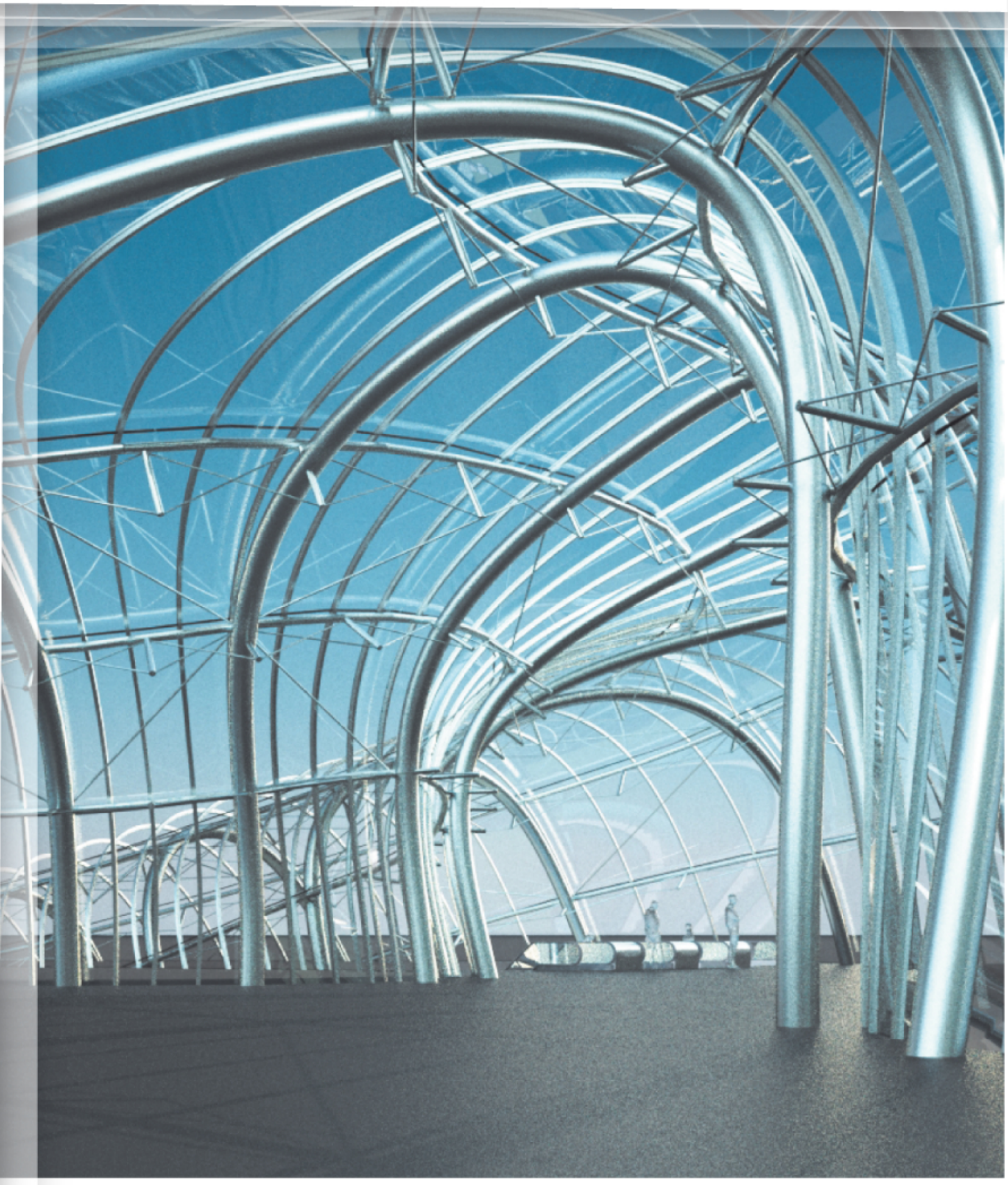
Carlo Sbordone • Francesco Sbordone

Matematica

per le Scienze della Vita



EdiSES

Matematica
per le Scienze della Vita

Carlo Sbordone
Francesco Sbordone

EdiSES

Carlo Sbordone - Francesco Sbordone
Matematica per le Scienze della Vita

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2018 2017 2016 2015 2014

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Carlo Sbordone
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Francesco Sbordone
Laurea magistrale in Fisica
Università di Roma "La Sapienza"

Stampato presso
Tipolitografia Petruzzi Corrado & Co. s.n.c.
Zona Ind. Regnano Città di Castello (PG)
per conto della
EdiSES - Piazza Dante, 89 - Napoli

www.edises.it
info@edises. it

ISBN 978 88 7959 829 3

Presentazione

La complessità sempre crescente e la natura interdisciplinare dei problemi che si pongono nella scienza e nella tecnologia moderna hanno evidenziato la necessità di stabilire sempre più intensi livelli di conoscenze matematiche per gli operatori nei vari settori delle Scienze della Vita ed in particolare della Sanità. L'obiettivo da perseguire è quello di mostrare che anche in questi settori è indubbia l'utilità dei modelli matematici in grado di consentire previsioni e di interpretare quantitativamente ciò che viene osservato sperimentalmente.

