

Comprende



versione Ebook
e Software di simulazione

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Elementi di Fisica

Elettromagnetismo e Onde

III Edizione

a cura di

G. Balestrino

V. Foglietti

P.G. Medaglia

R. Pizzoferrato



Accedi all'ebook e ai contenuti digitali

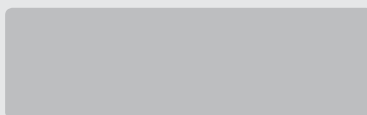
Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore!**



Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edisesuniversita.it** e attivare la tua **area riservata**. Potrai accedere alla **versione digitale** del testo e a ulteriore **materiale didattico**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso al materiale didattico** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edisesuniversita.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticali tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edisesuniversita.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*



Ulteriori materiali e strumenti didattici sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere a:

- **Ebook**: versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.
- **Software di simulazione**: un vastissimo database di quesiti a risposta multipla per effettuare esercitazioni sull'**intero programma** o su **argomenti specifici**.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

P. Mazzoldi · M. Nigro · C. Voci

ELEMENTI DI FISICA

TERZA EDIZIONE

Elettromagnetismo e Onde

Edizione a cura di

G. Balestrino

V. Foglietti

P.G. Medaglia

R. Pizzoferrato



P. Mazzoldi · M. Nigro · C. Voci
Elementi di Fisica – Elettromagnetismo e Onde – III Edizione
a cura di G. Balestrino, V. Foglietti, P.G. Medaglia, R. Pizzoferrato

Copyright @ 2022, 2008, Edises Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2026 2025 2024 2023 2022

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.

L'Editore

L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.

Fotocomposizione: domabook di Massimo Di Grazia – Napoli

Stampato presso la
Tipografia Sograte S.r.l.
Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG)

per conto della
Edises Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edisesuniversita.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 027 3

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma assistenza.edises.it

PREFAZIONE ALLA NUOVA EDIZIONE

Questo volume di Elementi di Fisica, Elettromagnetismo e Onde, come pure l'analogo volume di Meccanica e Termodinamica, è largamente apprezzato ed utilizzato per la didattica della Fisica Generale sia nei corsi di studio di Ingegneria che nei corsi di studio in Fisica e Scienza dei materiali. Il successo di quest'opera è, tra l'altro, il risultato della sua capacità di coniugare il rigore metodologico e l'attenzione al formalismo matematico, consolidate caratteristiche dell'insegnamento della fisica nelle università italiane, con la necessità di un adeguamento dei contenuti imposto dalla riforma nota come 3+2. Ora, dopo circa venti anni da quella riforma, è apparsa utile una revisione dell'opera. Questo lavoro di revisione, nel rispetto dello spirito dell'opera ancora completamente attuale, è stato indirizzato da un canto ad aggiornare alcuni contenuti per riallinearli allo stato attuale dell'avanzamento delle conoscenze fisiche, dall'altro ad eliminare alcuni refusi ed imprecisioni, inevitabili in un testo di così ampio respiro. In alcuni casi si è anche provveduto a riformulare alcuni paragrafi per aumentarne la chiarezza migliorandone allo stesso tempo la veste grafica. Con questi aggiornamenti speriamo che questo volume possa continuare ad essere un importante supporto per l'insegnamento universitario della fisica.

Roma, luglio 2020

GIUSEPPE BALESTRINO
VITTORIO FOGLIETTI
PIER GIANNI MEDAGLIA
ROBERTO PIZZOFRATTO

PREFAZIONE ALLA PRECEDENTE EDIZIONE

Nella prefazione al primo volume, **Meccanica e Termodinamica**, di questi “Elementi di Fisica” abbiamo spiegato le scelte adottate nella stesura del testo, che riportiamo.

La riforma che ha portato all’istituzione della laurea triennale e della successiva laurea specialistica ha generato una revisione dei programmi e del peso, misurato in crediti, assegnato alle singole materie. Al primo livello la riduzione della durata degli studi e il taglio professionalizzante stanno comportando di fatto una compressione delle materie di base e tra queste della Fisica (fatta eccezione per i corsi della classe di Fisica), compressione che può arrivare fino ad un dimezzamento rispetto alla situazione precedente.

Non vogliamo discutere qui le conseguenze formative e culturali che la riforma può avere. Notiamo soltanto che, nelle nuove condizioni in cui deve operare, il docente di una materia istituzionale come la Fisica Generale si trova di fronte ad una scelta: ridurre il livello di presentazione per conservare il numero di argomenti che normalmente si illustravano agli studenti oppure operare un taglio di argomenti per rimanere ad un adeguato livello di presentazione, simile a quello finora adottato. Noi abbiamo optato per la seconda soluzione, che consideriamo la più valida per gli insegnamenti impartiti nelle facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali e di Ingegneria.

Abbiamo pertanto operato una revisione critica del testo, che tanto favorevolmente è stato accolto dai colleghi in questi anni, consistente in una riduzione di approfondimenti e di nozioni specifiche che erano stati pensati in vista di successivi insegnamenti di materie fisiche.

I programmi del corso di Fisica che segue l’insegnamento della Meccanica e della Termodinamica variano, a nostra conoscenza, da sede a sede a seconda dei curricula previsti per il primo livello di laurea. Perciò, come già fatto nel primo volume, abbiamo articolato la materia in due parti separabili: la prima parte è dedicata all'Elettromagnetismo e si conclude con le Onde Elettromagnetiche, la seconda all'Ottica, in accordo con l'ipotesi che alcuni corsi di studio prevedano solamente lo svolgimento della prima parte. Inoltre, di vari argomenti, è data innanzi tutto una trattazione meno formale, che privilegia l'esemplificazione, rimandando a successivi paragrafi la trattazione più rigorosa. Viene lasciata in tal modo al docente la possibilità di approfondire o meno l'argomento in base al corso che insegna. Nella prima parte sono state incluse per completezza le Oscillazioni elettriche e nella seconda le Correnti alternate e le Onde meccaniche, anche se riteniamo difficile che possano essere svolte nei nuovi corsi.

È evidente che ci troviamo di fronte ad un difficile passaggio, se ci proponiamo di mantenere anche nella laurea triennale un insegnamento e un accertamento del risultato qualitativamente in linea con la nostra tradizione e nello stesso tempo vogliamo adeguarci alla logica della riforma. Per questa nuova edizione, il testo è stato rivisto apportando tra l'altro alcuni cambiamenti derivati da suggerimenti e osservazioni di colleghi e di studenti. La nuova veste tipografica è intesa a facilitare la lettura del testo. Con ciò intendiamo continuare a dare il nostro contributo all'impegno professionale dei docenti e agli studenti uno strumento di apprendimento conforme agli attuali curricula che sia utile per la loro formazione, oltre che per il superamento dell'esame.

