F. Bajardi • C. Altucci • S. Capozziello

Esercizi di Fisica Generale

L'ABC della fisica multilivello dai Corsi di Fisica per le lauree in bioscienze al Corso di Laurea in Fisica

EdiSES UNIVERSITÀ

Esercizi di Fisica Generale

L'ABC della fisica multilivello dai Corsi di Fisica per le lauree in bioscienze al Corso di Laurea in Fisica

Francesco Bajardi, Carlo Altucci, Salvatore Capozziello

EdiSES
UNIVERSITÀ

Francesco Bajardi, Carlo Altucci, Salvatore Capozziello
Esercizi di Fisica Generale
L'ABC della fisica multilivello dai Corsi di Fisica per le lauree
in bioscienze al Corso di Laurea in Fisica

9 8 7 6 5 4 3 2 0
2025 2024 2023 2022 2021

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A cura di:
Francesco Bajardi, Carlo Altucci, Salvatore Capozziello
Università degli Studi di Napoli Federico II

Stampato presso la

Print Sprint – Napoli

per conto della

EdiSES Università S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edisesuniversita.it

ISBN 978 88 3623 033 4

Il volo con le macchine più pesanti dell'aria è impossibile.
— Lord William Thomson, I barone Kelvin

Prefazione

La fisica classica descrive tutto ciò che di macroscopico ci circonda, così come la sua interazione con altri oggetti o con l'ambiente circostante. Nell'accezione più generale del termine, la fisica è la scienza che descrive i fenomeni naturali; essa non spiega però il comportamento della natura, ma il modo in cui noi umani la comprendiamo, plasmandola inevitabilmente con le nostre percezioni, i nostri occhi e i nostri strumenti matematici. Per questo motivo, le teorie fisiche sono in costante sviluppo, evolvendosi verso approssimazioni sempre migliori delle osservazioni sperimentali. Nonostante ad oggi non sia chiaro se potrà mai esistere una teoria unica, in grado di adattarsi perfettamente ai risultati sperimentali di ogni scala, questo non rende la nostra attuale conoscenza in ambito errata *a priori*. Non esistono teorie più corrette di altre, ma solo diverse sfaccettature di approssimazione che rendono alcune teorie più precise di altre. La meccanica Newtoniana, ad esempio, funziona perfettamente a grandi scale e basse velocità (molto minori della velocità della luce) e non vi è alcun bisogno di studiare la caduta dei gravi tramite la meccanica quantistica. Se consideriamo il secondo principio della dinamica $F = ma$, potremmo essere portati a pensare che le leggi della natura vogliano che la forza e l'accelerazione siano uguali a meno di una costante dimensionale. In realtà, la natura si comporta in un modo molto più profondo tuttora a noi ignoto, che a livello più superficiale può essere descritto da ciò che, intuitivamente, la realtà circostante ci suggerisce. Questa non è una legge della natura, ma deriva direttamente da ciò che noi intendiamo con "forza" e da come definiamo "l'accelerazione" e la velocità; fuori dalle scale che si configurano all'interno della nostra esperienza quotidiana, tale legge risulta approssimativa e non ha alcun potere predittivo. È quindi ovvio che, da migliaia di anni, la nostra morfologia ci abbia forzato a focalizzare sistematicamente l'attenzione e le curiosità verso una ristretta categoria di fenomeni, guidandoci verso una scienza tanto perfetta a determinate dimensioni quanto lacunosa ad altre. Non è un caso, infatti, che la fisica moderna abbia più problemi alle scale più lontane rispetto alle nostre dimensioni. Tuttavia, non è opportuno complicare i problemi classici con strumenti e teorie più raffinate, in quanto la correzione che apporterebbero risulterebbe irrisoria rispetto agli scopi con cui si affrontano tali esempi. Per questo motivo, per quanto superato e incoerente in molti ambiti, lo studio