Questo testo cerca di descrivere la matematica che si ritiene oggi utile per studiare con profitto le Scienze Applicate, con particolare riguardo alle discipline biomediche attraverso la presentazione, capitolo per capitolo, di concetti e tecniche matematiche rivelatesi assai efficaci in alcuni esempi concreti, di cui viene data un'idea sintetica.

Il Capitolo 1 di teoria degli insiemi si apre con un esempio relativo alla descrizione dei gruppi sanguigni, fornendo una maniera schematica per illustrare le compatibilità tra gruppi. Ne risulta un quadro chiaro e ben memorizzabile.

Nel Capitolo 2 vengono presentati i principi del ragionamento logico (utili per la matematica, ma anche nella vita di ogni giorno). Ad esempio si insiste anche sulla semplice capacità di negare una proposizione o di comprendere la differenza tra condizione necessaria e condizione sufficiente. Tali acquisizioni devono essere garantite per una valida professionalità futura in campo scientifico-sanitario.

Nel Capitolo 3 ampio spazio viene riservato alla descrizione degli insiemi numerici collocati sulla retta: gli enti numerici e le operazioni vengono definiti con gradualità ed in maniera semplice ma rigorosa: nulla viene dato per noto e adeguato spazio viene dedicato alle frazioni e alle operazioni con i numeri decimali, anche in vista del largo uso della Notazione Scientifica e dello studio nel Capitolo 5 sulle unità di misura per le quantità di natura fisica. La capacità di operare agevolmente con le unità di misura adeguata è importante nel dosaggio di farmaci e nella loro somministrazione che deve tener conto da un lato della dose prescritta e dall'altro della forma sotto la quale il farmaco è disponibile, oltre che, ovviamente del peso corporeo del paziente.

Il concetto di funzione di una variabile è centrale: le funzioni sono adatte a modellizzare il modo secondo il quale una quantità fisica è soggetta a cambiamenti dipendenti da fattori quali la temperatura o il tempo: ad esempio, a seguito di somministrazione di un medicinale mediante iniezione intramuscolo, si vuol sapere con precisione massima in quale intervallo di tempo il medicinale ha efficacia (Capitolo 17 sulle applicazioni del calcolo differenziale).

Le funzioni di tipo potenza sono quelle che più comunemente descrivono i rapporti tra variabili di tipo biologico. È recente la scoperta della giustificazione rigorosa della presenza della potenza con esponente 3/4 quando studiamo le leggi del metabolismo dei mammiferi, in particolare la cosiddetta legge sulla riduzione del metabolismo in base alla quale il tasso metabolico dei mammiferi è proporzionale alla massa del mammifero elevata a 3/4 (Capitolo 13 in cui l'utilizzo della scala logaritmica rende facilmente decifrabili i grafici relativi alle leggi di potenza a diverse scale).

Assai interessanti sono i modelli di crescita di popolazioni batteriche che permettono di "spiegare" i dati sperimentali sia in ambiente discreto (Capitolo 12) che continuo (Capitolo 13) anche in connessione con le equazioni differenziali (Capitolo 20).

Il corpo del volume contiene gli elementi del Calcolo differenziale e integrale che, unitamente ai metodi della Geometria Analitica e dell'Algebra lineare, costituiscono l'usuale apparato di un corso di primo anno di tipo Matematica o Istituzioni di Matematiche.

Lo scopo non è solo quello di fornire un sistema di regole e tecniche che comunque lo studioso lettore potrà utilizzare agevolmente, grazie ad accorgimenti utili ad aiutarne la memorizzazione, ma è in buona parte quello di spiegare la ragione del loro funzionamento. Di solito si ritiene che la matematica si riduca ad un insieme di tecniche risolutive. Si tratta invece di trasmettere l'opinione della matematica come di un coerente e strutturato corpo di idee del quale occorre cogliere la grandezza come di un edificio armonico e consistente (ed anche complesso) costruito dall'uomo per migliorare la conoscenza.