Paolo MAZZOLDI, Massimo NIGRO, Cesare VOCI

Padova, agosto 2008

INDICE GENERALE

ELETTROMAGNETISMO

1	Forza elettrostatica. Campo elettrostatico	3	4	Conduttori. Dielettrici. Energia elettrostatica	69
1.1	Cariche elettriche. Isolanti e conduttori	3	4.1	Conduttori in equilibrio	69
1.2	Struttura elettrica della materia	5	4.2	Conduttore cavo. Schermo elettrostatico	72
1.3	La legge di Coulomb	8	4.3	Condensatori	74
1.4	Campo elettrostatico	12	4.4	Collegamento di condensatori	77
1.5	Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di cariche	15	4.5	Energia del campo elettrostatico	80
1.6	Linee di forza del campo elettrostatico	18	4.6	Dielettrici. La costante dielettrica	83
1.7	Moto di una carica in un campo elettrostatico	19	4.7	Polarizzazione dei dielettrici	89
1.8	Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan	20	4.8	Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici	92
	Riepilogo	22		Riepilogo	95
	Quesiti	23		Quesiti	96
	Problemi	24		Problemi	97
2	Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico	27	5	Corrente elettrica	103
2.1	Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale	27	5.1	Conduzione elettrica	103
2.2	Calcolo del potenziale elettrostatico	30	5.2	Corrente elettrica. Corrente elettrica stazionaria	104
2.3	Energia potenziale elettrostatica	33	5.3	Legge di Ohm della conduzione elettrica	107
2.4	Il campo come gradiente del potenziale	39	5.4	Modello classico della conduzione elettrica	111
2.5	Superfici equipotenziali	42	5.5	Resistori in serie e in parallelo	113
2.6	Il rotore del campo elettrostatico	43	5.6	Forza elettromotrice	115
2.7	Il dipolo elettrico	44	5.7	Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore	118
2.8	La forza su un dipolo elettrico	46	5.8	Corrente di spostamento	121
	Riepilogo	48	5.9	Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche	122
	Quesiti	50	5.10	Alcuni circuiti particolari in corrente continua	125
	Problemi	50		Riepilogo	128
				Quesiti	130
				Problemi	131
3	La legge di Gauss	55	6	Campo magnetico. Forza magnetica	135
3.1	Flusso del campo elettrostatico. Legge di Gauss	55	6.1	Interazione magnetica. Campo magnetico	135
3.2	Dimostrazione della legge di Gauss	57	6.2	Elettricità e magnetismo	138
3.3	Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss	60	6.3	Forza magnetica su una carica in moto	139
3.4	La divergenza del campo elettrostatico	64	6.4	Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente	141
	Riepilogo	65	6.5	Momenti meccanici su circuiti piani	143
	Quesiti	65	6.6	Effetto Hall	146
	Problemi	66	6.7	Moto di una particella carica in un campo magnetico	148

6.8	Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme	151
	Riepilogo	155
	Quesiti	155
	Problemi	156

7	Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère. Proprietà magnetiche della materia	161
7.1	Campo magnetico prodotto da una corrente	161
7.2	Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari	163
7.3	Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente	168
7.4	Legge di Ampère	169
7.5	Proprietà magnetiche della materia. Permeabilità e suscettività magnetica	173
7.6	Meccanismi di magnetizzazione e correnti amperiane	178
7.7	La legge di Gauss per il campo magnetico	181
7.8	Equazioni generali della magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzati	184
	Riepilogo	186
	Quesiti	187
	Problemi	188

8	Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	191
8.1	Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica	192
8.2	Origine del campo elettrico indotto e della forza elettromotrice indotta	194
8.3	Applicazioni della legge di Faraday	197
8.4	Autoinduzione	200
8.5	Energia magnetica	203
8.6	Induzione mutua	206
8.7	Legge di Ampère-Maxwell	208

8.8	Le equazioni di Maxwell	210
8.9	Le equazioni di Maxwell in forma differenziale	211
	Riepilogo	213
	Quesiti	214
	Problemi	216

9	Oscillazioni elettriche. Correnti alternate	221
9.1	Oscillazioni elettriche	221
9.2	Circuiti in corrente alternata	224
9.3	Il circuito <i>RLC</i> in serie. Risonanza	227
9.4	Potenza nei circuiti a corrente alternata	229
9.5	Il trasformatore ideale	230
	Riepilogo	232
	Quesiti	233
	Problemi	233

10	Onde elettromagnetiche	237
10.1	Introduzione alle onde elettromagnetiche. Onde piane	237
10.2	Onde elettromagnetiche piane	240
10.3	Deduzione delle onde elettromagnetiche piane dalle equazioni di Maxwell	245
10.4	Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting	245
10.5	Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione	248
10.6	Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana	250
10.7	Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante	252
10.8	Spettro delle onde elettromagnetiche	254
	Riepilogo	257
	Quesiti	257
	Problemi	258

ONDE

11	Riflessione e rifrazione della luce	263
11.1	La luce. L'indice di rifrazione	263
11.2	Principio di Huygens-Fresnel	264
11.3	Le leggi della riflessione e della rifrazione	266
11.4	Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte	271
11.5	Polarizzazione della luce per assorbimento selettivo e per diffusione	274
11.6	Rifrazione anomala. Attività ottica	279
	Riepilogo	281
	Quesiti	282
	Problemi	283

12	Ottica geometrica	287
12.1	Leggi della riflessione e della trasmissione	287
12.2	Definizioni e convenzioni	288
12.3	Specchi	290
12.4	Diottri	294
12.5	Lenti sottili	297
12.6	Aberrazioni	301
12.7	L'occhio umano	303
12.8	Strumenti ottici	305
	Riepilogo	310
	Quesiti	311
	Problemi	312

13	Interferenza	317	15.2	Radiazione termica. Corpo nero	369
13.1	Fenomeni d'interferenza. Sorgenti luminose coerenti	317	15.3	Legge di Planck.	371
13.2	L'esperimento di Young	318	15.4	Effetto fotoelettrico.	373
13.3	Interferenza della luce su lamine sottili	324	15.5	Effetto Compton. Produzione di coppie	376
13.4	L'interferometro di Michelson	329	15.6	Righe spettrali dell'atomo di idrogeno	378
13.5	Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz.	331	15.7	Il modello dell'atomo di Bohr	379
13.6	Interferenza di N sorgenti di onde elettromagnetiche sincrone	333	15.8	Proprietà ondulatorie della materia	381
	Riepilogo	337	15.9	Principio di complementarità. Principio di indeterminazione	383
	Quesiti	338		Riepilogo	385
	Problemi	339		Quesiti	386
				Problemi	387
14	Diffrazione	343	16	Onde meccaniche	391
14.1	Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel.	343	16.1	Fenomeni ondulatori	391
14.2	Diffrazione di Fraunhofer ad una fenditura rettilinea	344	16.2	Onde piane armoniche	395
14.3	Diffrazione prodotta da un'apertura circolare e da un disco opaco	347	16.3	Onde in una corda tesa	395
14.4	Limite di risoluzione delle lenti.	350	16.4	Onde sonore	397
14.5	Il reticolo di diffrazione	354	16.5	Onde sonore armoniche	399
14.6	Potere risolutivo di un reticolo di diffrazione.	357	16.6	Interferenza di onde sonore armoniche	401
14.7	Spettroscopia con il reticolo di diffrazione.	359	16.7	Onde stazionarie in una corda tesa	403
14.8	Diffrazione dei raggi X	362	16.8	Onde stazionarie in una colonna di gas	406
	Riepilogo	364	16.9	Battimenti	408
	Quesiti	365	16.10	Pacchetti d'onda. Velocità di fase e velocità di gruppo	409
	Problemi	366	16.11	Onde nei reticoli cristallini	412
				Riepilogo	414
				Quesiti	415
				Problemi	416
15	Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia	369		Soluzioni ai problemi di Elettromagnetismo e Onde	419
15.1	Introduzione	369		Indice analitico	461