dei fondamenti della meccanica e dell'elettromagnetismo classico sarà sempre importante. Innanzi tutto perché permette, in maniera imprescindibile, la comprensione di molti argomenti più avanzati, ma anche perché spesso la fisica classica rappresenta l'ottimizzazione migliore tra precisione e difficoltà. In qualsiasi ambito della scienza, inoltre, la fisica gioca un ruolo fondamentale e la comprensione dei fenomeni naturali può rivelare l'essenza intrinseca di ogni quesito ci si presenti davanti. Al fine di adeguarci ai più comuni programmi di fisica di base della maggior parte dei corsi di laurea, questo libro affronta esercizi afferenti a cinque aree tematiche diverse: Meccanica, Fluidostatica/Fluidodinamica, Termodinamica ed Elettricità/Magnetismo, per poi concludersi con i fenomeni ondulatori. Ognuno dei cinque capitoli corrispondenti alle aree elencate, si suddivide a sua volta in sottosezioni, al fine di facilitare l'individuazione degli argomenti. All'inizio di ogni sezione, un breve riassunto riepilogativo anticipa lo svolgimento degli esercizi, in modo che il lettore possa seguirne più facilmente la risoluzione. Tali pagine introduttive non hanno in alcun modo la pretesa di sostituire la teoria di un libro di testo, che deve essere assimilata a monte dello svolgimento di qualsivoglia problema. Ci teniamo altresì a sottolineare che, nonostante le catalogazioni accademiche, abbiamo provato a rendere molti esercizi quanto più generali possibile, trattando in uno stesso problema argomenti diversi. Per questo motivo, si consiglia di affrontare ogni capitolo e sezione con una conoscenza sufficiente riguardo le tematiche relative alle sezioni precedenti. Gli esercizi, per ogni sezione, sono presentati in ordine di difficoltà crescente, sicché ogni studente può trovare un intervallo di difficoltà consono, in accordo al proprio percorso accademico. L'unica eccezione riguarda gli esercizi teorici, etichettati dall'apposito titolo "Esercizi di teoria" a inizio pagina. Nonostante la maggior parte di essi segua l'ordine di difficoltà esattamente come gli altri, in qualche occasione si è reso necessario porli in una posizione che non rispecchia l'effettivo grado di difficoltà. Questa scelta è stata adoperata laddove la propedeuticità per gli esercizi successivi ha intaccato il posizionamento dell'esercizio stesso; spesso, infatti, la dimostrazione teorica di un dato fenomeno risulta più complessa dell'applicazione a uno specifico problema, e per completezza abbiamo aggiunto esercizi più teorici volti a colmare qualche lacuna a cui, inevitabilmente, le poche pagine riassuntive di teoria non hanno potuto sopperire. Alcuni problemi, inoltre, non ammettono soluzione analitica e, spesso, sono risolti numericamente. Nonostante la risoluzione numerica non sia usualmente inclusa nei corsi di fisica di base, essa è, il più delle volte, riportata per completezza, dal momento che l'importanza istruttiva dell'esercizio risiede nello svolgimento del problema nella sua interezza. L'acquisizione e la padronanza del metodo e dell'approccio da seguire, prescinde dall'esistenza di una soluzione analitica che, laddove esista, non fornisce al lettore significative abilità o nozioni in più.

Napoli,
Settembre 2020

Francesco Bajardi
Carlo Altucci
Salvatore Capozziello

Indice

1 Meccanica **7**
- 1.1 Cinematica . . . 8
- 1.2 Dinamica . . . 32
- 1.3 Energia e quantità di moto . . . 68
- 1.4 Meccanica Rotazionale . . . 101

2 Meccanica dei Fluidi **137**
- 2.1 Fluidostatica . . . 138
- 2.2 Fluidodinamica . . . 166

3 Termodinamica **185**
- 3.1 Calorimetria . . . 186
- 3.2 Trasformazioni Termodinamiche . . . 214
- 3.3 Cicli, Macchine Termiche e Entropia . . . 242