La matematica induce un modo di vedere e di pensare che si è rilevato quasi sempre di notevole successo e del quale oggi non è possibile fare a meno se ci si vuol impegnare in campo scientifico.

Il testo contiene una parte raggiungibile sul web ed alcuni capitoli di Appendice esistono solo in formato elettronico e riceveranno adeguati aggiornamenti. Per l'accesso al sito www.edises.it segui le istruzioni riportate nella pagina dedicata.

Gli Autori

Indice

5 Quantità e unità di misura

6 Funzioni e loro applicazioni

7 Equazioni e disequazioni

8 Vettori

9 Algebra delle matrici

10 Le funzioni trigonometriche e i fenomeni periodici

11 Applicazioni della trigonometria

12 La funzione esponenziale

13 La funzione logaritmo

14 Successioni e serie numeriche

15 Limiti di funzioni e funzioni continue

16 Derivate delle funzioni di una variabile

17 Applicazioni del calcolo differenziale, grafici

18 Tecniche di integrazione indefinita

19 L'integrale definito

20 Equazioni differenziali di primo e secondo ordine

21 Equazioni differenziali: metodi numerici

APPENDICI

A I numeri complessi

B Calcolo combinatorio

C Eventi di probabilità. Eventi aleatori

D Probabilità condizionata e applicazioni

E Elementi di statistica descrittiva

Quantità e unità di misura

CAPITOLO 5

Dosaggi di farmaci

In un ospedale inglese un medico prescrive ad un paziente un certo farmaco nella dose di

$$10 \ \frac{\text{mg}}{\text{lb}} \ \text{ogni 8 ore} \tag{5.1}$$

cioè nella dose di 10 milligrammi per libbra di peso corporeo (del paziente) ogni 8 ore. Il farmaco è disponibile sotto forma di soluzione di 0.9 grammi per millilitro: 0.9 g/ml. Sapendo che il paziente pesa 75 kg, quanti *millilitri* di soluzione gli andranno somministrati per dose?

Conoscendo il dosaggio per libbra di peso del paziente, determiniamo in primo luogo il dosaggio per chilogrammo di peso del paziente. A tale scopo è importante sapere che (con una certa approssimazione, che qui non interessa precisare):

$$1 \ \text{kg} = 2.2 \ \text{libbre} \tag{5.2}$$

ovvero

$$1 \ \text{libbra} = 0.45 \ \text{kg} \tag{5.3}$$

Il dosaggio per kg del paziente si ottiene con i seguenti passaggi:

$$10 \ \frac{\text{mg}}{\text{lb}} = 10 \ \frac{\text{mg}}{\text{lb}} \cdot \frac{2.2 \ \text{lb}}{\text{kg}} \tag{5.4}$$

in quanto $\frac{2.2 \ \text{lb}}{\text{kg}} = 1$ grazie alla (5.2).

I passaggi sono giustificati dal fatto che ci interessa eliminare le libbre dall'espressione e far apparire i chilogrammi.

Dalla (5.4) si ottiene allora, semplificando lb, che appare sia a numeratore che a denominatore, il dosaggio per kg:

$$10 \ \frac{\text{mg}}{\text{lb}} = 22 \ \frac{\text{mg}}{\text{kg}} \tag{5.5}$$

che è di 22 mg per kg di peso del paziente.

Ci interessa ora determinare quanti millilitri di soluzione per kg di peso del paziente corrispondono alla dose caratterizzata da (5.5) ed allora osserviamo che 1 millilitro di soluzione contiene 0.9 g di farmaco.

Ora siamo interessati ad eliminare i mg a secondo membro della (5.5) e a far apparire i millilitri.

Perciò il dosaggio per kg diviene:

$$22 \ \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000} \ \frac{\text{g}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000} \ \frac{\text{g}}{\text{kg}} \cdot \frac{1 \ \text{ml}}{0.9 \ \text{g}}$$

Semplificando g, che appare sia a numeratore che a denominatore:

$$22 \ \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000 \times 0.9} \ \frac{\text{ml}}{\text{kg}} = \frac{22}{900} \ \frac{\text{ml}}{\text{kg}} = 0.024 \ \frac{\text{ml}}{\text{kg}}$$

si ottiene il dosaggio di circa

0.024 ml per kg di peso del paziente.

Poiché il paziente pesa 75 kg, il dosaggio per il paziente è di circa

$$0.024 \ \frac{\text{ml}}{\text{kg}} \times 75 \ \text{kg} = 1.8 \ \text{ml}$$

La risposta al quesito è dunque che ogni 8 ore al paziente vengono somministrati 1.8 millilitri di soluzione del medicinale consigliato.