CONDUTTORI. DIELETTRICI. ENERGIA ELETTROSTATICA

4

4.1 | Conduttori in equilibrio

I materiali **conduttori** sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. In conduttori come le soluzioni elettrolitiche o i gas ionizzati si hanno spostamenti di cariche di entrambi i segni, però questi materiali non sono di interesse per l'elettrostatica. La nostra attenzione è invece concentrata sui conduttori solidi, il cui esempio più tipico sono i **metalli**: in essi per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel conduttore. Con l'applicazione di un opportuno campo \mathbf{E} si può provocare un moto ordinato di elettroni ovvero dar luogo a una *corrente elettrica*, argomento che cominceremo a studiare nel capitolo 5. Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo, **Figura 4.1**, altrimenti ci sarebbe un moto di cariche, contrariamente all'ipotesi. Pertanto lo stato di **conduttore in equilibrio elettrostatico** è definito dalla condizione

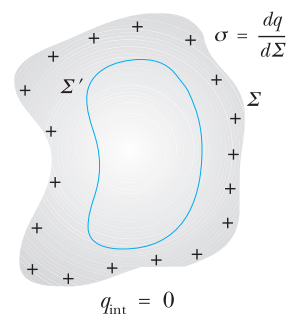
$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{all'interno}.$$

Si deve intendere che questa è una *condizione media macroscopica*. Nelle immediate vicinanze dei nuclei ci sono campi molto intensi, come abbiamo visto nell'esempio 3.2, che tengono legati gli elettroni non liberi; inoltre gli elettroni liberi non sono in quiete ma hanno un moto completamente disordinato di agitazione termica. Però in nessun istante c'è un moto ordinato in una certa direzione degli elettroni liberi rispetto agli ioni metallici fissi; si usa per questo parlare di *gas di elettroni liberi* all'interno di un conduttore.

La condizione $\mathbf{E} = 0$ ha le seguenti conseguenze che caratterizzano un conduttore in equilibrio elettrostatico:

- l'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore;
- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore;
- il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e ha intensità σ/ϵ_0 , con σ densità di carica superficiale in quel punto.

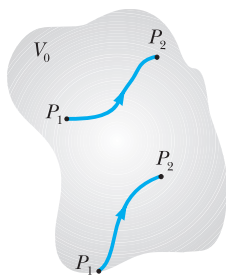
Per la prima proprietà, se il campo elettrostatico è nullo, **Figura 4.1**, è nullo il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa Σ' tracciata all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss (3.6)



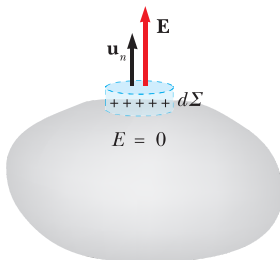
▲ **Figura 4.1** Conduttore carico.

SOMMARIO

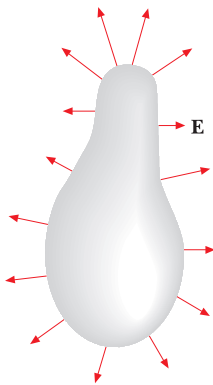
- 4.1 | Conduttori in equilibrio
- 4.2 | Conduttore cavo. Schermo elettrostatico
- 4.3 | Condensatori
- 4.4 | Collegamento di condensatori
- 4.5 | Energia del campo elettrostatico
- 4.6 | Dielettrici. La costante dielettrica
- 4.7 | Polarizzazione dei dielettrici
- 4.8 | Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici



▲ **Figura 4.2** Proprietà del potenziale elettrostatico in un conduttore carico in equilibrio.



▲ **Figura 4.3** Applicazione della legge di Gauss per il calcolo del campo elettrostatico sulla superficie di un conduttore carico.



▲ **Figura 4.4** Linee di forza nelle immediate vicinanze della superficie di un conduttore carico.

all'interno del conduttore non ci sono cariche ($q_{\text{int}} = 0$). Pertanto nell'eventualità in cui vi fosse carica in eccesso, essa si distribuirebbe sulla superficie fisica del conduttore, con densità superficiale pari a $\sigma = dq/d\Sigma$ (generalmente non uniforme, come vedremo). Cedendo al conduttore elettroni questi si portano sulla superficie, se al contrario si sottraggono, ne risulta carente lo strato superficiale.

Il potenziale elettrostatico risulta costante in ogni punto del conduttore perché presi due punti qualsiasi, anche sulla superficie, **Figura 4.2**, si ha:

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V(P_2) = V(P_1) = V_0.$$

Poiché il risultato è vero anche per punti giacenti sulla superficie del conduttore, è importante sottolineare che essa risulta essere una *superficie equipotenziale*.

Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo elettrostatico \mathbf{E} in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore (paragrafo 2.5), indipendentemente dalla forma di questo.

Il valore di E si ricava applicando la legge di Gauss ad un cilindro retto di basi $d\Sigma$ e superficie laterale di area trascurabile rispetto a $d\Sigma$, con una base contenuta all'interno del conduttore, in cui $E = 0$, e l'altra in prossimità immediata del conduttore all'esterno, dove il campo elettrostatico \mathbf{E} è normale alla superficie, **Figura 4.3**. Detta dq la carica contenuta all'interno, sulla superficie del conduttore, si ha:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = E d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d\Sigma$$

e quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n, \quad (4.1)$$

risultato noto come **teorema di Coulomb**. È implicito nella (4.1), essendo \mathbf{u}_n uscente per convenzione, che il verso di \mathbf{E} è *uscente* se la densità è *positiva*, *entrante* se *negativa*.

Si vede inoltre che il modulo del *campo elettrostatico* è *maggiore* dove σ è *maggiore*, **Figura 4.4**; come giustificheremo più avanti σ è maggiore dove il raggio di curvatura della superficie è minore, fatto che si verifica ad esempio in zone a forma di *punta*. Se il conduttore possiede una carica notevole la densità sulle punte è molto elevata e tale è il campo nelle immediate vicinanze; in una rappresentazione grafica le linee di forza sono molto fitte vicino alle punte. Da questo effetto hanno origine svariati fenomeni, come la formazione di scintille tra elettrodi di forma appuntita in ambiente gassoso o l'effluvio di elettroni da punte cariche negativamente, che avviene anche nel vuoto.

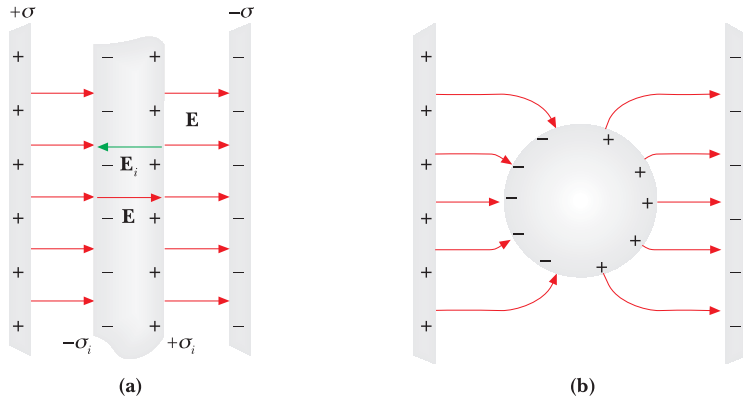
Un conduttore carico *lontano da altri conduttori* ha dunque una distribuzione superficiale di carica tale che il campo elettrostatico all'interno sia nullo, qualunque sia la forma del conduttore. In particolare se il conduttore è sferico la carica è distribuita uniformemente; sappiamo infatti dall'esempio 3.1 che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica dà campo nullo all'interno. Notiamo inoltre che la carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie: un accumulo di elettroni soltanto in una certa zona sarebbe dovuto esclusivamente a un campo elettrico esterno che non esiste nel caso considerato.

