

Carlo Sbordone • Francesco Sbordone

# Matematica

per le Scienze della Vita







# Matematica

## per le Scienze della Vita



Carlo Sbordone  
Francesco Sbordone



Carlo Sbordone - Francesco Sbordone  
**Matematica per le Scienze della Vita**  
Copyright © 2014, EdiSES s.r.l. - Napoli

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2018	2017	2016	2015	2014					

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,  
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

**Carlo Sbordone**  
*Ordinario di Analisi Matematica  
Università di Napoli "Federico II"*

**Francesco Sbordone**  
*Laurea magistrale in Fisica  
Università di Roma "La Sapienza"*

*Stampato presso*

Tipolitografia Petrucci Corrado & Co. s.n.c.  
Zona Ind. Regnano Città di Castello (PG)

*per conto della*

EdiSES - Piazza Dante, 89 - Napoli

ISBN 978 88 7959 829 3

[www.edises.it](http://www.edises.it)  
[info@edises.it](mailto:info@edises.it)

# Presentazione

La complessità sempre crescente e la natura interdisciplinare dei problemi che si pongono nella scienza e nella tecnologia moderna hanno evidenziato la necessità di stabilire sempre più intensi livelli di conoscenze matematiche per gli operatori nei vari settori delle Scienze della Vita ed in particolare della Sanità. L'obiettivo da perseguire è quello di mostrare che anche in questi settori è indubbia l'utilità dei modelli matematici in grado di consentire previsioni e di interpretare quantitativamente ciò che viene osservato sperimentalmente.

Questo testo cerca di descrivere la matematica che si ritiene oggi utile per studiare con profitto le Scienze Applicate, con particolare riguardo alle discipline biomediche attraverso la presentazione, capitolo per capitolo, di concetti e tecniche matematiche rivelatesi assai efficaci in alcuni esempi concreti, di cui viene data un'idea sintetica.

Il Capitolo 1 di teoria degli insiemi si apre con un esempio relativo alla descrizione dei gruppi sanguigni, fornendo una maniera schematica per illustrare le compatibilità tra gruppi. Ne risulta un quadro chiaro e ben memorizzabile.

Nel Capitolo 2 vengono presentati i principi del ragionamento logico (utili per la matematica, ma anche nella vita di ogni giorno). Ad esempio si insiste anche sulla semplice capacità di negare una proposizione o di comprendere la differenza tra condizione necessaria e condizione sufficiente. Tali acquisizioni devono essere garantite per una valida professionalità futura in campo scientifico-sanitario.

Nel Capitolo 3 ampio spazio viene riservato alla descrizione degli insiemi numerici collocati sulla retta: gli enti numerici e le operazioni vengono definiti con gradualità ed in maniera semplice ma rigorosa: nulla viene dato per noto e adeguato spazio viene dedicato alle frazioni e alle operazioni con i numeri decimali, anche in vista del largo uso della Notazione Scientifica e dello studio nel Capitolo 5 sulle unità di misura per le quantità di natura fisica. La capacità di operare agevolmente con le unità di misura adeguata è importante nel dosaggio di farmaci e nella loro somministrazione che deve tener conto da un lato della dose prescritta e dall'altro della forma sotto la quale il farmaco è disponibile, oltre che, ovviamente del peso corporeo del paziente.

Il concetto di funzione di una variabile è centrale: le funzioni sono adatte a modellizzare il modo secondo il quale una quantità fisica è soggetta a cambiamenti dipendenti da fattori quali la temperatura o il tempo: ad esempio, a seguito di somministrazione di un medicinale mediante iniezione intramuscolo, si vuol sapere con precisione massima in quale intervallo di tempo il medicinale ha efficacia (Capitolo 17 sulle applicazioni del calcolo differenziale).

Le funzioni di tipo potenza sono quelle che più comunemente descrivono i rapporti tra variabili di tipo biologico. È recente la scoperta della giustificazione rigorosa della presenza della potenza con esponente  $3/4$  quando studiamo le leggi del metabolismo dei mammiferi, in particolare la cosiddetta legge sulla riduzione del metabolismo in base alla quale il tasso metabolico dei mammiferi è proporzionale alla massa del mammifero elevata a  $3/4$  (Capitolo 13 in cui l'utilizzo della scala logaritmica rende facilmente decifrabili i grafici relativi alle leggi di potenza a diverse scale).

Assai interessanti sono i modelli di crescita di popolazioni batteriche che permettono di “spiegare” i dati sperimentali sia in ambiente discreto (Capitolo 12) che continuo (Capitolo 13) anche in connessione con le equazioni differenziali (Capitolo 20).

Il corpo del volume contiene gli elementi del Calcolo differenziale e integrale che, unitamente ai metodi della Geometria Analitica e dell'Algebra lineare, costituiscono l'usuale apparato di un corso di primo anno di tipo Matematica o Istituzioni di Matematiche.

Lo scopo non è solo quello di fornire un sistema di regole e tecniche che comunque lo studioso lettore potrà utilizzare agevolmente, grazie ad accorgimenti utili ad aiutarne la memorizzazione, ma è in buona parte quello di spiegare la ragione del loro funzionamento. Di solito si ritiene che la matematica si riduca ad un insieme di tecniche risolutive. Si tratta invece di trasmettere l'opinione della matematica come di un coerente e strutturato corpo di idee del quale occorre cogliere la grandezza come di un edificio armonico e consistente (ed anche complesso) costruito dall'uomo per migliorare la conoscenza.