Usando un linguaggio che tiene conto della prassi medica e ricordando che la *posologia* definisce la quantità di medicinale (dose), i tempi e le modalità di somministrazione, possiamo anche concludere che la posologia del caso in studio è esprimibile o in 30 mg/lb del medicinale al giorno o in 0.072 ml/kg di soluzione al giorno.

5.1 Sistemi di misura

Mentre in Matematica i numeri vengono considerati come **entità astratte** su cui si può operare con le regole di calcolo, coloro che si occupano di scienze applicate incontrano i numeri anche sotto forma di **dati**. I dati sono spesso risultati di misurazioni e prendono anche il nome di **quantità** (o **variabili**) **fisiche**. Le quantità fisiche sono rappresentate da **simboli** che presentano una combinazione di *un valore numerico* e di *un'unità di misura*.

Noi studieremo due sistemi di unità di misura: il Sistema internazionale ed il Sistema anglosassone adottato in Europa dal 1960 ed oggi (quasi) universalmente adottato per il calcolo scientifico. Il *Sistema Internazionale* (*S.I.*) è un ampliamento del *sistema metrico decimale* (adottato in Francia nel 1799) basato su *metro*, *chilogrammo*, *secondo* come unità fondamentali di lunghezza, massa e tempo.

Introdurremo anche il *sistema U.S.* (di misura usuale nel mondo) o *sistema anglosassone*, la cui unità di lunghezza è l'*inch* (in) (pollice) e l'unità di peso l'*ounce* (oz) (oncia).

Mostriamo con un esempio quanto sia importante specificare le unità di misura.

FIGURA 5.1

Consideriamo il segmento in Figura 5.1. Se ne misuriamo la lunghezza in centimetri, otteniamo 5.08 cm; se usiamo il metro, otteniamo 0.0508 m o infine 50.8 mm se adottiamo il millimetro come unità di misura.

Se invece utilizziamo il *sistema anglosassone*, la risposta è 2 inches (pollici) o anche $\frac{1}{6}$ ft (piedi). In tutti i casi, per misurare una quantità, occorre confrontare tale quantità con una *unità di misura* standard.

5.2 Conversione da un'unità di misura ad un'altra

È ben noto che si possono usare diverse unità di misura per esprimere una stessa quantità. Ad esempio, una lunghezza può esser misurata in chilometri, in miglia, yards oppure in metri, centimetri o millimetri. Se una lunghezza è nota in termini di una certa unità, come possiamo descriverla mediante una diversa unità? Tale problema è detto di *conversione* da una unità all'altra e, per risolverlo, occorre in primo luogo conoscere le relazioni tra le due unità. Successivamente si dovrà eseguire una moltiplicazione o una divisione.

Ad esempio, volendo conoscere qual è il peso in grammi di un oggetto che pesa 2.5 kg, basta osservare che 1 kg = 1000 g per cui

$$2.5 \text{ kg} = 2.5 \times (1 \text{ kg}) = 2.5 \times (1000 \text{ g}) = (2.5 \times 1000) \text{ g} = 2500 \text{ g}$$

avendo operato come si fa con le regole della moltiplicazione.

Volendo poi conoscere qual è il peso in pounds di un oggetto che pesa 2.5 kg, bisogna consultare le tavole che mettono in relazione le due diverse unità: kg e pounds. Risulta che 1 kg equivale a 2.2 pounds (si veda a fine del presente capitolo) cioè

$$1 \text{ kg} = 2.2 \text{ pounds}$$

per cui sì avrà, procedendo formalmente come prima:

$$2.5 \text{ kg} = 2.5 \times (1 \text{ kg}) = 2.5 \times (2.2 \text{ pounds}) =$$
$$= (2.5 \times 2.2) \text{ pounds} = 5.5 \text{ pounds}.$$

Altro esempio: qual è la lunghezza in pollici del lato di una scrivania che misura 50.8 cm?