4 Elettrostatica e Magnetismo **275**
- 4.1 Elettrostatica . . . 276
- 4.2 Correnti e Magnetismo . . . 373
- 4.3 Elettromagnetismo . . . 414

5 Fenomeni Ondulatori **467**
- 5.1 Onde Meccaniche . . . 468
- 5.2 Onde Elettromagnetiche . . . 494

13. **Un blocco di massa m è posto sopra un altro blocco di massa M inizialmente fermo. Il blocco sottostante viene tirato da una forza F diretta orizzontalmente. Tra i due blocchi è presente un coefficiente di attrito μ, mentre il piano su cui giace il blocco più grande è liscio. Si calcoli il massimo valore di F oltre il quale il blocco più piccolo inizi a strisciare.**

    Si raddoppi successivamente tale valore. Trovare l'accelerazione del blocco più piccolo rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

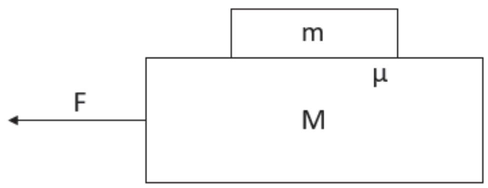

Figura 1.16

La prima parte del problema può essere risolta facilmente nel sistema di riferimento della massa più piccola. Infatti, quando la massa M viene tirata, il sistema accelera con accelerazione

$$a = \frac{F}{(m+M)} \tag{1.223}$$

dato che i corpi sono fermi l'uno rispetto all'altro. Il corpo di sopra, quindi, nel proprio sistema di riferimento sente una forza apparente pari a

$$F_m = ma = F\frac{m}{(m+M)} \tag{1.224}$$

Quando tale forza apparente è maggiore della forza di attrito, il corpo sovrastante comincia a strisciare. Dunque la forza massima da poter applicare affinché ciò non avvenga può essere trovata come

$$F_m = F_{Att} \;\rightarrow\; F\frac{m}{(m+M)} = mg\mu \;\rightarrow\; F = g\mu(m+M) \tag{1.225}$$

Il problema si complica leggermente nel momento in cui dobbiamo trovare l'accelerazione del blocco di massa m. In tal caso è più conveniente rimanere in un sistema di riferimento inerziale e analizzare le forze che agiscono su ogni blocco. Il blocco di sotto viene tirato da una forza $F_2 = 2F$ (come da testo del problema) alla quale si oppone l'attrito tra i due blocchi che tenderà a frenare il moto. Si ha dunque

$$F_2 - mg\mu = Ma_2 \tag{1.226}$$

Mentre F_2 indica la forza con cui è tirato il blocco sottostante di massa M, a_2 rappresenta l'accelerazione del blocco stesso, che in generale è diversa da quella della massa di sopra. Nel sistema inerziale, la massa sovrastante è spinta solo dalla forza di attrito. Se essa non fosse presente, infatti, il blocco di sopra rimarrebbe fermo mentre il blocco di sotto striscerebbe tirato dalla forza F_2. Si ha quindi

$$mg\mu = ma_1 \tag{1.227}$$

Rispetto al sistema in quiete, dunque, le accelerazioni sono

$$\begin{cases} a_1 = g\mu \\ a_2 = \dfrac{F_2 - mg\mu}{M} \end{cases} \tag{1.228}$$

Notiamo che quando $F_2 = F$, si ottiene $a_1 = a_2 = g\mu$, come ovviamente ci si aspetta. Quando $F_2 > F$, invece, le accelerazioni saranno diverse. Le equazioni sembrano inoltre suggerire che quando $F_2 < mg\mu$ l'accelerazione è negativa. Questo ovviamente porterebbe a un assurdo, in quanto il corpo di massa M, venendo tirato verso sinistra, andrebbe verso destra. In realtà è facile dimostrare che tale condizione sia irrealizzabile, considerando la natura della forza di attrito. Quest'ultima assume il valore di $mg\mu$ solo quando c'è uno slittamento tra le due masse, mentre è uguale alla forza apparente sentita dalla massa piccola quando non c'è slittamento. Ad esempio, quando il sistema è in quiete e la forza è nulla, anche la forza di attrito è zero. Dato che la forza di attrito assume sempre il valore

$$F_a = F_2 \frac{m}{(m+M)} \tag{1.229}$$

quando $F_2 < mg\mu$, la differenza considerata, in tal caso, diventa

$$F_2 - F_a = F_2 - F_2 \frac{m}{(m+M)} = F_2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) \tag{1.230}$$

che è sempre maggiore di zero.