La matematica induce un modo di vedere e di pensare che si è rilevato quasi sempre di notevole successo e del quale oggi non è possibile fare a meno se ci si vuol impegnare in campo scientifico.

Il testo contiene una parte raggiungibile sul web ed alcuni capitoli di Appendice esistono solo in formato elettronico e riceveranno adeguati aggiornamenti. Per l'accesso al sito [www.edises.it](http://www.edises.it) segui le istruzioni riportate nella pagina dedicata.

GLI AUTORI

# Indice

## 1 Insiemi

<i>Introduzione</i>	I gruppi sanguigni	1
1.1	Concetto di insieme	2
1.2	Esempi di insiemi	3
1.3	Quantificatori	4
1.4	Sottoinsiemi o parti di un insieme	4
1.5	Inclusione	7
1.6	Diagrammi di Venn	8
1.7	Unione di insiemi	9
1.8	Intersezione di insiemi	10
1.9	Differenza (o complemento) di due insiemi	12
1.10	Prodotto cartesiano di insiemi	13

## 2 Principi di ragionamento logico

<i>Introduzione</i>	La logica per la matematica	15
2.1	Proposizioni	16
2.2	Negazione di una proposizione	16
2.3	Predicati	17
2.4	Quantificatori	18
2.5	Negazione di proposizioni contenenti quantificatori universali	18
2.6	Dagli insiemi alla logica	20
2.7	Negazione di proposizioni contenenti quantificatori esistenziali	21
2.8	Condizioni sufficienti e condizioni necessarie	23

## 3 Numeri

3.1	I numeri naturali	25
3.2	I numeri interi relativi	31
3.3	Le frazioni	35
3.4	Numeri decimali. Notazione scientifica	47
3.5	Numeri decimali non limitati	52
3.6	Numeri razionali e numeri irrazionali	55
3.7	Numeri reali e loro rappresentazione decimale	63

## 4 Il metodo delle coordinate

<i>Introduzione</i>	Epicentro di un terremoto GPS (Global Positioning System)	73
4.1	Riferimento cartesiano sulla retta	74
4.2	Intervalli di $R$ e loro rappresentazione geometrica	76
4.3	Coordinate cartesiane nel piano	77
4.4	La nozione di distanza	78
4.5	La nozione di pendenza di una retta	80
4.6	L'equazione della retta	81
4.7	L'equazione della circonferenza	84
4.8	La misura degli angoli	85
4.9	Coordinate polari nel piano	87
4.10	Definizione di seno, coseno e tangente	89
4.11	Conversione di coordinate polari in cartesiane e viceversa	91



## 5 Quantità e unità di misura

<i>Introduzione</i>	Dosaggi di farmaci	93
5.1	Sistemi di misura	93
5.2	Conversione da un'unità di misura ad un'altra	94
5.3	Analisi dimensionale	101
5.4	Arrotondamento di numeri decimali	102
5.5	Cifre significative	104
5.6	Materiali in soluzione, molarità	105

## 6 Funzioni e loro applicazioni

6.1	Il concetto di funzione	111
6.2	Definizione intuitiva di funzione	113
6.3	Le funzioni lineari	114
6.4	Le funzioni quadratiche	116
6.5	I trinomi di secondo grado	117
6.6	Il principio di induzione	118
6.7	Le funzioni come applicazioni tra insiemi	120
6.8	Applicazioni biunivoche	121
6.9	Applicazioni suriettive	122
6.10	Applicazioni inverse	124
6.11	Funzioni composte	127
6.12	Funzioni crescenti e decrescenti	129

## 7 Equazioni e disequazioni

<i>Introduzione</i>	Un problema di programmazione lineare	131
7.1	Equazioni di primo grado di un'incognita	133
7.2	Disequazioni di primo grado in una incognita	134
7.3	Disequazioni in cui interviene il valore assoluto	135

7.4	Formule risolutive per l'equazione di secondo grado	137
7.5	Rappresentazione grafica delle soluzioni di equazioni di secondo grado	139
7.6	Disequazioni di secondo grado in una incognita	141
7.7	Equazioni e disequazioni di primo grado in due incognite	143

## 8 Vettori

8.1	Vettori del piano euclideo	147
8.2	Proprietà delle operazioni sui vettori	149
8.3	Definizione di spazio vettoriale	150
8.4	Combinazioni lineari	152
8.5	Vettori linearmente dipendenti	153
8.6	Vettori linearmente indipendenti	154
8.7	Basi di uno spazio vettoriale	156
8.8	Forme lineari su uno spazio vettoriale	157
8.9	Applicazioni lineari tra due spazi vettoriali	158

## 9 Algebra delle matrici

9.1	Definizione di matrice	161
9.2	Uguaglianza di matrici	163
9.3	Addizione di matrici	164
9.4	Prodotto di matrice per un numero reale	165
9.5	Prodotto di matrici	166
9.6	La matrice unità	171
9.7	Matrici $2 \times 2$ ed applicazioni lineari	171
9.8	Matrici e sistemi di equazioni lineari	172



## 10 Le funzioni trigonometriche e i fenomeni periodici

10.1	Funzioni periodiche	177
10.2	Le funzioni seno e coseno	178
10.3	Seno e coseno di un numero reale	179
10.4	Proprietà fondamentali di seno e coseno. Le formule di addizione e duplicazione	181
10.5	Le funzioni tangente e cotangente	183
10.6	Grafici delle funzioni trigonometriche	184
10.7	Moti periodici	187
10.8	Appendice	190