Poiché dalle tavole si deduce precisamente:

$$1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm}$$

ovvero

$$1 \text{ cm} = \frac{1 \text{ inches}}{2.54} = \frac{1}{2.54} \text{ inches}$$

si ha:

$$50.8 \text{ cm} = 50.8 \times 1 \text{ cm} = 50.8 \times \frac{1}{2.54} \text{inches} =$$

$$= (50 : 2.54) \text{ inches} = 20 \text{ inches}$$

Analogamente, nel caso del calcolo di velocità, in una situazione in cui si vuol convertire da chilometri all'ora $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a metri al secondo $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{ms}^{-1}\right)$:

$$120 \text{ km h}^{-1} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60'} \times \frac{1'}{60''} \cong 33.3 \text{ ms}^{-1}$$

In maniera più pedante:

$$120 \text{ km h}^{-1} = 120 \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 120 \frac{1000 \text{ m}}{60'} = \frac{120 \times 1000}{60} \times \frac{1 \text{ m}}{1'} =$$

$$= \frac{120 \times 1000}{60} \times \frac{1 \text{ m}}{60''} = \frac{120 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1} \approx 33.3 \text{ ms}^{-1}$$

Questa volta abbiamo utilizzato la relazione:

$$1 = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

Infine, volendo convertire da minuti a secondi, teniamo presente la relazione

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min}$$

che può esser riscritta

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1$$

e semplifichiamo unità che appaiano a numeratore e a denominatore, ottenendo ad esempio:

$$1.44 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 144 \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} =$$

$$= \frac{1.44 \times 1000}{60} \times \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{\text{mm}}{\text{m}} \times \frac{\text{min}}{\text{s}} = 24 \text{ mm s}^{-1}$$

Volendo passare da un tempo espresso in millisecondi (ms) ad uno espresso in secondi (s), si procede come nell'esempio seguente:

$$100 \text{ ms} = 100 \text{ ms} \times \frac{1 \text{ s}}{1000 \text{ ms}} = 0.1 \text{ s}$$

in quanto si è utilizzata la relazione

$$1 = \frac{1 \text{ s}}{1000 \text{ ms}}$$

Analogamente, se si vuol passare da una velocità di 100 eventi per millisecondo ad una di tanti eventi al secondo, si ha:

$$100\ (\mathrm{ms})^{-1} = \frac{100}{\mathrm{ms}} \times \frac{1000\ \mathrm{ms}}{1\ \mathrm{s}} = \frac{100\,000}{\mathrm{s}} = 100\,000\ \mathrm{s}^{-1}$$

Un altro caso frequente si verifica nella trasformazione da unità del sistema metrico ad unità nel S.I, ad esempio nel passaggio da metri a feet (piedi).

Si vuol conoscere a quanti feet corrisponde una lunghezza di 5.08 m: si ha

$$5.08\ \mathrm{m} = 5.08\ \mathrm{m} \times \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}} \times \frac{1\ \mathrm{in}}{2.54\ \mathrm{cm}} \times \frac{1\ \mathrm{ft}}{12\ \mathrm{in}} = \frac{5.08 \times 100}{2.54 \times 12}\ \mathrm{ft} =$$
$$= \frac{50}{3}\ \mathrm{ft} \cong 16.\overline{6}\ \mathrm{ft}$$

Sistema internazionale SI

Riportiamo di seguito alcune utili tabelle.

Osserviamo che attualmente (dal 1983) il *metro* è definito come la lunghezza di un tratto percorso dalla luce nel vuoto in $\frac{1}{299\,792\,458}$ di secondo. Originariamente il metro era stato definito come la decimilionesima parte della distanza, misurata lungo il meridiano di Parigi, tra Polo Nord ed equatore (Accademia delle Scienze, Parigi, 1791). Successivamente dal 1889 il metro era definito come la distanza tra due punti contrassegnati su un prototipo di sbarra di platino-iridio conservata in un laboratorio a Sèvres (Francia) mantenuta a temperatura di 0° C.

Unità di misura nel sistema metrico decimale

Unità	Abbreviazione	Alcune relazioni
		Unità di lunghezza
millimetro	mm	$1\ \mathrm{mm} = \frac{1}{1000}\ \mathrm{m}$
centimetro	cm	$1\ \mathrm{cm} = \frac{1}{100}\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{mm}$
metro	m	1 m = 100 cm
chilometro	km	1 km = 1000 m
		Unità di area
millimetro quadrato	mm^2	$1\ \mathrm{mm}^2 = 0.000001\ \mathrm{m}^2$
centimetro quadrato	cm^2	$1\ \mathrm{cm}^2 = 10^2\ \mathrm{mm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2$
metro quadrato	m^2	$1\ \mathrm{m}^2 = 100^2\ \mathrm{cm}^2 = 10\,000\ \mathrm{cm}^2$
chilometro quadrato	km^2	$1\ \mathrm{km}^2 = 1000^2\ \mathrm{m}^2 = 1\,000\,000\ \mathrm{m}^2$
		Unità di volume
millimetro cubo	mm^3	$1\ \mathrm{mm}^3 = 0.000000001\ \mathrm{m}^3$
centimetro cubo	cm^3	$1\ \mathrm{cm}^3 = 10^3\ \mathrm{mm}^3 = 1000\ \mathrm{mm}^3$
metro cubo	m^3	$1\ \mathrm{m}^3 = 100^3\ \mathrm{cm}^3 = 1\,000\,000\ \mathrm{cm}^3$
chilometro cubo	km^3	$1\ \mathrm{km}^3 = 1000^3\ \mathrm{m}^3 = 1\,000\,000\,000\ \mathrm{m}^3$

