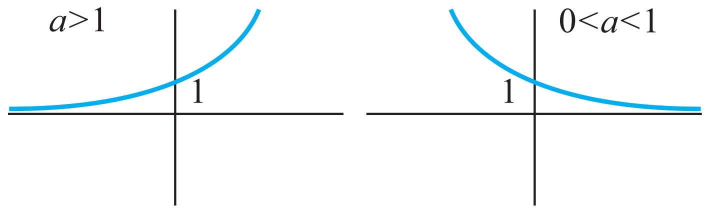

Figura 8-1
La funzione esponenziale di base $a > 1$ (a sinistra) e di base $0 < a < 1$ (a destra)

8.2. Definizione di logaritmo e proprietà fondamentali

Si consideri la seguente relazione che lega due numeri reali a e b, attraverso un esponente x.

$$a^x = b$$

In pratica x è l'esponente che occorre dare alla base a per ottenere il valore b. Il valore x è pertanto detto **logaritmo** di b in base a e si indica con la seguente notazione:

$$x = \log_a b$$

Si fornisce quindi la seguente definizione di logaritmo. Dati due numeri a e b positivi, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo del numero b in base a l'esponente a cui si deve elevare la base a per ottenere il valore b.

Il valore b è anche detto **argomento** del logaritmo.

Si presentano ora alcune proprietà fondamentali dei logaritmi.

I) Il logaritmo $\log_a b > 0$ se $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$

II) Il logaritmo $\log_a b < 0$ se $\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$

III) $\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$

IV) $\log_a 1 = 0$ perché $a^0 = 1$

V) Siccome la relazione $x = \log_a b$ è equivalente alla relazione $a^x = b$, allora deve necessariamente essere $a > 0$, infatti nel paragrafo precedente la funzione esponenziale è stata definita per basi positive; inoltre deve essere necessariamente $a \neq 1$, perché la base 1, elevata a qualsiasi esponente, assume valore 1, ossia $1^x = 1$ e quindi in tal caso ci si ridurrebbe alla funzione costante. Infine $b > 0$ perché nel paragrafo precedente si è visto che l'immagine della funzione esponenziale è l'insieme dei numeri reali positivi.

8.3. La funzione logaritmica

La funzione logaritmica in base a associa ad un qualsiasi valore x reale e positivo il corrispondente valore reale $\log_a x$.

$$f : x \longrightarrow \log_a x$$

La funzione logaritmica è definita in tutto l'insieme R^+, ossia può associare un valore a qualsiasi numero reale positivo x. Si dice in tal caso che il **dominio** o il **campo di esistenza** della funzione logaritmica è l'insieme R^+.

I numeri associati dalla funzione logaritmica ai valori x spaziano su tutto l'insieme dei numeri reali R. Pertanto si dice che il **codominio** o l'**immagine** della funzione logaritmica è l'insieme R.

Se la base $a > 1$ la funzione logaritmica si comporta in modo da associare a due valori x_1 ed x_2, tali che $x_1 < x_2$, due valori corrispondenti $\log x_1$ e $\log x_2$ tali che $\log_a x_1 < \log_a x_2$. In questo caso si dice che la funzione logaritmica è **strettamente crescente** in R. Quindi si ha:

Equazione 8-3 $$a > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Se la base $0 < a < 1$ la funzione logaritmica si comporta in modo da associare a due valori x_1 ed x_2, tali che $x_1 < x_2$, due valori corrispondenti $\log x_1$ e $\log x_2$ tali che $\log_a x_1 > \log_a x_2$. In questo caso si dice che la funzione logaritmica è **strettamente decrescente** in R. Quindi si ha:

Equazione 8-4 $$0 < a < 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

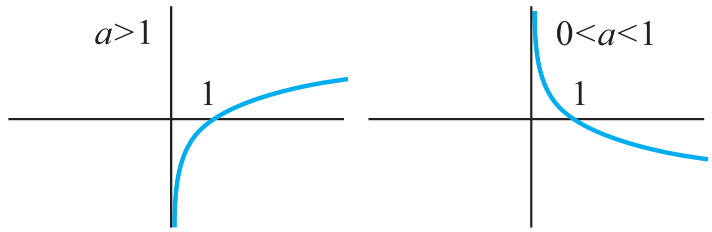

Figura 8-2
La funzione logaritmica di base $a > 1$ (a sinistra) e di base $0 < a < 1$ (a destra)