## 11 Applicazioni della trigonometria

<i>Introduzione</i>	Scopi della trigonometria	193
11.1	Funzioni trigonometriche e triangoli rettangoli	193
11.2	Funzioni trigonometriche e triangoli qualunque	194
11.3	Applicazioni	196
11.4	Equazioni trigonometriche	198
11.5	Alcune semplici disequazioni trigonometriche	202

## 12 La funzione esponenziale

<i>Introduzione</i>	Modelli discreti di crescita di popolazioni	205
12.1	Esempi di crescita lineare: progressioni aritmetiche	206
12.2	Esempi di crescita esponenziale: progressioni geometriche	210
12.3	La funzione radice $n$ -sima	213
12.4	Algoritmi	214
12.5	La funzione esponenziale in $Q$	218

12.6	La funzione esponenziale in $R$	222
12.7	Proprietà della funzione esponenziale	223

## 13 La funzione logaritmo

<i>Introduzione</i>	Scala logaritmica (log-log)	227
13.1	Il logaritmo come inverso dell'esponenziale	229
13.2	Proprietà algebriche della funzione logaritmo	231
13.3	Cambiamento di base	233
13.4	Scale semilogaritmiche	234
13.5	Scale logaritmiche	237
13.6	Applicazioni: crescita di una popolazione batterica	238
13.7	Applicazioni: decadimento di sostanze radioattive	240

## 14 Successioni e serie numeriche

<i>Introduzione</i>	Achille raggiunge la tartaruga?	243
14.1	Insieme finito di numeri reali	244
14.2	Successioni definite per ricorrenza	245
14.3	Successioni di numeri reali convergenti o divergenti	246
14.4	Proprietà dei limiti di successioni	251
14.5	Successioni crescenti e successioni decrescenti	252
14.6	Le serie	253
14.7	Proprietà delle serie	255
14.8	La serie geometrica	256
14.9	Serie a termini non negativi	258
14.10	Criteri di convergenza e divergenza per le serie	259

## 15 Limiti di funzioni e funzioni continue

15.1	Intorni di un punto. Punti di accumulazione	261
15.2	Definizione di limite finito di una funzione in un punto	262
15.3	Limite destro e limite sinistro	265
15.4	Definizione di limite infinito di una funzione in un punto	267
15.5	Limite all'infinito per una funzione	268
15.6	Teoremi sui limiti	270
15.7	Operazioni sui limiti	271
15.8	Continuità e discontinuità di una funzione	279
15.9	Punti di discontinuità di una funzione	282
15.10	Discontinuità delle funzioni monotone	284
15.11	Funzioni continue in un intervallo	286
15.12	Continuità delle funzioni composte	287
15.13	Continuità della funzione inversa	287
15.14	Alcuni limiti notevoli	291

## 16 Derivate delle funzioni di una variabile

<i>Introduzione</i> Tasso di crescita e tasso di inflazione		295
16.1	Definizione di derivata	295
16.2	Significato geometrico della derivata	298
16.3	Regole di derivazione	300
16.4	Derivate delle funzioni elementari	301
16.5	Funzioni derivabili in un intervallo	304
16.6	Esempi di calcolo di derivate	306
16.7	Derivate di ordine superiore	306

## 17 Applicazioni del calcolo differenziale, grafici

<i>Introduzione</i> Iniezione di un medicinale		309
17.1	Massimi e minimi relativi di una funzione	310
17.2	Il teorema di Rolle	312
17.3	Il teorema di Lagrange e sue conseguenze	313
17.4	Regole di de L'Hospital per il calcolo di limiti in forma indeterminata	317
17.5	Differenziale di una funzione	322
17.6	Ricerca dei massimi e minimi relativi di una funzione	324
17.7	Punti di massimo e minimo assoluto	327
17.8	Funzioni convesse e funzioni concave	329
17.9	Asintoti	332
17.10	Campo di esistenza di una funzione	335
17.11	Grafico di una funzione	337

## 18 Tecniche di integrazione indefinita

<i>Introduzione</i> Tecniche di integrazione indefinita		345
18.1	Primitive di una funzione di una variabile	345
18.2	Definizione di integrale indefinito	346
18.3	Integrali indefiniti immediati	347
18.4	Integrazione per decomposizione in somma	351
18.5	Integrazione di funzioni razionali	353
18.6	Integrazione per parti	358
18.7	Integrazione per sostituzione	360
18.8	L'equazione differenziale $y' = f(x)$	361

## 19 L'integrale definito

<i>Introduzione</i>	Integrale definito	363
19.1	Area di figure piane	364
19.2	Area del rettangoloide e integrale definito di una funzione positiva	369
19.3	Definizione generale di integrale definito	372
19.4	Proprietà dell'integrale definito	375
19.5	Il teorema fondamentale del calcolo integrale	376
19.6	Regole di integrazione definita	379

## 20 Equazioni differenziali di primo e secondo ordine

<i>Introduzione</i>	Modelli di crescita di popolazioni	381
20.1	Equazioni differenziali del primo ordine	382
20.2	Soluzione generale delle equazioni lineari omogenee del primo ordine	385
20.3	Interpretazione geometrica. Problemi di Cauchy	386
20.4	Soluzioni generali delle equazioni lineari a coefficienti costanti	388
20.5	Formulazione di modelli matematici mediante equazioni differenziali del primo ordine	389
20.6	Dal primo al secondo ordine	392
20.7	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	393
20.8	Soluzione generale dell'equazione omogenea del secondo ordine	396
20.9	Equazioni non omogenee	397