14. **Si consideri il problema 4 e lo si risolva nel caso in cui la molla sia posta in maniera obliqua all'apice di un piano inclinato di angolazione θ rispetto all'orizzontale.**

Il caso è analogo al precedente, ma stavolta va considerata anche la forza di gravità nel bilancio di forze. L'equazione del moto sarà quindi

$$-kx - mg\sin\theta = m\ddot{x} \tag{1.231}$$

Definendo, come nel problema 4, la quantità $\sqrt{k/m} \equiv \omega$, l'equazione diventa

$$-\omega^2 x - g\sin\theta = \ddot{x} \tag{1.232}$$

Come mostrato nell'appendice 5.2, la soluzione dell'equazione differenziale è

$$x(t) = -\frac{g\sin\theta}{\omega^2} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{1.233}$$

Per trovare le costanti A e B, dobbiamo imporre le condizioni iniziali sulla posizione e sulla velocità. Se a $t = 0$ la velocità iniziale è nulla, si ottiene $B = 0$. La posizione di equilibrio sarà quella dove la risultante delle forze è nulla, ricavabile tramite l'equazione

$$mg\sin\theta = -kx_{eq} \quad \rightarrow x_{eq} = -\frac{mg\sin\theta}{k} = -\frac{g\sin\theta}{\omega^2} \tag{1.234}$$

Se il sistema viene inizialmente perturbato di un tratto x_0 rispetto alla posizione x_{eq}, possiamo imporre $x(0) = x_0$, ottenendo

$$A = x_0 + \frac{g\sin\theta}{\omega^2} \tag{1.235}$$

La legge oraria sarà dunque

$$x(t) = \frac{g\sin\theta}{\omega^2}\left[\cos(\omega t) - 1\right] + x_0\cos(\omega t) \tag{1.236}$$

Si noti che se il piano è orizzontale e dunque $\theta = 0$, ritroviamo l'equazione (1.153). Viceversa, se la molla è attaccata a un tetto, l'angolo è 90^o e l'equazione diventa

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2}\left[\cos(\omega t) - 1\right] + x_0\cos(\omega t) \tag{1.237}$$

15. **Una macchina di Atwood è composta da due masse $m_1 > m_2$ collegate a una carrucola di massa trascurabile per mezzo di una fune inestensibile di massa M e lunghezza L. Inizialmente, le due masse sono equidistanti dalla carrucola. Quando il sistema propende verso m_1, anche la fune scorre verso tale massa, in modo che il peso complessivo della fune non sia più lo stesso da entrambi i lati. Scrivere la legge oraria del moto e calcolare dopo quanto tempo il moto termina.**

Se la fune è priva di massa, il moto è ovviamente uniformemente accelerato, con accelerazione

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \tag{1.238}$$

Lo stesso non vale nel caso in cui la fune abbia massa, onde ci aspettiamo che l'accelerazione aumenti all'aumentare del tempo. Durante il moto, infatti, la fune propenderà verso la massa m_1, in modo che il peso da una parte della carrucola sia in continuo aumento, mentre il peso dall'altra parte diminuisce. Indicando con x lo spostamento della fune, in modo che all'istante iniziale $x(0) = 0$, il sistema di equazioni del moto per le due masse sarà:

$$\begin{cases} \left[m_1 + M\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{L}\right)\right] g - T = \left[m_1 + M\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{L}\right)\right] a \\ T - \left[m_2 + M\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{L}\right)\right] g = \left[m_2 + M\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{L}\right)\right] a \end{cases} \tag{1.239}$$

Il termine $M\left(\dfrac{L/2+x}{L}\right)$ è la frazione di massa di fune che propende verso sinistra, dopo che il sistema ha percorso uno spostamento x.