Se avvicinassimo un conduttore, carico o scarico, ad un secondo corpo carico, ovvero lo introducessimo in un campo elettrico esterno \mathbf{E} , il campo elettrostatico all'interno del primo conduttore non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da \mathbf{E} ; se non che questo fatto provoca un fenomeno transitorio per un tempo brevissimo: un movimento di elettroni che si spostano per l'azione del campo \mathbf{E} esterno, accumulandosi in una zona della superficie e lasciando sul resto della superficie un eccesso di carica positiva; tra queste zone si crea un *campo elettrostatico indotto* \mathbf{E}_i che contrasta il movimento degli elettroni, per cui si raggiunge l'equilibrio quando $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0$ in tutto l'interno del conduttore. Abbiamo così una distribuzione di *carica elettrica indotta* dei due segni sulla superficie del conduttore che si sovrappone all'eventuale carica elettrica preesistente; in totale però la carica elettrica del conduttore rimane

Carica elettrica indotta

la stessa poiché la carica elettrica indotta è la somma algebrica dei due contributi eguali ed opposti. È questa la ragione del fenomeno dell'*induzione elettrostatica* già descritto nel paragrafo 1.2.

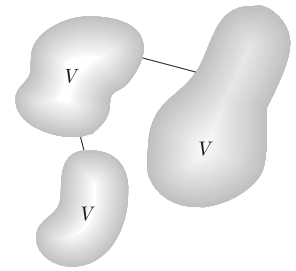
Nella **Figura 4.5** sono mostrati due esempi: i conduttori sono inizialmente privi di carica (e tali restano). Nel caso (a) un conduttore a forma di lastra piana è posto tra due piani uniformemente carichi: sulle facce compare la densità uniforme di carica $\sigma_i = \epsilon_0 E_i$ eguale in modulo alla densità $\sigma = \epsilon_0 E$ dei piani, con segno tale da produrre campo elettrostatico nullo dentro la lastra (e invariato fuori dalla lastra).



◀ **Figura 4.5** Lastra di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme (a) e sfera di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme (b).

Nel caso (b) il conduttore è sferico e la densità di carica non può essere uniforme (darebbe da sola campo elettrostatico nullo all'interno); essa deve invece essere tale da dare campo elettrostatico uniforme, pari a $-\sigma/\epsilon_0$, in tutta la sfera.

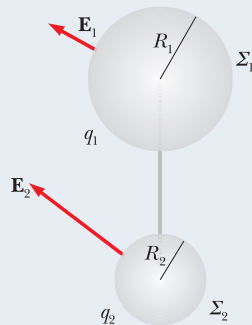
Finora abbiamo parlato di un unico conduttore. Se poniamo a contatto due o più conduttori, ad esempio collegandoli con un filo conduttore, **Figura 4.6**, si costituisce un *unico corpo conduttore* e in equilibrio vale ovunque la condizione, $V = \text{costante}$: i **conduttori a contatto e i fili che li collegano hanno lo stesso potenziale**.



▲ **Figura 4.6** Sistema di conduttori in contatto in equilibrio.

ESEMPIO 4.1 Sfere conduttrici a contatto

Due sfere conduttrici, **Figura 4.7**, di raggi rispettivamente R_1 e R_2 , sono poste a distanza molto grande rispetto a R_1 e R_2 e sono collegate tramite un filo conduttore. La carica complessiva è q . Trascurando la carica presente sul filo, calcolare: la carica q_1 e q_2 presente sulle due sfere e il rapporto tra i campi elettrostatici E_1 e E_2 sulle stesse.



► **Figura 4.7**

Soluzione

Dal testo capiamo che possiamo porre $q = q_1 + q_2$ e che le sfere sono sufficientemente lontane da poter trascurare l'induzione elettrostatica che renderebbe non uniformi le distribuzioni di

carica sulla superficie. Nel paragrafo 4.1 abbiamo detto che due conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale, per cui, utilizzando i risultati dell'esempio 3.1:

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

ovvero

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (4.2)$$

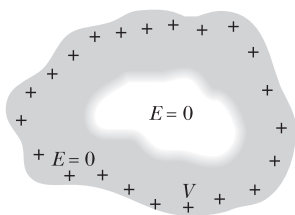
La carica si ripartisce tra le sfere proporzionalmente ai raggi. Ricordando che $q = q_1 + q_2$ abbiamo

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \quad , \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \quad .$$

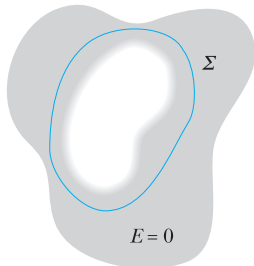
La densità di carica sulle sfere vale

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad (4.3)$$

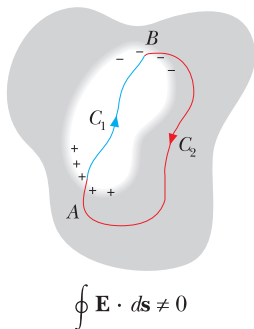
avendo utilizzato il teorema di Coulomb (4.1). Abbiamo dunque verificato in un caso particolare l'affermazione fatta nel paragrafo 4.1 secondo cui la densità di carica sulla superficie e il campo elettrico nelle immediate vicinanze della stessa sono maggiori dove minore è il raggio di curvatura.



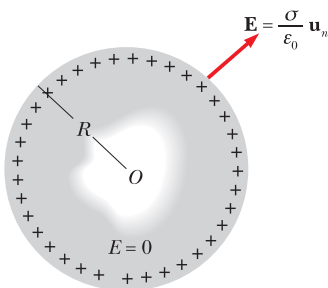
▲ **Figura 4.8** Conduttore cavo carico isolato.



▲ **Figura 4.9** Proprietà del campo elettrostatico e del potenziale elettrostatico all'interno di un conduttore cavo.



▲ **Figura 4.10** Applicazione della legge di Gauss per la verifica dell'assenza di cariche sulle pareti di una cavità.



▲ **Figura 4.11** Campo elettrostatico sulla superficie di un conduttore sferico cavo carico.

4.2 | Conduttore cavo. Schermo elettrostatico

Consideriamo un conduttore carico che abbia nel suo interno una cavità all'interno della quale non ci siano cariche elettriche, **Figura 4.8**. Nella massa del conduttore il campo elettrostatico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ che racchiuda la cavità, **Figura 4.9**: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di Σ non ci sono cariche e quindi *sulle pareti della cavità la carica è nulla*.

Non è nemmeno possibile sulle pareti una separazione della carica in $+q$ e $-q$: per negare questa circostanza si ricorre all'altra proprietà fondamentale di \mathbf{E} , quella di essere conservativo.

Infatti, se sulle pareti della cavità fossero presenti due distribuzioni di carica di segno opposto, **Figura 4.10**, ci sarebbero nella cavità linee di forza, uscenti dalle cariche positive e entranti in quelle negative. La circuitazione di \mathbf{E} lungo una linea chiusa, costituita da un tratto C_1 interno alla cavità su cui $\mathbf{E} \neq 0$ e da un tratto C_2 interno al conduttore dove $\mathbf{E} = 0$, darebbe

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0,$$

in contrasto col fatto che \mathbf{E} è conservativo. Pertanto il campo nella cavità deve essere nullo se l'integrale di linea esteso a *qualsiasi percorso* C_1 interno alla cavità deve essere nullo: *sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche*. Inoltre è chiaro che il potenziale elettrostatico in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore: se ci fosse una differenza di potenziale dovrebbe infatti esserci un campo elettrostatico diverso da zero.

In conclusione:

- la carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità all'interno del conduttore;
- il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità.