20.10	Il problema di Cauchy per le equazioni omogenee del secondo ordine	402
20.11	Modelli matematici fondati sulle equazioni differenziali del secondo ordine	404
20.12	Circuiti oscillanti	406
<b>21</b>	<b>Equazioni differenziali: metodi numerici</b>	
21.1	Il metodo di Eulero	410
21.2	Il metodo di Runge-Kutta	413
21.3	Convergenza di un metodo	414

## APPENDICI

### A I numeri complessi

	Introduzione	417
A.1	Definizione di numero complesso	417
A.2	Forma algebrica dei numeri complessi	419
A.3	Modulo e coniugato di un numero complesso	421
A.4	Piano di Argand-Gauss: forma geometrica dei numeri complessi	423
A.5	Forma trigonometrica dei numeri complessi	425
A.6	Operazioni sui numeri complessi in forma trigonometrica	428
A.7	Radici $n$ -sime di numeri complessi	432
A.8	Risoluzione delle equazioni di secondo grado	433
A.9	Formula di Eulero ed esponenziale complesso	434

**B** Calcolo combinatorio

<i>Introduzione</i>	Coincidenze	435
<b>B.1</b>	Premessa	436
<b>B.2</b>	Disposizioni	436
<b>B.3</b>	Permutazioni	439
<b>B.4</b>	Combinazioni	442
<b>B.5</b>	La formula di Newton per la potenza di un binomio	444
<b>B.6</b>	Disposizioni con ripetizioni	446

**C** Eventi di probabilità.  
Eventi aleatori

<i>Introduzione</i>	Cenni storici	447
<b>C.1</b>	Spazi di probabilità. Eventi aleatori	447
<b>C.2</b>	Frequenza di un evento	452
<b>C.3</b>	Definizione di probabilità	453
<b>C.4</b>	Regola della somma	458

**D** Probabilità condizionata  
e applicazioni

<b>D.1</b>	Probabilità condizionata	463
<b>D.2</b>	Teorema delle probabilità composte	465
<b>D.3</b>	Eventi indipendenti	466
<b>D.4</b>	Formula di Bayes	470

**E** Elementi di statistica  
descrittiva

<i>Introduzione</i>	Cenni storici	475
<b>E.1</b>	Rilevazione di dati	475
<b>E.2</b>	Rappresentazione grafica di fenomeni statistici	477
<b>E.3</b>	Media aritmetica	481
<b>E.4</b>	Indici di variabilità	486
<b>E.5</b>	Regressione e correlazione	490

<b>Indice analitico</b>	I-1
-------------------------	-----

# Quantità e unità di misura

## CAPITOLO

## 5

### Dosaggi di farmaci

In un ospedale inglese un medico prescrive ad un paziente un certo farmaco nella dose di

$$10 \frac{\text{mg}}{\text{lb}} \text{ ogni 8 ore} \quad (5.1)$$

cioè nella dose di 10 milligrammi per libbra di peso corporeo (del paziente) ogni 8 ore. Il farmaco è disponibile sotto forma di soluzione di 0.9 grammi per millilitro: 0.9 g/ml. Sapendo che il paziente pesa 75 kg, quanti *millilitri* di soluzione gli andranno somministrati per dose?

Conoscendo il dosaggio per libbra di peso del paziente, determiniamo in primo luogo il dosaggio per chilogrammo di peso del paziente. A tale scopo è importante sapere che (con una certa approssimazione, che qui non interessa precisare):

$$1 \text{ kg} = 2.2 \text{ libbre} \quad (5.2)$$

ovvero

$$1 \text{ libbra} = 0.45 \text{ kg} \quad (5.3)$$

Il dosaggio per kg del paziente si ottiene con i seguenti passaggi:

$$10 \frac{\text{mg}}{\text{lb}} = 10 \frac{\text{mg}}{\text{lb}} \cdot \frac{2.2 \text{ lb}}{\text{kg}} \quad (5.4)$$

in quanto  $\frac{2.2 \text{ lb}}{\text{kg}} = 1$  grazie alla (5.2).

I passaggi sono giustificati dal fatto che ci interessa eliminare le libbre dall'espressione e far apparire i chilogrammi.

Dalla (5.4) si ottiene allora, semplificando lb, che appare sia a numeratore che a denominatore, il dosaggio per kg:

$$10 \frac{\text{mg}}{\text{lb}} = 22 \frac{\text{mg}}{\text{kg}} \quad (5.5)$$

che è di 22 mg per kg di peso del paziente.

Ci interessa ora determinare quanti millilitri di soluzione per kg di peso del paziente corrispondono alla dose caratterizzata da (5.5) ed allora osserviamo che 1 millilitro di soluzione contiene 0.9 g di farmaco.

Ora siamo interessati ad eliminare i mg a secondo membro della (5.5) e a far apparire i millilitri.

Perciò il dosaggio per kg diviene:

$$22 \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000} \frac{\text{g}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000} \frac{\text{g}}{\text{kg}} \cdot \frac{1 \text{ ml}}{0.9 \text{ g}}$$

Semplificando g, che appare sia a numeratore che a denominatore:

$$22 \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = \frac{22}{1000 \times 0.9} \frac{\text{ml}}{\text{kg}} = \frac{22}{900} \frac{\text{ml}}{\text{kg}} = 0.024 \frac{\text{ml}}{\text{kg}}$$

si ottiene il dosaggio di circa

$$0.024 \text{ ml per kg di peso del paziente.}$$

Poiché il paziente pesa 75 kg, il dosaggio per il paziente è di circa

$$0.024 \frac{\text{ml}}{\text{kg}} \times 75 \text{ kg} = 1.8 \text{ ml}$$

La risposta al quesito è dunque che ogni 8 ore al paziente vengono somministrati 1.8 millilitri di soluzione del medicinale consigliato.