Sommando le due equazioni ed esplicitando l'accelerazione come derivata seconda dello spostamento, si ottiene

$$\left(m_1 - m_2 + 2M\frac{x}{L}\right) g = (m_1 + m_2 + M)\ddot{x} \tag{1.240}$$

L'equazione differenziale sovrastante ammette come soluzione generale

$$x(t) = -\frac{L(m_1 - m_2)}{2M} + c_1 e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t} \tag{1.241}$$

Per trovare le costanti di integrazione c_1 e c_2, imponiamo che, all'istante iniziale, sia lo spostamento che la velocità siano nulli. A tal fine, scriviamo prima la velocità derivando l'equazione (1.241):

$$\begin{aligned} v(t) &= c_1\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t} + \\ &- c_2\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t} \end{aligned} \tag{1.242}$$

Imponendo dapprima la condizione $v(0) = 0$, si ottiene la condizione $c_1 = c_2$ che, sostituita nella legge oraria, fornisce:

$$x(t) = -\frac{L(m_1 - m_2)}{2M} + c_1\left(e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\,t}\right) \tag{1.243}$$

Dal momento che il problema impone che inizialmente le masse siano equidistanti dalla carrucola, possiamo porre $x(0) = 0$, trovando il valore della costante di integrazione c_1:

$$c_1 = \frac{L(m_1 - m_2)}{4M} \tag{1.244}$$

Infine, quindi, si ha

$$x(t) = \frac{L(m_1 - m_2)}{2M} \left(\frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} - 1 \right) \tag{1.245}$$

Una volta scritta la legge oraria, possiamo calcolare il tempo necessario perché il moto termini. In particolare, il sistema smette di accelerare quando non vi è più fune nella parte destra, ovvero quando lo spostamento corrisponde a $L/2$. Tramite tale imposizione nella legge oraria del moto, troviamo

$$\frac{L}{2} = \frac{L(m_1 - m_2)}{2M} \left(\frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} - 1 \right) \tag{1.246}$$

da cui

$$\frac{2M}{m_1 - m_2} + 2 = e^{\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} + e^{-\sqrt{\frac{2gM}{L(m_1+m_2+M)}}\, t} \tag{1.247}$$

e il tempo infine sarà

$$t = \sqrt{\frac{L(m_1 + m_2 + M)}{2gM}} \ln \left[\frac{M}{m_1 - m_2} + 1 \pm \sqrt{\left(\frac{M}{m_1 - m_2} \right)^2 - 1} \right] \tag{1.248}$$

16. **Una massa M è vincolata a una molla di costante elastica k. Essa poggia su un piano scabro nella posizione di riposo della molla, inizialmente. Il piano ha un coefficiente di attrito μ. La molla viene compressa di un tratto x_0; calcolare il numero di oscillazioni prima di fermarsi e scrivere la legge oraria del moto.**

A causa dell'attrito, la massa si fermerà dopo qualche oscillazione, in funzione della posizione x_0 di partenza. In un'oscillazione la massa percorre uno spostamento sicuramente minore $4x_0$: da x_0 alla posizione di riposo, per poi allungarsi, ritornare alla posizione di riposo e comprimersi nuovamente. L'equazione del moto dalla posizione iniziale al punto di inversione può essere scritta come

$$-kx + mg\mu = m\ddot{x} \tag{1.249}$$

la cui soluzione è

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{mg\mu}{k} \tag{1.250}$$

È importante dividere il problema in tante fasi quanti sono i cambi di verso del moto della massa; il motivo è da ricercare nel segno della forza di attrito, sempre discorde alla velocità, che non permette di scrivere un'unica equazione descrivente il moto nella sua interezza.