In Figura 8-2 sono mostrate le funzioni logaritmiche per $a > 1$ ed $0 < a < 1$ in un sistema di riferimento cartesiano. Da tale figura si nota che quando $a > 1$ il logaritmo assume un valore positivo se il suo argomento è maggiore di 1, viceversa assume valore negativo. Inoltre il valore del logaritmo è maggiore di 1 se l'argomento del logaritmo è maggiore della base. Se invece $0 < a < 1$ allora il logaritmo è positivo quando il suo argomento è compreso tra 0 ed 1, viceversa il logaritmo è negativo. Inoltre il valore del logaritmo è maggiore di 1 se l'argomento del logaritmo è minore della base.

In base a tali considerazioni si può affermare, ad esempio, che:

$\log_{10} 3 > 0$ poiché la base 10 è maggiore di 1 e l'argomento 3 è maggiore di 1; inoltre $\log_{10} 3 < 1$ poiché l'argomento 3 è minore della base 10.

$\log_3 4 > 0$ poiché la base 10 è maggiore di 1 e l'argomento 4 è maggiore di 1; inoltre $\log_3 4 > 1$ poiché l'argomento 4 è maggiore della base 3.

$\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$ poiché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1 e l'argomento 3 è maggiore di 1.

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$ poiché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1 e l'argomento $\frac{1}{3}$ è minore di 1; inoltre $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 1$ poiché l'argomento $\frac{1}{3}$ è minore della base $\frac{1}{2}$.

8.4. Teoremi fondamentali dei logaritmi

Teorema del prodotto

Il logaritmo di un prodotto di due (o più) numeri è pari alla somma dei logaritmi di ciascun numero.

Equazione 8-5
$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

DIM

Si dimostra il teorema per il prodotto di due fattori.
Si pongono:

$$x = \log_c a$$
$$y = \log_c b$$

da cui si ottengono le due seguenti relazioni:

$$c^x = a$$
$$c^y = b$$

Moltiplicando membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$c^x \cdot c^y = a \cdot b$$
$$c^{x+y} = a \cdot b$$

Per la definizione di logaritmo, l'ultima equazione equivale a:

$$x + y = \log_c (a \cdot b)$$

Specificando i valori di x e y si ottiene la tesi:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

Il teorema può essere facilmente esteso al caso di un prodotto di più di due fattori.

Equazione 8-6 $$\log_d (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots) = \log_d a + \log_d b + \log_d c + \ldots$$

Teorema del rapporto

Il logaritmo di un rapporto di due numeri è pari alla differenza dei logaritmi di ciascun numero.

Equazione 8-7 $$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

DIM

Si pongono:

$$x = \log_c a$$
$$y = \log_c b$$

da cui si ottengono le due seguenti relazioni:

$$c^x = a$$
$$c^y = b$$

Dividendo membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$\frac{c^x}{c^y} = \frac{a}{b}$$

$$c^{x-y} = \frac{a}{b}$$

Per la definizione di logaritmo, l'ultima equazione equivale a:

$$x - y = \log_c\left(\frac{a}{b}\right)$$

Specificando i valori di x e y si ottiene la tesi:

$$\log_c a - \log_c b = \log_c\left(\frac{a}{b}\right)$$

Teorema della potenza

Il logaritmo di una potenza di un numero è pari al prodotto dell'esponente per la base del logaritmo del numero.

Equazione 8-8 $$\log_c\left(a^b\right) = b \cdot \log_c a$$

DIM

Si pone:

$$x = \log_c a$$

da cui si ottiene la seguente relazione:

$$c^x = a$$

Elevando a b entrambi i membri:

$$\left(c^x\right)^b = a^b$$

$$c^{b \cdot x} = a^b$$

Per la definizione di logaritmo, l'equazione equivale a:

$$b \cdot x = \log_c\left(a^b\right)$$

Specificando il valore di x si ottiene la tesi:

$$b \cdot \log_c a = \log_c\left(a^b\right)$$

Teorema della radice

Il logaritmo di un radicale è pari al quoziente fra il logaritmo del radicando e l'indice del radicale.

Equazione 8-9

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_c a$$

DIM

Applicando il teorema della potenza si ottiene la tesi:

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \log_c \left(a^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \cdot \log_c a$$

Esempi. 1) Determinare il valore dei seguenti logaritmi, attraverso i teoremi fondamentali.