Usando un linguaggio che tiene conto della prassi medica e ricordando che la *posologia* definisce la quantità di medicinale (dose), i tempi e le modalità di somministrazione, possiamo anche concludere che la posologia del caso in studio è esprimibile o in 30 mg/lb del medicinale al giorno o in 0.072 ml/kg di soluzione al giorno.

## 5.1 Sistemi di misura

Mentre in Matematica i numeri vengono considerati come **entità astratte** su cui si può operare con le regole di calcolo, coloro che si occupano di scienze applicate incontrano i numeri anche sotto forma di **dati**. I dati sono spesso risultati di misurazioni e prendono anche il nome di **quantità** (o **variabili**) **fisiche**. Le quantità fisiche sono rappresentate da **simboli**

che presentano una combinazione di *un valore numerico* e di *un'unità di misura*.

Noi studieremo due sistemi di unità di misura: il Sistema internazionale ed il Sistema anglosassone adottato in Europa dal 1960 ed oggi (quasi) universalmente adottato per il calcolo scientifico. Il *Sistema Internazionale* (*S.I.*) è un ampliamento del *sistema metrico decimale* (adottato in Francia nel 1799) basato su *metro*, *chilogrammo*, *secondo* come unità fondamentali di lunghezza, massa e tempo.

Introdurremo anche il *sistema U.S.* (di misura usuale nel mondo) o *sistema anglosassone*, la cui unità di lunghezza è l'*inch* (in) (pollice) e l'unità di peso l'*ounce* (oz) (oncia).

Mostriamo con un esempio quanto sia importante specificare le unità di misura.

Consideriamo il segmento in Figura 5.1. Se ne misuriamo la lunghezza in centimetri, otteniamo 5.08 cm; se usiamo il metro, otteniamo 0.0508 m o infine 50.8 mm se adottiamo il millimetro come unità di misura.

Se invece utilizziamo il *sistema anglosassone*, la risposta è 2 inches (pollici) o anche  $\frac{1}{6}$  ft (piedi). In tutti i casi, per misurare una quantità, occorre confrontare tale quantità con una *unità di misura standard*.

FIGURA 5.1

## 5.2 Conversione da un'unità di misura ad un'altra

È ben noto che si possono usare diverse unità di misura per esprimere una stessa quantità. Ad esempio, una lunghezza può esser misurata in chilometri, in miglia, yards oppure in metri, centimetri o millimetri. Se una lunghezza è nota in termini di una certa unità, come possiamo descriverla mediante una diversa unità? Tale problema è detto di *conversione* da una unità all'altra e, per risolverlo, occorre in primo luogo conoscere le relazioni tra le due unità. Successivamente si dovrà eseguire una moltiplicazione o una divisione.

Ad esempio, volendo conoscere qual è il peso in grammi di un oggetto che pesa 2.5 kg, basta osservare che  $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$  per cui

$$2.5 \text{ kg} = 2.5 \times (1 \text{ kg}) = 2.5 \times (1000 \text{ g}) = (2.5 \times 1000) \text{ g} = 2500 \text{ g}$$

avendo operato come si fa con le regole della moltiplicazione.

Volendo poi conoscere qual è il peso in pounds di un oggetto che pesa 2.5 kg, bisogna consultare le tavole che mettono in relazione le due diverse unità: kg e pounds. Risulta che 1 kg equivale a 2.2 pounds (si veda a fine del presente capitolo) cioè

$$1 \text{ kg} = 2.2 \text{ pounds}$$

per cui si avrà, procedendo formalmente come prima:

$$\begin{aligned} 2.5 \text{ kg} &= 2.5 \times (1 \text{ kg}) = 2.5 \times (2.2 \text{ pounds}) = \\ &= (2.5 \times 2.2) \text{ pounds} = 5.5 \text{ pounds.} \end{aligned}$$

Altro esempio: qual è la lunghezza in pollici del lato di una scrivania che misura 50.8 cm?

Poiché dalle tavole si deduce precisamente:

$$1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm}$$

ovvero

$$1 \text{ cm} = \frac{1 \text{ inches}}{2.54} = \frac{1}{2.54} \text{ inches}$$

si ha:

$$\begin{aligned} 50.8 \text{ cm} &= 50.8 \times 1 \text{ cm} = 50.8 \times \frac{1}{2.54} \text{ inches} = \\ &= (50 : 2.54) \text{ inches} = 20 \text{ inches} \end{aligned}$$

Analogamente, nel caso del calcolo di velocità, in una situazione in cui si vuol convertire da chilometri all'ora  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  a metri al secondo  $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{ms}^{-1}\right)$ :

$$120 \text{ km h}^{-1} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60'} \times \frac{1'}{60''} \cong 33.3 \text{ ms}^{-1}$$

In maniera più pedante:

$$\begin{aligned} 120 \text{ km h}^{-1} &= 120 \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 120 \frac{1000 \text{ m}}{60'} = \frac{120 \times 1000}{60} \times \frac{1 \text{ m}}{1'} = \\ &= \frac{120 \times 1000}{60} \times \frac{1 \text{ m}}{60''} = \frac{120 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1} \approx 33.3 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