In particolare un conduttore sferico isolato carico di raggio R , che sia pieno o con una cavità sferica concentrica o con cavità di qualsiasi forma, ha sempre campo elettrostatico nullo all'interno e campo elettrostatico in vicinanza della superficie esterna, **Figura 4.11**:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_n \quad (4.4)$$

uguale a quella di una carica puntiforme q posta nel centro O della superficie sferica.

Una osservazione importante è la seguente: la situazione descritta all'interno della cavità di un conduttore cavo non dipende dalla carica e quindi dal potenziale del conduttore. Il conduttore può essere a 10 V o a 10^6 V , ma all'interno della cavità *non si misura mai tra due punti una differenza di potenziale diversa da zero*: il punto di riferimento per il potenziale elettrostatico è la parete della cavità, rispetto a cui la differenza di potenziale è nulla, qualunque sia il valore del potenziale del conduttore.

Consideriamo adesso un conduttore C_2 cavo, isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore C_1 carico nella cavità, mantenendolo isolato da C_2 , **Figura 4.12**. In condizioni di equilibrio, se C_1 ha sulla sua superficie esterna una carica q , una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna di C_2 e una carica q sulla superficie esterna di C_2 .

Tale fatto si spiega subito con la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa Σ interna a C_2 e contenente la cavità il flusso di \mathbf{E} è nullo in quanto è nullo il campo stesso (condizione di equilibrio); di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e se C_1 porta la carica q , sulla superficie interna di C_2 deve necessariamente comparire una carica $-q$. Inoltre essendo C_2 neutro, lo spostamento di una carica $-q$ sulla superficie interna provoca la comparsa di una carica $+q$ sulla superficie esterna, che rimane impoverita di elettroni.

Siamo di fronte a un fenomeno di induzione che in questo caso, essendo la carica q completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa, si chiama **induzione completa: tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2** , Figura 4.13. Dalla superficie esterna di C_2 partono altre linee di forza, il cui andamento in prossimità del conduttore riflette la distribuzione delle cariche sulla superficie stessa (sono tanto più dense quanto più piccolo il raggio di curvatura). Le due zone in cui esiste un campo sono separate da una zona in cui, in equilibrio, non può esistere campo elettrostatico.

Il campo elettrostatico all'interno della cavità è determinato dal valore di q , dalla posizione di C_1 e dalla forma geometrica delle due superfici affacciate. Però, fissato q , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque siano forma e posizione. Infatti possiamo dire che l'informazione sulla situazione interna potrebbe passare all'esterno solo attraverso un campo elettrostatico che penetrasse nel conduttore C_2 ; ma questo non è possibile per la proprietà dei conduttori in equilibrio di avere campo elettrostatico nullo all'interno. Al limite si può portare C_1 a contatto con C_2 , con il che le cariche $+q$ e $-q$ si elidono, ma all'esterno non cambia nulla: questo fatto, la cui verifica sperimentale vedremo tra breve, ci fa anche capire che la distribuzione della carica $-q$ sulla faccia interna di C_2 è sempre tale che, sommando l'effetto della carica q di C_1 , il campo elettrostatico dovuto alle cariche nella cavità è nullo all'esterno della cavità.

Analogamente, se variamo la carica sulla superficie esterna oppure variamo la sua distribuzione, ad esempio avvicinando al conduttore un altro corpo carico, cambia il campo elettrostatico all'esterno, ma la distribuzione di carica sulla superficie esterna di C_2 è sempre tale da dare campo elettrostatico nullo all'interno di C_2 e quindi non può alterare il campo locale esistente nella cavità. Come osservato prima, ciò potrebbe avvenire se un campo elettrostatico penetrasse dall'esterno nella massa del conduttore, ma la possibilità è esclusa dalle proprietà di un conduttore in equilibrio.

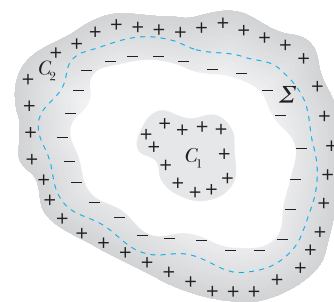
Pertanto finché lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicanti:

- il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

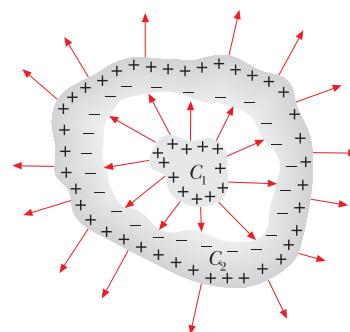
Una verifica sperimentale dell'azione di schermo perfetto di un conduttore cavo è la seguente; si introduce, Figura 4.14a, una sferetta conduttrice con carica $+q$ supportata da un filo isolante dentro una cavità conduttrice con apertura molto piccola e si misura con un elettroscopio collegato alla superficie esterna la carica indotta, che risulta essere $+q$, Figura 4.14b. Se muoviamo la sferetta carica all'interno della cavità, facendo variare in tal modo il campo elettrostatico all'interno e la distribuzione di carica sulla parete interna della cavità, l'elettroscopio *non segnala* alcuna variazione, nemmeno se caliamo la carica fino a toccare il fondo, Figura 4.14c. Estrando infine la sferetta, Figura 4.14d, l'elettroscopio rimane carico. Successivamente poniamo un elettroscopio carico all'interno della cavità, Figura 4.15, che esternamente può essere carica o scarica e avviciniamo un corpo carico in modo da variare la distribuzione della carica esterna: si osserva che la deviazione dell'elettroscopio rimane inalterata. In effetti un conduttore cavo scherma lo spazio interno dallo spazio esterno nei due sensi.

Non è necessario che lo schermo sia compatto: esso può avere delle piccole aperture o una struttura a rete; la presenza di queste discontinuità non si avverte a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni.

Gli schermi elettrostatici trovano applicazione in laboratorio quando si devono eseguire determinate misure elettrostatiche o più in generale, quando si vuole

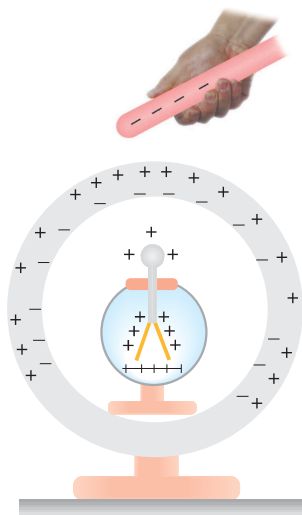
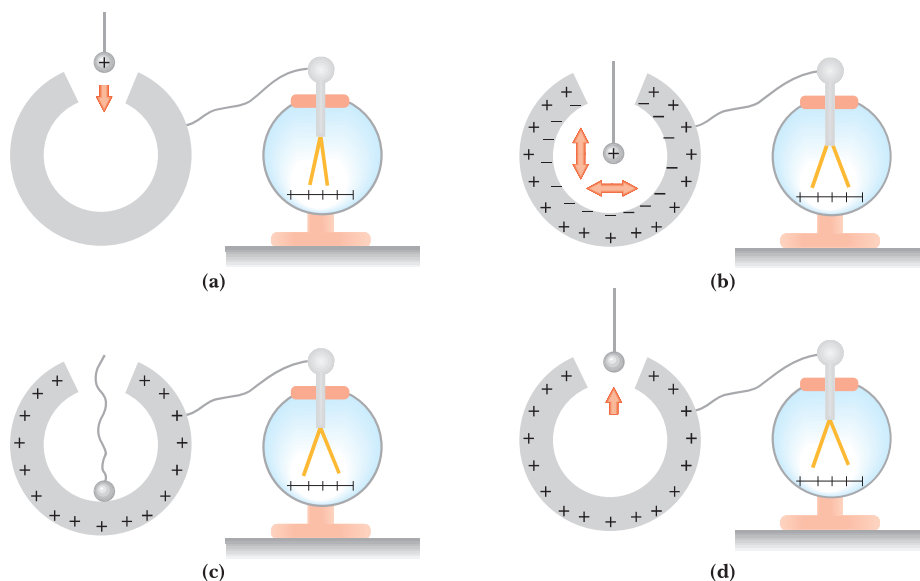


▲ Figura 4.12 Conduttore cavo carico contenente all'interno un conduttore isolato carico.