Segue: Unità di misura nel sistema metrico decimale		
Unità	**Abbreviazione**	**Alcune relazioni**
	Unità di capacità	
millilitro	ml	$1\ \text{ml} = \frac{1}{1000}\ \text{l}$
centilitro	cl	$1\ \text{cl} = 10\ \text{ml} = \frac{1}{100}\ \text{l}$
litro	l	$1\ \text{l} = 1000\ \text{ml}$
ettolitro	hl	$1\ \text{hl} = 100\ \text{l}$
	Unità di peso	
milligrammo	mg	$1\ \text{mg} = \frac{1}{1000}\ \text{g}$
grammo	g	
chilogrammo	kg	$1\ \text{kg} = 1000\ \text{g}$
miriagrammo	Mg	$1\ \text{Mg} = 10\,000\ \text{g} = 10\ \text{kg}$
quintali	q	$1\ \text{q} = 100\ \text{kg}$
tonnellata	t	$1\ \text{t} = 1000\ \text{kg} = 10\ \text{q}$

Il sistema S.I. consiste di 7 unità fondamentali:

TABELLA 5.1

Dimensione	Unità SI	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Quantità di sostanza	mole	mol
Tempo	secondo	sec (s)
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensità luminosa	candela	cd

di due unità supplementari:

TABELLA 5.2

Dimensione	Unità SI	Simbolo
Angolo piano	radiante	rad
Angolo solido	steradiante	sr

e di un certo numero di unità derivate:

TABELLA 5.3

Misura	Unità SI	Simbolo	Definizione	in unità fondamentali
Forza	newton	N	kg m s^{-2}	
Energia	joule	J	Nm	kg m^2 s^{-2}
Pressione	pascal	Pa	Nm^{-2}	kg m^{-1} s^{-2}

Derivate delle funzioni di una variabile

CAPITOLO 16

Tasso di crescita e tasso di inflazione

Nel linguaggio comune si incontrano spesso espressioni quali: "il tasso di crescita della popolazione mondiale", "la velocità di un aereo in un certo istante", "il tasso di inflazione", che si riferiscono alla variazione di certe grandezze.

Il significato matematico di tali espressioni risiede nel concetto di *derivata*, che ci proponiamo di introdurre nel presente capitolo.

Per comprendere l'importanza della nozione di derivata, osserviamo che spesso la conoscenza della rapidità con la quale una grandezza varia, da punto a punto o di istante in istante, può essere più utile della conoscenza del suo stesso valore.

Ad esempio, è più utile sapere che la temperatura esterna domani aumenterà (o diminuirà) rispetto a quella odierna piuttosto che conoscere il valore della temperatura di domani e non quella di oggi.

Per introdurre in maniera semplice ed intuitiva il concetto di derivata, descriviamo un esempio tratto dalla Meccanica.

Consideriamo una particella che si muove lungo l'asse delle x durante un certo intervallo di tempo I. Supponiamo che essa si trovi nel punto A, di ascissa a, all'istante $t = \alpha$ e nel punto B, di ascissa b, all'istante $t = \beta$, e che sia $\alpha < \beta$.

Conveniamo, inoltre, di misurare le distanze in cm e il tempo in secondi.

Per ogni istante $t \in I$ indichiamo con $s(t)$ l'ascissa della posizione assunta dalla particella sull'asse x, per cui si ha $s(\alpha) = a$ e $s(\beta) = b$.

Se t_0 e t appartengono all'intervallo I e risulta $t_0 < t$, allora il numero:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

è la *velocità media* della particella nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$.

Se facciamo tendere t a t_0, il che corrisponde, dal punto di vista fisico, a calcolare la velocità media in intervalli di tempo sempre più brevi, il limite:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rappresenta la *velocità istantanea* della particella al tempo t_0, misurata in cm al secondo.

Per definizione, il numero $s'(t_0)$ è la *derivata* della funzione $s(t)$ nel punto t_0.