1) $\log_2 64$. Si scompone il 64 in potenza di 2 $\log_2 64 = \log_2 2^6$. Applicando l'Equazione 8-8 si ottiene: $\log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2$. Siccome $\log_a a = 1$, allora: $6 \cdot \log_2 2 = 6$. Quindi $\log_2 64 = 6$.

2) $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1 \cdot \log_3 3 = -1$

3) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} = -3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right) = -3$

4) $\log_7 \sqrt[3]{7^2} = \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_7 7 = \frac{2}{3}$

2) Nei seguenti esempi non è specificata la base comune a tutti i logaritmi, in quanto ininfluente per il risultato algebrico finale.

1) Semplificare la seguente espressione mediante i teoremi fondamentali dei logaritmi $2\log x + 3\log y - \log z$.

Applicando l'inversa dell'Equazione 8-8 si ottiene:

$$\log x^2 + \log y^3 - \log z$$

Applicando l'inversa dell'Equazione 8-5 si ottiene:

$$\log\left(x^2 \cdot y^3\right) - \log z$$

Applicando l'inversa dell'Equazione 8-7 si ottiene:

$$\log\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z}\right)$$

2) Semplificare la seguente espressione mediante le proprietà dei logaritmi.

$$3\left[2\left(\log a - \frac{1}{3}\log b\right) - \frac{2}{3}\log c\right]$$

Applicando l'inversa dell'Equazione 8-9 si ottiene:

$$3\left[2\left(\log a - \log b^{\frac{1}{3}}\right) - \log c^{\frac{2}{3}}\right] = 3\left[2\left(\log a - \log\sqrt[3]{b}\right) - \log\sqrt[3]{c^2}\right]$$

Di seguito si applicano le altre proprietà dei logaritmi.

$$3\left[2\left(\log a - \log\sqrt[3]{b}\right) - \log\sqrt[3]{c^2}\right] = 3\left[2\left(\log\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right) - \log\sqrt[3]{c^2}\right] =$$

$$= 3\left[\log\left(\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right)^2 - \log\sqrt[3]{c^2}\right] = 3\left[\log\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^2}} - \log\sqrt[3]{c^2}\right] = 3\left[\log\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{c^2}}\right] =$$

$$= 3\left[\log\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^2c^2}}\right] = \log\left(\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^2c^2}}\right)^3 = \log\frac{a^6}{\left(\sqrt[3]{b^2c^2}\right)^3} = \log\frac{a^6}{b^2c^2}$$

3) Semplificare la seguente espressione mediante le proprietà dei logaritmi.

$$\log\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}}{c^3}\right)$$

Applicando l'Equazione 8-7 si ottiene:

$$\log\left(\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}\right) - \log c^3$$

Applicando l'Equazione 8-5 si ottiene:

$$\log \sqrt{a} + \log \sqrt[3]{b^2} - \log c^3$$

Applicando l'Equazione 8-8 e l'Equazione 8-9 si ottiene:

$$\log a^{\frac{1}{2}} + \log b^{\frac{2}{3}} - \log c^3 = \frac{1}{2}\log a + \frac{2}{3}\log b - 3\log c$$

4) Semplificare la seguente espressione mediante le proprietà dei logaritmi $\log \sqrt[3]{\dfrac{x^5 \cdot \sqrt{y^3}}{z^2}}$.

Applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\log \sqrt[3]{\frac{x^5 \cdot \sqrt{y^3}}{z^2}} = \frac{1}{3}\log \frac{x^5 \cdot \sqrt{y^3}}{z^2} = \frac{1}{3}\left[\log\left(x^5 \cdot \sqrt{y^3}\right) - \log z^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log x^5 + \log \sqrt{y^3} - \log z^2\right] = \frac{1}{3}\left[5\log x + \frac{3}{2}\log y - 2\log z\right] =$$

$$= \frac{5}{3}\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z$$

8.5. Sistemi di logaritmi e cambiamento di base

Sistemi di logaritmi

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri positivi rispetto a una data base a è detto sistema di logaritmi in base a.

Quando la base $a = 10$, si ottiene il **sistema dei logaritmi decimali**.

Quando la base è rappresentata dal numero di Nepero, ossia $a = e$, allora si ottiene il **sistema dei logaritmi naturali o neperiani**.