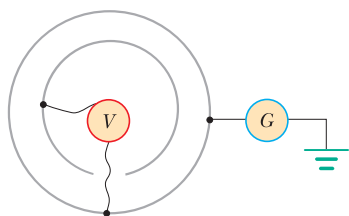


▲ Figura 4.13 Linee di forza di un sistema di due conduttori in condizione di induzione elettrostatica completa.

► **Figura 4.14** Esperimento sull'induzione completa tra due conduttori isolati.



▲ **Figura 4.15** Elettroscopio carico all'interno di una cavità schermato dalle perturbazioni elettriche esterne.



▲ **Figura 4.16** Schema di un esperimento per la determinazione precisa dell'esponente della distanza r della legge di Coulomb.

schermare una strumentazione da disturbi elettromagnetici esterni: in effetti, anche in caso di campi variabili, si ha un'azione di schermo, pur se non completamente efficiente. Una rete metallica, ben collegata conduttivamente alla terra, inserita nei muri di un edificio lo scherma dalle scariche atmosferiche. La "messa a terra" equivale a collegare la rete metallica con una superficie estremamente più grande, e quindi a trasferire la quasi totalità della carica sulla superficie terrestre (vedi esempio 4.1).

È interessante ricordare che l'azione di schermo elettrostatico venne scoperta da Franklin nel 1755 e completamente verificata da Faraday nella prima metà dell'ottocento; già nel 1773, dodici anni prima che venisse effettuato l'esperimento di Coulomb, Cavendish dedusse dalle proprietà di schermo sperimentate in laboratorio che l'esponente della legge, detta poi di Coulomb, doveva essere $n = 2 \pm 0.02$. In effetti gli esperimenti di precisione per la misura dell'esponente di r nella legge di Coulomb continuano a basarsi sulla verifica dell'azione di schermo elettrostatico, come mostrato in **Figura 4.16**. Si fa variare tramite un generatore G il potenziale del conduttore esterno cavo e si misura la differenza di potenziale tra il conduttore esterno e quello interno, che deve rimanere costante durante la prova. Dagli scostamenti di V dalla costanza si deducono gli scostamenti da 2 dell'esponente n di r . Gli esperimenti più recenti (1971) danno $n - 2 = (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$, migliorando notevolmente il risultato di Cavendish sopra citato, $n - 2 \approx 2 \cdot 10^{-2}$, e quello di Maxwell (1873), $n - 2 \approx 10^{-5}$, ottenuti con lo stesso metodo.

4.3 | Condensatori

Consideriamo il sistema costituito da un conduttore sferico di raggio R_1 al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 , **Figura 4.17**. Se $+q$ è la carica depositata sul conduttore interno, $-q$ è quella che deve esistere, in equilibrio, sulla superficie interna della cavità, affinché all'interno del conduttore cavo il campo elettrostatico risulti nullo; una carica $+q$ è naturalmente presente sulla superficie esterna del conduttore cavo. Il campo elettrostatico all'interno della cavità $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ è determinato dalle cariche presenti sulle superficie che

la delimitano; la differenza di potenziale tra i conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

che riscritta come

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.5)$$

mostra che il rapporto tra carica e differenza di potenziale dei due conduttori sferici concentrici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i raggi R_1 e R_2 , in questo caso il vuoto caratterizzato da ϵ_0 .

Un sistema come quello descritto, costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa, si chiama **condensatore**; i due conduttori prendono il nome di *armature del condensatore*. Si definisce **capacità del condensatore**:

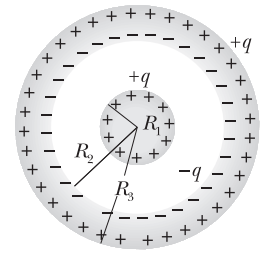
$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad (4.6)$$

dove $\pm q$ è la carica presente sulle due armature e ΔV la differenza di potenziale tra le stesse.

Gli esempi seguenti mostreranno che la capacità di un condensatore è individuata in ogni caso dalla forma delle armature e dalla loro distanza.

Riscriviamo la (4.6) nelle tre maniere possibili, tutte di uso comune:

$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad q = C \Delta V, \quad \Delta V = \frac{q}{C}.$$



▲ Figura 4.17 Condensatore sferico.

UNITÀ DI MISURA

L'unità di misura della **capacità** di un conduttore è il coulomb/volt, che prende il nome di **farad**, simbolo F:

$$F = \frac{C}{V}.$$

Si tratta di una unità di misura molto grande, come vedremo. Nella pratica si usano i sottomultipli:

millifarad	mF = 10^{-3} F
microfarad	$\mu F = 10^{-6}$ F
nanofarad	nF = 10^{-9} F
picofarad	pF = 10^{-12} F

In base alla (4.5) la costante dielettrica del vuoto definita da (1.4) $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$, viene espressa più comunemente come $\epsilon_0 = 8.86 \text{ pF/m}$ ($\text{C}^2/\text{Nm}^2 = \text{F/m}$).

farad

ESEMPIO 4.2 Capacità di un condensatore sferico

Abbiamo già visto che la capacità di un condensatore sferico è ai raggi, cioè se

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (4.5)$$

Se si fa tendere $R_2 \rightarrow \infty$ si ottiene

$$C = 4\pi \epsilon_0 R_1 \quad (4.7)$$

che può essere definita come *capacità di un conduttore sferico isolato*. Si può in generale definire *un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura posta all'infinito*. Se il conduttore ha una carica $+q$, la carica $-q$ si forma per induzione all'infinito, distribuita su una superficie infinita e perciò con densità nulla.

In tal senso la presenza della seconda armatura ha come risultato l'aumento della capacità del sistema, che va attribuito all'aumento dell'influenza tra le due armature.

Possiamo vedere quantitativamente tale effetto così: se la distanza tra le due armature sferiche diventa piccola rispetto

$$h = R_2 - R_1 \ll R_1 \approx R_2 = R,$$

la capacità del condensatore si scrive

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R^2}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.8)$$

con $\Sigma = 4\pi R^2$ area delle armature. La capacità cresce all'aumentare di Σ e al diminuire di h .

Per fissare un ordine di grandezza, se $\Sigma = 1 \text{ m}^2$ e $h = 1 \text{ mm}$, la capacità del condensatore sferico ($R = 0.282 \text{ m}$) è

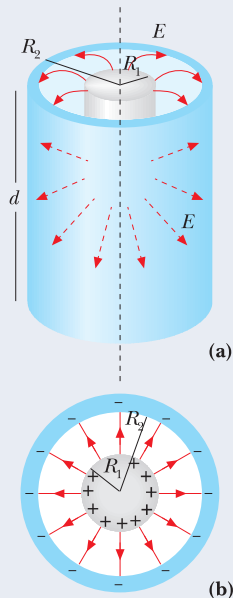
$$C_1 = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{10^{-3}} = 8.85 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 8.85 \text{ nF}.$$

La capacità di una sfera isolata di raggio $R = 0.282 \text{ m}$ è

$$C_2 = 4\pi \epsilon_0 R = 3.13 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 31.3 \text{ pF} = 3.5 \cdot 10^{-3} C_1.$$

ESEMPIO 4.3 Capacità di un condensatore cilindrico

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio R_1 e l'altra di raggio $R_2 > R_1$, di eguale lunghezza d grande rispetto ai raggi, **Figura 4.18**. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione *approssimativamente completa*.