Questa volta abbiamo utilizzato la relazione:

$$1 = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

Infine, volendo convertire da minuti a secondi, teniamo presente la relazione

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min}$$

che può esser riscritta

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1$$

e semplifichiamo unità che appaiano a numeratore e a denominatore, ottenendo ad esempio:

$$\begin{aligned} 1.44 \frac{\text{m}}{\text{min}} &= 144 \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \\ &= \frac{1.44 \times 1000}{60} \times \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{\text{mm}}{\text{m}} \times \frac{\text{min}}{\text{s}} = 24 \text{ mm s}^{-1} \end{aligned}$$

Volendo passare da un tempo espresso in millisecondi (ms) ad uno espresso in secondi (s), si procede come nell'esempio seguente:

$$100 \text{ ms} = 100 \text{ ms} \times \frac{1 \text{ s}}{1000 \text{ ms}} = 0.1 \text{ s}$$

in quanto si è utilizzata la relazione

$$1 = \frac{1 \text{ s}}{1000 \text{ ms}}$$



Analogamente, se si vuol passare da una velocità di 100 eventi per millisecondo ad una di tanti eventi al secondo, si ha:

$$100 \text{ (ms)}^{-1} = \frac{100}{\text{ms}} \times \frac{1000 \text{ ms}}{1 \text{ s}} = \frac{100\,000}{\text{s}} = 100\,000 \text{ s}^{-1}$$

Un altro caso frequente si verifica nella trasformazione da unità del sistema metrico ad unità nel S.I., ad esempio nel passaggio da metri a feet (piedi).

Si vuol conoscere a quanti feet corrisponde una lunghezza di 5.08 m: si ha

$$\begin{aligned} 5.08 \text{ m} &= 5.08 \text{ m} \times \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \times \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} = \frac{5.08 \times 100}{2.54 \times 12} \text{ ft} = \\ &= \frac{50}{3} \text{ ft} \cong 16.\bar{6} \text{ ft} \end{aligned}$$

### Sistema internazionale SI

Riportiamo di seguito alcune utili tabelle.

Osserviamo che attualmente (dal 1983) il *metro* è definito come la lunghezza di un tratto percorso dalla luce nel vuoto in  $\frac{1}{299\,792\,458}$  di secondo. Originariamente il metro era stato definito come la decimilionesima parte della distanza, misurata lungo il meridiano di Parigi, tra Polo Nord ed equatore (Accademia delle Scienze, Parigi, 1791). Successivamente dal 1889 il metro era definito come la distanza tra due punti contrassegnati su un prototipo di sbarra di platino-iridio conservata in un laboratorio a Sèvres (Francia) mantenuta a temperatura di 0°C.

Unità di misura nel sistema metrico decimale		
Unità	Abbreviazione	Alcune relazioni
<b>Unità di lunghezza</b>		
millimetro	mm	$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m}$
centimetro	cm	$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 10 \text{ mm}$
metro	m	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$
chilometro	km	$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$
<b>Unità di area</b>		
millimetro quadrato	mm <sup>2</sup>	$1 \text{ mm}^2 = 0.000001 \text{ m}^2$
centimetro quadrato	cm <sup>2</sup>	$1 \text{ cm}^2 = 10^2 \text{ mm}^2 = 100 \text{ mm}^2$
metro quadrato	m <sup>2</sup>	$1 \text{ m}^2 = 100^2 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$
chilometro quadrato	km <sup>2</sup>	$1 \text{ km}^2 = 1000^2 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$
<b>Unità di volume</b>		
millimetro cubo	mm <sup>3</sup>	$1 \text{ mm}^3 = 0.000000001 \text{ m}^3$
centimetro cubo	cm <sup>3</sup>	$1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$
metro cubo	m <sup>3</sup>	$1 \text{ m}^3 = 100^3 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$
chilometro cubo	km <sup>3</sup>	$1 \text{ km}^3 = 1000^3 \text{ m}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$

**Segue: Unità di misura nel sistema metrico decimale**

Unità	Abbreviazione	Alcune relazioni
<b>Unità di capacità</b>		
millilitro	ml	$1 \text{ ml} = \frac{1}{1000} \text{ l}$
centilitro	cl	$1 \text{ cl} = 10 \text{ ml} = \frac{1}{100} \text{ l}$
litro	l	$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$
ettolitro	hl	$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$
<b>Unità di peso</b>		
milligrammo	mg	$1 \text{ mg} = \frac{1}{1000} \text{ g}$
grammo	g	
chilogrammo	kg	$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$
miriagrammo	Mg	$1 \text{ Mg} = 10\,000 \text{ g} = 10 \text{ kg}$
quintali	q	$1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$
tonnellata	t	$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 10 \text{ q}$

Il sistema S.I. consiste di 7 unità fondamentali:

**TABELLA 5.1**

Dimensione	Unità SI	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Quantità di sostanza	mole	mol
Tempo	secondo	sec (s)
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensità luminosa	candela	cd

di due unità supplementari:

**TABELLA 5.2**

Dimensione	Unità SI	Simbolo
Angolo piano	radiante	rad
Angolo solido	steradiano	sr

e di un certo numero di unità derivate:

**TABELLA 5.3**

Misura	Unità SI	Simbolo	Definizione	in unità fondamentali
Forza	newton	N	$\text{kg m s}^{-2}$	
Energia	joule	J	Nm	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Pressione	pascal	Pa	$\text{Nm}^{-2}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$



# Derivate delle funzioni di una variabile

CAPITOLO

16

## Tasso di crescita e tasso di inflazione

Nel linguaggio comune si incontrano spesso espressioni quali: “il tasso di crescita della popolazione mondiale”, “la velocità di un aereo in un certo istante”, “il tasso di inflazione”, che si riferiscono alla variazione di certe grandezze.