In generale si fa riferimento a questi due sistemi di logaritmi piuttosto che a sistemi in un'altra base. Pertanto quando in questo volume si omette la base del logaritmo si intende un logaritmo decimale.

$$\log_{10} a = \log a$$

Si noti in particolare che la parte intera del logaritmo di un numero in base 10, aumentata di una unità, è pari al numero di cifre che costituiscono quel numero. Infatti sia a un numero costituito da n cifre. Si ha che: $n = 1 + \left[\log_{10} a\right]$, dove con le parentesi quadre [ ] si vuole indicare la parte intera del logaritmo.

Si noti che tale ragionamento vale per qualsiasi sistema di numerazione. Ad esempio la parte intera del logaritmo in base 2 di un numero, aumentata di una unità, è pari al numero di cifre mediante il quale si rappresenta quel numero nel sistema di numerazione in base 2, ossia il sistema binario.

Esempio. Il numero 1423 è costituito da 4 cifre. Il logaritmo di tale numero in base 10 vale $\log_{10} 1423 = 3{,}15\ldots$; pertanto la parte intera vale $[\log_{10} 1423] = 3$. Quindi: $n = 1 + \left[\log_{10} a\right] \Rightarrow 4 = 1 + 3$.

In altri testi il logaritmo in base e può essere indicato anche con l'espressione ln$a$, con cui si intende il "logaritmo neperiano".

$$\log_e a = \ln a$$

In generale le calcolatrici scientifiche sono dotate di apposite funzionalità per calcoalre i logaritmi in base 10 oppure in base e.

Teorema del cambiamento di base

Il logaritmo di un numero positivo b, rispetto ad una base a, è dato dal rapporto dei logaritmi di b e di a rispetto ad un'altra base c.

Equazione 8-10
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

DIM

Si pone: $x = \log_a b$, da cui si ottiene la seguente relazione: $a^x = b$. Si calcola ora il logaritmo in base c di ambo i membri: $\log_c a^x = \log_c b$. Dall'Equazione 8-8 si ottiene:

$$x \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Specificando il valore di x si ottiene la tesi:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

La proprietà del cambiamento di base può essere utile per calcolare un logaritmo quando la sua base è diversa da 10 e dal numero di nepero *e*. Difatti si può trasportare un logaritmo da una base qualsiasi alla base 10 oppure *e* ed utilizzare una calcolatrice scientifica per determinare il valore dei logaritmi in queste basi.

Test di verifica

Quesiti a risposta multipla

1) Se $a > 0$ allora $a \log a$ =

a) $\log a^a$
b) $\log a^2$
c) $\log 2a$
d) 1

2) Il logaritmo di un numero a positivo in base 5 è un numero b tale che:

a) $b^5 = a$
b) $a^5 = b$
c) $10^b = 5$
d) $5^b = a$

3) Se $a > b > 0$, allora:

a) $\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) < 0$

b) $\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) > 1$

c) $0 < \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) < 1$

d) $\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) = 1$

4) Se $\log_c a = b$, allora:

a) $c^a = b$

b) $c^b = a$

c) $a^b = c$

d) $a^c = b$

5) $\log_{100} 0,0001 =$

a) +4
b) –2
c) +2
d) –4

6) Quanto vale $\log_2 \sqrt{2^{-8}}$?

a) –8
b) 4
c) 8
d) –4

7) La quantità $\log_3 0,1$ è:

a) maggiore di 1
b) compresa tra 0 e 1
c) minore di 0
d) pari ad 1

8) log 4 + log 4 =

a) log 16
b) log 8
c) log 4
d) log 1/4

9) Quale dei seguenti logaritmi differisce dagli altri?

a) $\log_2 8$

b) $\log_5 125$
c) $\log_a a^3$
d) $\log_3 81$

10) Per $a > 0$, $\log a^n$ =

a) $n \cdot \log a$
b) $\log(n \cdot a)$
c) $n + \log a$
d) $\sqrt[n]{\log a}$

11) Il logaritmo decimale di un numero è negativo:

a) quando il suo argomento è negativo
b) quando il suo argomento è minore di 10
c) quando il suo argomento è minore di 1
d) quando il suo argomento è maggiore di 10