► **Figura 4.18**

Se si escludono i tratti estremi, vale a dire trascurando il fatto che in prossimità delle basi dei cilindri le linee di forza non sono radiali (*effetti di bordo* come in **Figura 4.18a**), allora nell'intercapedine cilindrica tra R_1 e R_2 il campo elettrostatico è radiale, secondo (3.18),

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r,$$

e la differenza di potenziale tra le armature, esempio 3.19, è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

La carica per unità di lunghezza λ è pari a q/d e quindi

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (4.9)$$

Se $h = R_2 - R_1$ è molto minore dei raggi, sviluppiamo in serie il denominatore arrestandoci al primo termine (per cui si ha che $\ln(1 + \epsilon) \sim \epsilon$ per piccoli valori di ϵ), ottenendo:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R},$$

per cui la capacità diventa

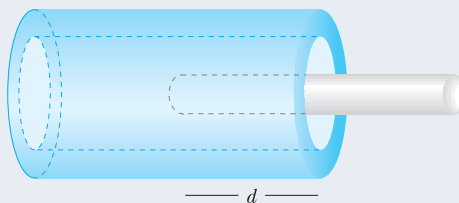
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}, \quad (4.10)$$

con $\Sigma = 2\pi R d$ area delle armature distanti h : si ritrova la (4.8).

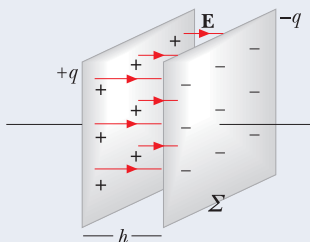
Dalla (4.9) si definisce la *capacità per unità di lunghezza*

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (4.11)$$

Si realizza un condensatore cilindrico a capacità variabile facendo scorrere uno dei due cilindri lungo l'asse in modo da far variare la lunghezza d , **Figura 4.19**. Le formule restano valide se si possono trascurare gli effetti di bordo.

► **Figura 4.19****ESEMPIO 4.4 Capacità di un condensatore piano**

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h , **Figura 4.20**. La carica positiva q è distribuita con densità uniforme σ sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità uniforme $-\sigma$ sull'armatura negativa.

► **Figura 4.20**

Abbiamo già calcolato campo e potenziale per una tale distribuzione di cariche negli esempi 1.8 e 2.8, supponendo la struttura indefinita (cioè anche in questo caso trascurando l'effetto di bordo):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n, \quad V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h.$$

Si deduce quindi che la capacità di un condensatore piano è data da

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}, \quad (4.12)$$

coincidente con (4.8) e (4.11). Questa volta non ci sono approssimazioni geometriche, però la (4.12) è approssimata per un'altra ragione: il campo si può supporre uniforme solo nella regione centrale del condensatore, lontano dai bordi.

ESEMPIO 4.5 Il campo elettrico dell'atmosfera terrestre

Il campo elettrostatico in condizioni di bel tempo sulla superficie terrestre è in media $E_{\text{terra}} \approx 100 \text{ V/m}$, diretto verso la terra. Un modello fenomenologico per spiegare l'origine di questo campo elettrostatico consiste nel pensare la superficie terrestre come l'armatura inferiore di un condensatore sferico carico negativamente in cui l'altra armatura, consistente in una distribuzione di carica positiva, si trova a circa $h = 5 \text{ km}$ di distanza dalla superficie della terra. Calcolare la capacità C del condensatore e la carica q presente sulle armature.

Soluzione

La densità di carica e la carica presenti sulla terra si ricavano dal teorema di Coulomb (4.1):

$$\sigma = -\epsilon_0 E_{\text{terra}} = -8.86 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad q = -\sigma 4\pi R_{\text{terra}}^2 = -4.56 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

Per il calcolo della capacità del condensatore sferico utilizziamo la (4.8) in quanto $h/R_{\text{terra}} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$:

$$C = \epsilon_0 \frac{4\pi R_{\text{terra}}^2}{h} = 0.9 \text{ F}.$$

La differenza di potenziale è quindi:

$$\Delta V = \frac{q}{C} \approx 500 \text{ kV},$$

peraltro deducibile direttamente da $\Delta V = Eh = 500 \text{ kV}$, poiché l'uso di $C = \epsilon_0 \Sigma/h$ implica che il campo elettrostatico sia costante.

Le configurazioni regolari del campo \mathbf{E} , considerate nel condensatore cilindrico e nel condensatore piano, non sono completamente realizzabili nella pratica. Esse sarebbero corrette se l'estensione fosse indefinita; per una dimensione finita si avrebbe, nella zona del bordo, un passaggio brusco dalla regione in cui esiste un campo elettrico regolare alla regione con campo elettrico nullo e sarebbe possibile trovare una linea chiusa C , come quella mostrata in **Figura 4.21**, tale che

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0.$$

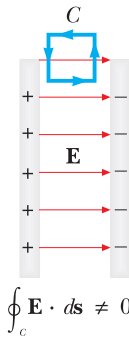
Essendo il campo elettrostatico conservativo, questa possibilità va esclusa e in effetti il campo \mathbf{E} è regolare solo nella zona centrale del condensatore, mentre vicino ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno, assumendo una configurazione che assicura la nullità della circuitazione del campo elettrostatico; il valore del campo è ad ogni modo rapidamente decrescente verso l'esterno, con linee di campo \mathbf{E} mostrate qualitativamente in **Figura 4.22**.

D'altra parte sono dovuti alla presenza del **campo elettrostatico disperso** alcuni effetti fisici osservati, quali ad esempio il risucchio di una lastra di isolante all'interno di un condensatore piano, come vedremo in seguito nell'esempio 4.13.

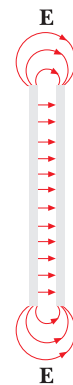
Si capisce che la configurazione sferica sarebbe l'unica ideale, per l'assenza dei bordi. Le capacità reali di condensatori cilindrici e piani differiscono dal valore calcolabile con le espressioni (4.9) e (4.12). Tuttavia queste vengono sempre usate per avere un'indicazione dei valori in gioco, tanto più vicina alla situazione reale quanto più ci si pone nella condizione $\Sigma \gg h^2$ (dimensioni delle armature grandi rispetto alla loro distanza) per la quale l'effetto di bordo è sostanzialmente trascurabile.

4.4 | Collegamento di condensatori

Un condensatore è un dispositivo che viene utilizzato essenzialmente come deposito di carica; pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità $+q$ e $-q$, proporzionali per un conduttore di data capacità alla differenza di potenziale tra le armature. Tramite opportuni collegamenti conduttivi esterni è possibile far fluire la carica negativa (elettroni) da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore. Vedremo questo argomento nel capitolo 5. Possiamo però subito descrivere come si collegano con fili conduttori più condensatori tra loro e calcolare la capacità equivalente. Noi supponiamo costanti nel tempo le cariche e le differenze di potenziale, però i risultati sono validi anche in regime variabile.



▲ **Figura 4.21** Dimostrazione dell'esistenza del campo elettrostatico disperso sui bordi di un condensatore piano di dimensioni finite.