Il significato matematico di tali espressioni risiede nel concetto di *derivata*, che ci proponiamo di introdurre nel presente capitolo.

Per comprendere l'importanza della nozione di derivata, osserviamo che spesso la conoscenza della rapidità con la quale una grandezza varia, da punto a punto o di istante in istante, può essere più utile della conoscenza del suo stesso valore.

Ad esempio, è più utile sapere che la temperatura esterna domani aumenterà (o diminuirà) rispetto a quella odierna piuttosto che conoscere il valore della temperatura di domani e non quella di oggi.

Per introdurre in maniera semplice ed intuitiva il concetto di derivata, descriviamo un esempio tratto dalla Meccanica.

Consideriamo una particella che si muove lungo l'asse delle  $x$  durante un certo intervallo di tempo  $I$ . Supponiamo che essa si trovi nel punto  $A$ , di

ascissa  $a$ , all'istante  $t = \alpha$  e nel punto  $B$ , di ascissa  $b$ , all'istante  $t = \beta$ , e che sia  $\alpha < \beta$ .

Conveniamo, inoltre, di misurare le distanze in cm e il tempo in secondi.

Per ogni istante  $t \in I$  indichiamo con  $s(t)$  l'ascissa della posizione assunta dalla particella sull'asse  $x$ , per cui si ha  $s(\alpha) = a$  e  $s(\beta) = b$ .

Se  $t_0$  e  $t$  appartengono all'intervallo  $I$  e risulta  $t_0 < t$ , allora il numero:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

è la *velocità media* della particella nell'intervallo di tempo  $[t_0, t]$ .

Se facciamo tendere  $t$  a  $t_0$ , il che corrisponde, dal punto di vista fisico, a calcolare la velocità media in intervalli di tempo sempre più brevi, il limite:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rappresenta la *velocità istantanea* della particella al tempo  $t_0$ , misurata in cm al secondo.

Per definizione, il numero  $s'(t_0)$  è la *derivata* della funzione  $s(t)$  nel punto  $t_0$ .

## 16.1 Definizione di derivata

Sia  $f$  una funzione definita in un intervallo  $[a, b]$  di  $R$  e sia  $x_0$  un punto di  $[a, b]$ . Per ogni  $x \in [a, b]$ , diverso da  $x_0$ , consideriamo il rapporto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (16.1)$$

che prende il nome di *rapporto incrementale* della funzione  $f$  relativo al punto  $x_0$ .

Tale rapporto varia al variare di  $x$ , cioè è una funzione della variabile  $x$  che può essere o meno dotata di limite per  $x$  che tende a  $x_0$ .

**DEFINIZIONE 16.1.** Si dice che la funzione  $f$  è *derivabile* nel punto  $x_0$  se esiste ed è finito il limite, per  $x$  che tende a  $x_0$ , del rapporto incrementale (16.1).

Tale limite si indica con uno dei simboli:

$$[Df(x)]_{x=x_0}, \quad f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

e si chiama *derivata* di  $f$  in  $x_0$ .

Dunque, se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora la sua derivata  $f'(x_0)$  è uguale al limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (16.2)$$

ed è numero reale.

**Osservazione 16.1.** Talvolta il rapporto incrementale di una funzione  $f$  relativo al punto  $x_0$  si denota con il simbolo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

avendo posto nella (16.1)  $x - x_0 = h$  e la derivata  $f'(x_0)$  si rappresenta nel modo seguente:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**DEFINIZIONE 16.2.** Se  $f$  è una funzione definita in  $[a, b]$  e  $x_0$  appartiene all'intervallo  $]a, b]$ , si dice che  $f$  è *derivabile in  $x_0$  da sinistra*, se esiste finito il limite del rapporto incrementale per  $x$  che tende a  $x_0$  da sinistra. Tale limite si indica con  $f'_-(x_0)$  e prende il nome di *derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$* .

Dunque, per definizione, si ha:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogamente si definisce la *derivata destra* di  $f$  in un punto  $x_0$  appartenente all'intervallo  $[a, b[$ , con la posizione:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Osservazione 16.2.** Se  $x_0$  è un punto interno all'intervallo  $[a, b]$ , cioè se risulta  $x_0 \in ]a, b[$  allora  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se la sua derivata sinistra e la sua derivata destra in  $x_0$  sono numeri reali uguali fra loro e il loro comune valore coincide con  $f'(x_0)$ :

$$f \text{ derivabile in } x_0 \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Un primo risultato sulle funzioni derivabili è il seguente teorema, che istituisce un legame tra la derivabilità e la continuità di una funzione in un punto  $x_0$ .

**TEOREMA 16.1.** Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora essa è anche continua in  $x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $x$  diverso da  $x_0$  si ha:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0), \quad (16.3)$$

ed allora, essendo, per ipotesi, finito il limite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

passando al limite per  $x$  che tende a  $x_0$  nell'uguaglianza (16.3), abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Poiché  $f(x_0)$  non dipende da  $x$ , la relazione precedente implica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

per cui  $f$  è continua in  $x_0$ .

**Osservazione 16.3.** È opportuno mettere in evidenza che, viceversa, una funzione può essere continua in un punto  $x_0$ , senza essere ivi derivabile (vedere il successivo Esempio 16.2).