16.1 Definizione di derivata

Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ di R e sia x_0 un punto di $[a, b]$. Per ogni $x \in [a, b]$, diverso da x_0, consideriamo il rapporto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{16.1}$$

che prende il nome di *rapporto incrementale* della funzione f relativo al punto x_0.

Tale rapporto varia al variare di x, cioè è una funzione della variabile x che può essere o meno dotata di limite per x che tende a x_0.

Definizione 16.1. Si dice che la funzione f è *derivabile* nel punto x_0 se *esiste ed è finito* il limite, per x che tende a x_0, del rapporto incrementale (16.1).

Tale limite si indica con uno dei simboli:

$$[Df(x)]_{x=x_0} \quad , \quad f'(x_0) \quad , \quad Df(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

e si chiama *derivata* di f in x_0.

Dunque, se f è derivabile in x_0, allora la sua derivata $f'(x_0)$ è uguale al limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{16.2}$$

ed è numero reale.

Osservazione 16.1. Talvolta il rapporto incrementale di una funzione f, relativo al punto x_0 si denota con il simbolo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

avendo posto nella (16.1) $x - x_0 = h$ e la derivata $f'(x_0)$ si rappresenta nel modo seguente:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

DEFINIZIONE 16.2. Se f è una funzione definita in $[a, b]$ e x_0 appartiene all'intervallo $]a, b]$, si dice che f è *derivabile in x_0 da sinistra*, se esiste finito il limite del rapporto incrementale per x che tende a x_0 da sinistra. Tale limite si indica con $f'_-(x_0)$ e prende il nome di *derivata sinistra di f in x_0*.

Dunque, per definizione, si ha:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogamente si definisce la *derivata destra* di f in un punto x_0 appartenente all'intervallo $[a, b[$, con la posizione:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Osservazione 16.2. Se x_0 è un punto interno all'intervallo $[a, b]$, cioè se risulta $x_0 \in]a, b[$ allora f è derivabile in x_0 se e solo se la sua derivata sinistra e la sua derivata destra in x_0 sono numeri reali uguali fra loro e il loro comune valore coincide con $f'(x_0)$:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \in R.$$

Un primo risultato sulle funzioni derivabili è il seguente teorema, che istituisce un legame tra la derivabilità e la continuità di una funzione in un punto x_0.

TEOREMA 16.1. *Se f è derivabile in x_0, allora essa è anche continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni x diverso da x_0 si ha:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0), \tag{16.3}$$

ed allora, essendo, per ipotesi, finito il limite.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

passando al limite per x che tende a x_0 nell'uguaglianza (16.3), abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Poiché $f(x_0)$ non dipende da x, la relazione precedente implica:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

ossia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

per cui f è continua in x_0.

Osservazione 16.3. È opportuno mettere in evidenza che, viceversa, una funzione può essere continua in un punto x_0, senza essere ivi derivabile (vedere il successivo Esempio 16.2).

Se il rapporto incrementale della funzione f relativo al punto x_0 tende a $+\infty$ (risp. a $-\infty$) al tendere di x verso x_0, allora si dice che f ha in x_0 *derivata infinita* e che la *derivata* $Df(x_0)$ di f in x_0 è $+\infty$ (risp. $-\infty$).

Osservazione 16.4. Se una funzione f è costante nell'intervallo X, allora la sua derivata è nulla:

$$f(x) = c \qquad \forall\, x \in X \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in X$$

Infatti si ha, per ogni $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

▶ Esempio 16.1

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f(x) = x^2,$$

nel punto $x_0 = 3$.

Il rapporto incrementale di tale funzione, relativo al punto $x_0 = 3$ è:

$$\frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = x + 3,$$

e dunque il suo limite per x che tende a 3 è uguale a:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

in quanto la funzione $g(x) = x + 3$ è continua e dunque:

$$\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) = 6.$$

▶ **Esempio 16.2**

Una funzione continua e non derivabile in un punto x_0

Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ e verifichiamo che essa, pur essendo continua, in quanto:

$$\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0| \qquad \text{per ogni } x_0 \in R,$$

non è tuttavia derivabile in $x_o = 0$. Infatti:

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{-x-0}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{per } x < 0$$

e

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{x-0}{x-0} = \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{per } x > 0$$

Pertanto la derivata sinistra di f in 0 è uguale a -1:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

e la derivata destra di f in 0 è uguale a 1:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

cioè:

$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

e dunque f non è derivabile in 0.