Dalle condizioni iniziali possiamo trovare le costanti c_1 e c_2; basta imporre $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$:

$$x(0) = c_1 + \frac{mg\mu}{k} = x_0 \tag{1.251}$$

da cui

$$c_1 = x_0 - \frac{mg\mu}{k} \tag{1.252}$$

Definiamo per semplicità $k/m \equiv \omega^2$, sicché la legge oraria diventa

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{g\mu}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g\mu}{\omega^2} \tag{1.253}$$

Troviamo quindi la velocità derivando rispetto al tempo

$$v(t) = -\omega\left(x_0 - \frac{g\mu}{\omega^2}\right)\sin(\omega t) + c_2\omega\cos(\omega t) \tag{1.254}$$

Imponendo $v(0) = 0$ si trova $c_2 = 0$, quindi la legge oraria sarà

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{g\mu}{\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \tag{1.255}$$

e la velocità in funzione del tempo

$$v(t) = \left(\frac{g\mu}{\omega^2} - x_0\right)\omega\sin(\omega t) \tag{1.256}$$

Quindi, supposto che si verifichino le condizioni iniziali per il moto, ovvero che

$$x_0 > \frac{g\mu}{\omega^2} \tag{1.257}$$

il corpo si fermerà nella posizione

$$x_1 = \frac{2g\mu}{\omega^2} - x_0 \tag{1.258}$$

Iteriamo il processo un'altra volta, in modo da trovare la posizione nel secondo punto di inversione. In tal caso la legge oraria è la stessa, a parte la forza di attrito che cambierà direzione. Questo equivale banalmente alla sostituzione $\mu \to -\mu$, dato che il coefficiente di attrito compare solo nel termine additivo della legge oraria. Le condizioni al contorno sono diverse, in quanto la posizione iniziale non è più x_0, ma x_1. Scrivendo

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg\mu}{k} \tag{1.259}$$

e imponendo $x(0) = x_1$ e $v(0) = 0$ si ottene

$$x(t) = x_1 \cos(\omega t) - \frac{g\mu}{\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \tag{1.260}$$

$$v(t) = \left(-\frac{g\mu}{\omega^2} - x_1\right)\omega \sin(\omega t) \tag{1.261}$$

Quindi il corpo si fermerà nuovamente nella posizione

$$x_2 = -\frac{2g\mu}{\omega^2} - x_1 = x_0 - \frac{4g\mu}{\omega^2} \tag{1.262}$$

Ci aspettiamo quindi, che dopo l'ennesimo punto di inversione la posizione sarà

$$x_n = (-1)^n \left(x_0 - \frac{2ng\mu}{\omega^2}\right) \tag{1.263}$$

Il corpo non ripartirà più quando $kx_n = mg\mu$, ovvero

$$x_n = \frac{g\mu}{\omega^2} \tag{1.264}$$

Sostituendo l'equazione (1.264) nella (1.263), otteniamo la condizione

$$x_0 - \frac{2ng\mu}{\omega^2} = \frac{g\mu}{\omega^2} \tag{1.265}$$

da cui, infine, isolando il numero di semi-oscillazioni si ricava

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 x_0}{2g\mu} - 1\right) \tag{1.266}$$

Il numero di punti di inversione che il corpo percorre prima di fermarsi, può essere trovato prendendo la parte intera dell'equazione (1.266)

17. **Si consideri il sistema in figura, costituito da due masse m_1, m_2 e tre molle con diverse costanti elastiche. Se d è la larghezza totale, le molle sono a riposo quando la massa 1 è nella posizione $d/3$ e la massa 2 nella posizione $2d/3$. Il sistema viene perturbato e le molle cominciano a oscillare attorno alla posizione di equilibrio. Trovare le leggi orarie del moto per le due masse.**