12) Se $a, b > 0$, allora $\log\left(\frac{a}{b}\right) =$

a) $\log a + \log b$
b) $\log a - \log b$
c) $\dfrac{\log a}{\log b}$
d) $\left[\log\left(\frac{b}{a}\right)\right]^{-1}$

13) $\log_2 32 =$

a) 64
b) 16
c) $\sqrt{32}$
d) 5

14) $\log 10^2 + \log 10^3 =$

a) $\log 10^6$
b) $\log 10^5$
c) $\log 10^{\frac{2}{3}}$
d) $\log 10^{-1}$

15) Il $\log_{10} 99{,}9$ è:

a) compreso tra 0 e 1
b) compreso tra 1 e 2
c) compreso tra 1 e 10
d) compreso tra 10 e 100

16) $\log_5 5^{-\frac{1}{5}} =$

a) $-1/5$
b) 1
c) 5
d) 1/5

17) Il numero decimale 64 da quante cifre è composto in base binaria (base 2)?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

18) $\log_2 6 + \log_2 3 =$

a) $\log_2 18$

b) $\log_2 9$

c) $\log_2 3$

d) $\log_2 2$

Esercizi

Attraverso i teoremi sui logaritmi ridurre le seguenti espressioni in un unico logaritmo.

1) $\log 3 + 2\log 3 - \log 27$

2) $2\log x - \frac{1}{3}(\log y - 2\log z)$

3) $-3\left[\log a - \frac{1}{2}(\log b + 3\log c)\right] + \log a$

4) $2\log a + 2\log(a-b) -$

$-\log(a^2 - b^2) - \log a$

Attraverso i teoremi sui logaritmi sviluppare i seguenti logaritmi.

5) $\log \frac{a^2}{b^2 \cdot \sqrt{c}}$

6) $\log \frac{c^3}{a \cdot \sqrt[6]{b}}$

7) $\log\left(5 \cdot \sqrt{\frac{5a^3}{b^9}}\right)$

8) $\log\left(\frac{a^2 - a}{a^2 + 1 + 2a}\right)$

Soluzioni

Quesiti a risposta multipla

1 = a
2 = d
3 = a
4 = b
5 = b
6 = d
7 = c
8 = a
9 = d
10 = a
11 = c
12 = b
13 = d
14 = b
15 = b
16 = a
17 = c
18 = a

Esercizi

1 = $[1]$

2 = $\left[\log \dfrac{x^2\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{y}}\right]$

3 = $\left[\log \dfrac{\sqrt{b^3c^9}}{a^2}\right]$

4 = $\left[\log \dfrac{a(a-b)}{(a+b)}\right]$

5 = $\left[2\log a - 2\log b - \dfrac{1}{2}\log c\right]$

6 = $\left[3\log c - \dfrac{1}{2}\left(2\log a + \dfrac{1}{3}\log b\right)\right]$

7 = $\left[\dfrac{3}{2}\left(\log 5a - 3\log b\right)\right]$

8 = $\left[\log(a-1) + \log a - 2\log(a+1)\right]$

memorix

MATEMATICA_4

Il volume propone, secondo una sequenza logica e una gradualità che ne rende facilmente comprensibili tutti gli aspetti, i principi fondamentali della goniometria e della trigonometria, le proprietà dei logaritmi, la risoluzione delle equazioni e delle disequazioni logaritmiche ed esponenziali, le caratteristiche delle progressioni e la soluzione dei relativi problemi.

La trattazione sintetica non impedisce di approfondire sia la parte teorica, con le dimostrazioni degli asserti, sia la parte applicativa, con lo sviluppo di numerosi esempi di esercizi svolti e la presentazione di diverse tipologie di verifica alla fine di ogni capitolo.

Tra gli argomenti trattati:

- funzioni circolari
- formule goniometriche
- equazioni e disequazioni goniometriche
- risoluzione di triangoli
- equazioni e disequazioni logaritmiche ed esponenziali
- progressioni aritmetiche e geometriche

l'autore

Emiliano Barbuto, docente di Matematica e Fisica, ha partecipato ad esperimenti di fisica nucleare presso il CERN di Ginevra e i Laboratori del Gran Sasso. È autore di numerose pubblicazioni di carattere didattico e divulgativo sulla matematica. Esperto di software applicativi, ha scritto testi di alfabetizzazione informatica.

EdiSES € 9,90

ISBN 978–88–6584–555–4

9 788865 845554