▶ **Esempio 16.3**

Una funzione con derivata infinita

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, che è definita nell'intervallo $[0, +\infty[$. Consideriamo il suo rapporto incrementale relativo al punto 0:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall\, x > 0$$

ed eseguiamo il limite per $x \to 0$ (da destra).

Si ha:

$$\left[D\sqrt{x}\right]_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

in quanto, per definizione di limite, per ogni $k > 0$ esiste $d = \frac{1}{k^2}$ tale che:

$$0 < x < d \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x}} > k$$

16.2 Significato geometrico della derivata

Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ e sia $x_0 \in\,]a, b[$.

Disegnamo, in un sistema di assi cartesiani, il grafico della funzione f, ed indichiamo con P il punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

Fissato un punto $x \neq x_0$, indichiamo con Q il punto di coordinate $(x, f(x))$ (Figura 16.1) e con $s(x)$ la retta (secante al grafico) passante per i punti P e Q, la cui equazione è:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(t - x_0)$$

ove t varia in R.

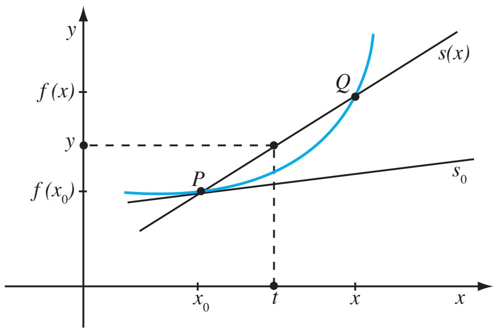


FIGURA 16.1

Supponiamo ora che f sia derivabile in x_0 e sia $f'(x_0)$ la sua derivata:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Indichiamo infine con s_0 la retta di equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0),$$

ove t varia in R.

Se x tende verso x_0, allora $f(x)$ tende verso $f(x_0)$, grazie alla continuità di f in x_0 e il punto Q di coordinate $(x, f(x))$ "tende" al punto P di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

D'altra parte, se x tende verso x_0, allora:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ tende verso } f'(x_0)$$

e cioè *il coefficiente angolare della retta secante $s(x)$ tende al coefficiente angolare $f'(x_0)$ della retta s_0.*

Perciò è del tutto naturale chiamare la retta s_0 *retta tangente* al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Il significato geometrico della derivata $f'(x_0)$ è dunque quello di *coefficiente angolare* (o *pendenza*) *della tangente* al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

Osservazione 16.5. Se la derivata di f in x_0 è uguale a zero:

$$f'(x_0) = 0,$$

allora, il coefficiente angolare della tangente è uguale a zero e la tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse x (Figura 16.2).

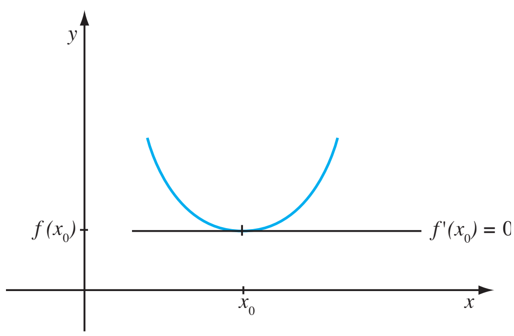
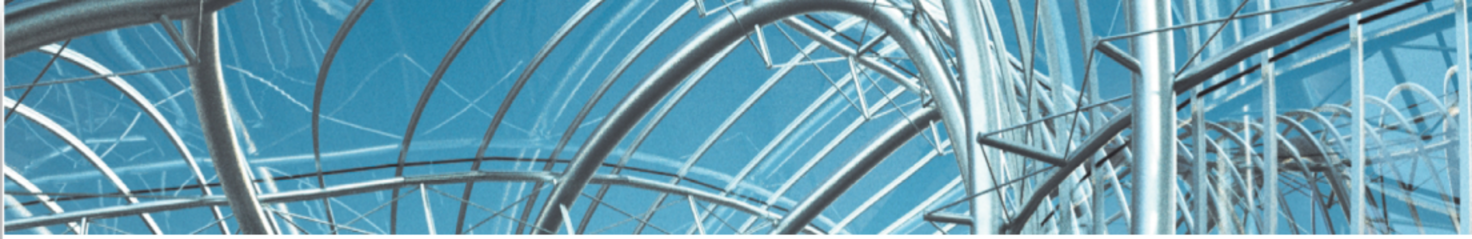


FIGURA 16.2



CARLO SBORDONE • FRANCESCO SBORDONE

Matematica
per le Scienze della Vita

EdiSES
www.edises.it

ISBN 978–88–7959–829–3

9 788879 598293

€ 33,00