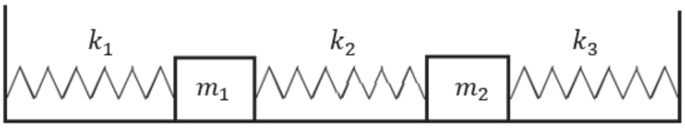

Figura 1.17

Possiamo impostare un'equazione differenziale per ogni massa, del tipo $F = ma$. La prima massa risente di due forze, date dalla molla di sinistra e dalla molla centrale. La seconda massa risente delle forze dovute alla molla centrale e alla molla di destra. Il sistema di equazioni allora sarà:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2\Delta x_2 + k_3\Delta x_3 \end{cases} \tag{1.267}$$

Sapendo che la posizione di riposo è $x_0 = d/3$, possiamo scrivere Δx_1, Δx_2 e Δx_3 come

$$\begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - \dfrac{d}{3} \\ \Delta x_2 = x_2 - \dfrac{d}{3} - \left(x_1 - \dfrac{d}{3}\right) = x_2 - x_1 \\ \Delta x_3 = \dfrac{d}{3} - x_2 \end{cases} \tag{1.268}$$

dunque sostituendo si ha

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1\left(x_1 - \dfrac{d}{3}\right) + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3\left(\dfrac{d}{3} - x_2\right) \end{cases} \tag{1.269}$$

Al fine di risolvere il sistema, poniamo per semplicità $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $m_1 = m_2 \equiv m$ e $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{18}\Big[10d + 9(c_1 + c_3)\cos(\omega t) + 9(c_1 - c_4)\cos(\sqrt{3}\omega t) + \\ &\quad + \frac{9(c_2 + c_4)}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{3\sqrt{3}(c_2 - c_4)}{\omega}\sin(\sqrt{3}\omega t)\Big] \end{aligned} \tag{1.270}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{18}\Big[14d + 9(c_1 + c_3)\cos(\omega t) + 9(c_3 - c_1)\cos(\sqrt{3}\omega t) + \\ &\quad + \frac{9(c_2 + c_4)}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{3\sqrt{3}(c_2 - c_4)}{\omega}\sin(\sqrt{3}\omega t)\Big] \end{aligned} \tag{1.271}$$

Le costanti di integrazione c_i possono essere trovate imponendo le condizioni iniziali di velocità nulla e posizione x_{01} e x_{02}, ovvero

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1.272}$$

Le ultime due danno $c_2 = c_4 = 0$, mentre le prime due portano alle equazioni

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{c3}{2} + \dfrac{5d}{9} = x_{10} \\ \\ c_3 + \dfrac{7d}{9} = x_{20} \end{cases} \tag{1.273}$$

che risolte, danno

$$\frac{1}{6}(-d + 6x_{10} - 3x_{20}) \qquad c_3 = x_{20} - \frac{7}{9}d \tag{1.274}$$

Infine, quindi, sostituendo il valore delle costanti testé trovate, la soluzione sarà

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{36}\left[(20d + (-17d + 9(2x_{10} + x_{20}))\cos(\omega t) - 3(d - 6x_{10} + 3x_{20})\cos(\sqrt{3}\omega t)\right] \\ x_2(t) &= \frac{1}{36}\left[(28d + (-17d + 9(2x_{10} + x_{20}))\cos(\omega t) + (-11d - 18x_{10} + 27x_{20})\cos(\sqrt{3}\omega t)\right] \end{aligned}$$

Lo stesso risultato, tramite la meccanica lagrangiana, può essere trovato semplicemente definendo le posizioni delle due masse e gli spostamenti. In un certo senso, questo è stato già fatto precedentemente nello sviluppo del sistema (1.268); la Lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 - k_1\Delta x_1^2 - k_2\Delta x_2^2 - k_3\Delta x_3^2\right] \tag{1.275}$$

e, esplicitando i Δx_i, essa può essere scritta come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 - k_1\left(x_1 - \frac{d}{3}\right)^2 - k_2\left(x_2 - x_1\right)^2 - k_3\left(\frac{d}{3} - x_2\right)^2\right] \tag{1.276}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange danno esattamente le stesse equazioni del moto già trovate.