Se il rapporto incrementale della funzione  $f$  relativo al punto  $x_0$  tende a  $+\infty$  (risp. a  $-\infty$ ) al tendere di  $x$  verso  $x_0$ , allora si dice che  $f$  ha in  $x_0$  *derivata infinita* e che la *derivata*  $Df(x_0)$  di  $f$  in  $x_0$  è  $+\infty$  (risp.  $-\infty$ ).

**Osservazione 16.4.** Se una funzione  $f$  è costante nell'intervallo  $X$ , allora la sua derivata è nulla:

$$f(x) = c \quad \forall x \in X \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in X$$

Infatti si ha, per ogni  $x \neq x_0$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

#### ► Esempio 16.1

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f(x) = x^2,$$

nel punto  $x_0 = 3$ .

Il rapporto incrementale di tale funzione, relativo al punto  $x_0 = 3$  è:

$$\frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = x + 3,$$

e dunque il suo limite per  $x$  che tende a 3 è uguale a:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

in quanto la funzione  $g(x) = x + 3$  è continua e dunque:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 6.$$

► **Esempio 16.2****Una funzione continua e non derivabile in un punto  $x_0$** 

Consideriamo la funzione  $f(x) = |x|$  e verifichiamo che essa, pur essendo continua, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0| \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R},$$

non è tuttavia derivabile in  $x_0 = 0$ . Infatti:

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{per } x < 0$$

e

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{per } x > 0$$

Pertanto la derivata sinistra di  $f$  in 0 è uguale a  $-1$ :

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

e la derivata destra di  $f$  in 0 è uguale a 1:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

cioè:

$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

e dunque  $f$  non è derivabile in 0.

► **Esempio 16.3****Una funzione con derivata infinita**

Consideriamo la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$ , che è definita nell'intervallo  $[0, +\infty[$ . Consideriamo il suo rapporto incrementale relativo al punto 0:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$$

ed eseguiamo il limite per  $x \rightarrow 0$  (da destra).

Si ha:

$$[D\sqrt{x}]_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

in quanto, per definizione di limite, per ogni  $k > 0$  esiste  $d = \frac{1}{k^2}$  tale che:

$$0 < x < d \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > k$$

**16.2 Significato geometrico della derivata**

Sia  $f$  una funzione definita nell'intervallo  $[a, b]$  e sia  $x_0 \in ]a, b[$ .

Disegniamo, in un sistema di assi cartesiani, il grafico della funzione  $f$ , ed indichiamo con  $P$  il punto di coordinate  $(x_0, f(x_0))$ .

Fissato un punto  $x \neq x_0$ , indichiamo con  $Q$  il punto di coordinate  $(x, f(x))$  (Figura 16.1) e con  $s(x)$  la retta (secante al grafico) passante per i punti  $P$  e  $Q$ , la cui equazione è:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (t - x_0)$$

ove  $t$  varia in  $\mathbb{R}$ .



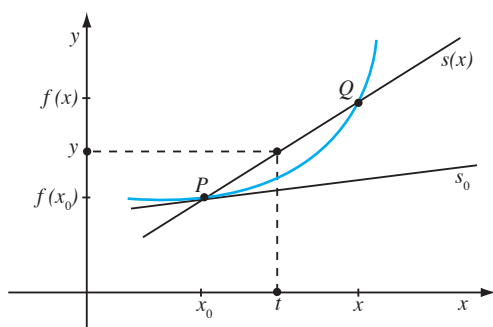


FIGURA 16.1

Supponiamo ora che  $f$  sia derivabile in  $x_0$  e sia  $f'(x_0)$  la sua derivata:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Indichiamo infine con  $s_0$  la retta di equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0),$$

ove  $t$  varia in  $R$ .

Se  $x$  tende verso  $x_0$ , allora  $f(x)$  tende verso  $f(x_0)$ , grazie alla continuità di  $f$  in  $x_0$  e il punto  $Q$  di coordinate  $(x, f(x))$  “tende” al punto  $P$  di coordinate  $(x_0, f(x_0))$ .

D'altra parte, se  $x$  tende verso  $x_0$ , allora:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ tende verso } f'(x_0)$$

e cioè il coefficiente angolare della retta secante  $s(x)$  tende al coefficiente angolare  $f'(x_0)$  della retta  $s_0$ .

Perciò è del tutto naturale chiamare la retta  $s_0$  *retta tangente* al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

Il significato geometrico della derivata  $f'(x_0)$  è dunque quello di *coefficiente angolare* (o *pendenza*) della tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ .

**Osservazione 16.5.** Se la derivata di  $f$  in  $x_0$  è uguale a zero:

$$f'(x_0) = 0,$$

allora, il coefficiente angolare della tangente è uguale a zero e la tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$  è parallela all'asse  $x$  (Figura 16.2).

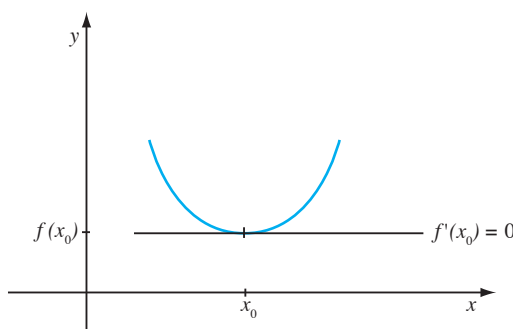


FIGURA 16.2



CARLO SBORDONE • FRANCESCO SBORDONE

# Matematica

per le Scienze della Vita



[www.edises.it](http://www.edises.it)



€ 33,00

ISBN 978-88-7959-829-3



9 788879 598293