18. **Si consideri una massa m_1 vincolata a muoversi lungo la direzione orizzontale. Ad essa viene legato un pendolo di massa m_2 tramite una fune inestensibile di lunghezza L. scrivere le equazioni del moto per le due masse.**

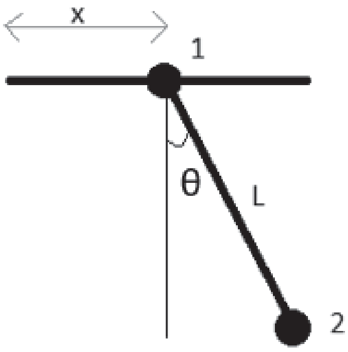

Figura 1.18

Scrivere le equazioni del moto significa pervenire a una coppia di equazioni differenziali la cui soluzione fornisce le leggi orarie dei rispettivi corpi. A tal fine, consideriamo le forze che agiscono su ogni massa:

$$\begin{cases} T\sin\theta = m_1 a_1 \\ T\sin\theta = m_2 a_{2x} \\ m_2 g - T\cos\theta = m_2 a_{2y} \end{cases} \tag{1.277}$$

Ipotizzando un angolo iniziale θ_0, analogamente a prima possiamo scrivere le accelerazioni come

$$\begin{cases} a_{2x} = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(-x - L\sin\theta\right) = -\ddot{x} - L\cos\theta\,\ddot{\theta} + L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\ a_{2y} = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(L\cos\theta - L\cos\theta_0\right) = -L\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - L\sin\theta\,\ddot{\theta} \end{cases} \tag{1.278}$$

Dalla seconda equazione del sistema, è possibile scrivere la tensione come

$$T = \frac{m_2 a_{2x}}{\sin\theta} = \frac{m_2}{\sin\theta}\left(-\ddot{x} - L\cos\theta\,\ddot{\theta} + L\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) \tag{1.279}$$

e sostituendo nella prima e nella terza equazione rispettivamente, si ottiene

$$\begin{cases} m_2\ddot{x} + m_2 L\cos\theta\,\ddot{\theta} - m_2 L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + m_1\ddot{x} = 0 \\ g\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{1.280}$$

Il sistema di equazioni del moto non è risolvibile analiticamente, quindi non scriveremo esplicitamente la dipendenza delle posizioni dal tempo.

Anche questa volta, possiamo pervenire allo stesso risultato tramite la meccanica Lagrangiana. L'ascissa complessiva della massa 2 sarà

$$x_2 = x + L\sin\theta \tag{1.281}$$

mentre l'ordinata, come prima, sarà

$$y_2 = L\cos\theta \tag{1.282}$$

In coordinate polari dunque, il raggio vettore che unisce il punto iniziale del sistema con la massa 2 è

$$\rho = \sqrt{(x + L\sin\theta)^2 + (L\cos\theta)^2} = \sqrt{x^2 + L^2 + 2Lx\sin\theta} \tag{1.283}$$

e l'angolo che tale raggio vettore forma rispetto alla verticale è

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{x + L\sin\theta}{L\cos\theta}\right) \tag{1.284}$$

La Lagrangiana, dunque, può essere scritta come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}_3^2\right) + m_2 gL\cos\theta \tag{1.285}$$

Sostituendo ρ e θ_3 si ottiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + 2Lm_2\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + m_2L^2\dot{\theta}^2 + 2m_2 gL\cos\theta\right] \tag{1.286}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto a x e θ, danno rispettivamente

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \;\rightarrow\; (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + m_2L\cos\theta\,\ddot{\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \;\rightarrow\; g\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{1.287}$$

Come ovviamente ci aspettiamo.

F. Bajardi • C. Altucci • S. Capozziello

Esercizi di **Fisica Generale**

L'ABC della fisica multilivello dai Corsi di Fisica per le lauree in bioscienze al Corso di Laurea in Fisica

EdiSES UNIVERSITÀ
www.edisesuniversita.it

€ 26,00

ISBN 978-883623-033-4
9 788836 230334