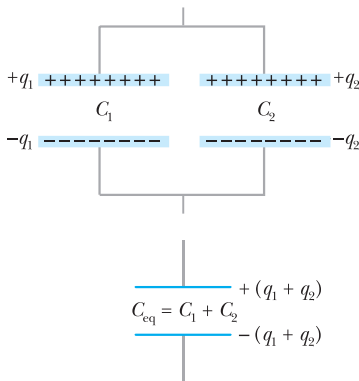


▲ **Figura 4.22** Linee di forza di un condensatore piano.



Per comodità indicheremo normalmente con V la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ che esiste tra le armature; inoltre con la lettera C indichiamo sia il condensatore che la sua capacità. Nella figura a fianco è mostrato il simbolo che individua un condensatore in un circuito elettrico: esso si rifà chiaramente al condensatore piano, che è la configurazione di gran lunga più comune, però è valido per qualsiasi condensatore.

Condensatori in parallelo



▲ **Figura 4.23** Capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo.

La connessione in parallelo delle armature consiste nel realizzare, come mostrato in **Figura 4.23**, due soli conduttori, collegando a due a due le armature. In tal modo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. applicata al condensatore C_1 è eguale a quella applicata al condensatore C_2 e scriviamo, da (4.14),

$$q_1 = C_1 V \quad , \quad q_2 = C_2 V \quad .$$

La carica globale sul conduttore superiore, costituito dalle due armature superiori è

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V \quad ;$$

sul conduttore inferiore la carica è $-q = -(q_1 + q_2)$. Definiamo capacità equivalente del sistema

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 \quad , \quad (4.13)$$

Cioè come il rapporto tra la carica totale e la d.d.p. Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti.

Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad ; \quad (4.14)$$

in un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa differenza di potenziale e la capacità equivalente è somma delle singole capacità.

La capacità equivalente è dunque sempre maggiore di quella di ciascun componente.

Collegamento in serie

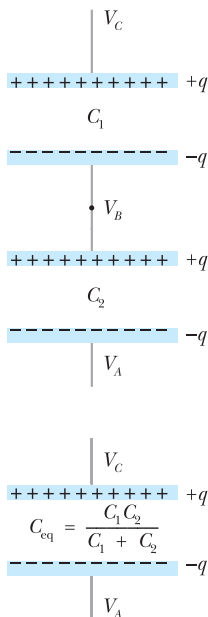
Nella connessione in serie, **Figura 4.24**, c'è un solo collegamento tra i due condensatori e viene costituito un sistema composto da tre conduttori: ai due estremi si applica la differenza di potenziale $V = V_C - V_A$ e il conduttore intermedio assume un potenziale V_B . Se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale V_C , per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura affacciata e $+q$ sull'armatura di C_2 a questa collegata, dovendo essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura di C_2 a potenziale V_A . Vediamo che il valore della carica è lo stesso nei due condensatori (e in quello equivalente). Dalla (4.6)

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \quad , \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2} \quad ,$$

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad , \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad . \quad (4.15)$$

Condensatori in parallelo



▲ **Figura 4.24** Capacità equivalente di due condensatori collegati in serie.

Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} : \quad (4.16) \quad \text{Condensatori in serie}$$

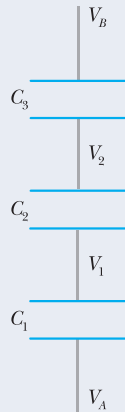
in un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

La capacità equivalente è sempre minore di quella di ciascun componente.

Ci si rende conto che da un insieme di condensatori di valori dati con opportuni collegamenti in parallelo o in serie è possibile ottenere capacità equivalenti in un grande intervallo di valori.

ESEMPIO 4.6 Partitore capacitivo

Ai capi di tre condensatori in serie, **Figura 4.25**, c'è una d.d.p. $V = V_B - V_A = 100 \text{ V}$ e la capacità equivalente del sistema è $C = 100 \text{ pF}$. Calcolare i valori delle capacità C_1 , C_2 , C_3 tali che rispetto a V_A sia $V_1 = 50 \text{ V}$ e $V_2 = 70 \text{ V}$.



► **Figura 4.25**

e i valori richiesti delle capacità sono

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 200 \text{ pF} ,$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 500 \text{ pF} ,$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 333 \text{ pF} .$$

Il sistema si chiama *partitore capacitivo* perché permette di ripartire una data d.d.p. (in tre parti nel caso specifico). In generale, detti C_i e V_i i valori della capacità e della d.d.p. ai capi dell' i -esimo condensatore, dall'eguaglianza

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots = C_i V_i = \dots = C_n V_n$$

si vede che la d.d.p. si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alla capacità:

$$V_1 : V_2 : \dots : V_n = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \dots : \frac{1}{C_n} .$$

Soluzione

La carica che si trova su ciascuna armatura è

$$q = C V = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 = 10^{-8} \text{ C}$$

ESEMPIO 4.7 Due condensatori in parallelo

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p. V_1 e V_2 , **Figura 4.26**. Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p. V rispetto alla terra. Calcolare il valore di V .

Soluzione

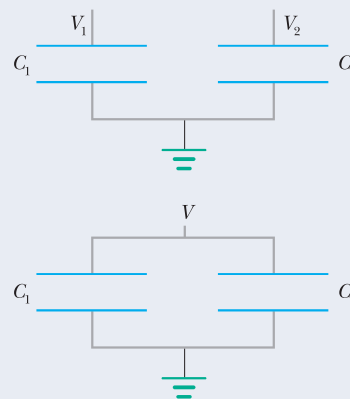
La carica presente inizialmente nei due condensatori è

$$q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad q_2 = C_2 V_2$$

ma la somma deve rimanere la stessa anche nella nuova configurazione (conservazione della carica sulle armature positive):

$$q = (C_1 + C_2) V = q_1 + q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 ,$$

avendo utilizzato la capacità equivalente.



◀ **Figura 4.26**

ESEMPIO 4.7 *continua*

Si ricava infine

$$V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2},$$

intermedio tra V_1 e V_2 .

L'equilibrio viene raggiunto con un passaggio di carica positiva dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore.

E le cariche finali dei condensatori sono

$$q'_1 = C_1 V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q, \quad q'_2 = C_2 V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q.$$

Si osservi che la ripartizione di carica tra i due condensatori avviene nello stesso modo dell'esempio 4.1, relativo a due sfere conduttrici messe in contatto, se si ricorda l'espressione (4.7) della capacità di un conduttore sferico isolato.

4.5 | Energia del campo elettrostatico

Il *processo di carica* di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero sulle armature alla situazione $(+q, -q)$ con una differenza di potenziale $V=q/C$ tra le armature, consiste in definitiva in una *separazione di cariche* e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo elettrostatico conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare quindi che la carica di un condensatore avvenga sottraendo, tramite lavoro erogato da un agente esterno, una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva. Alla fine di un processo, durante il quale la carica totale è in ogni istante nulla, una carica $+q$ viene trasferita da un'armatura all'altra, lasciando la prima con una carica $-q$, e la differenza di potenziale V è stabilita tra le armature.

Se in una fase intermedia del processo la differenza di potenziale tra le armature è V' , in quanto è già stata trasferita la carica $q' = C V'$ il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la differenza di potenziale V' è, secondo (2.8),

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Come si vede, esso dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia** (potenziale) **elettrostatica**. Assumendo che l'energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$ e, servendoci delle (4.6), scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C , carico con carica q e differenza di potenziale V :

Energia elettrostatica

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V. \quad (4.17)$$

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di carica dall'infinito, dove $V = 0$, alla superficie del conduttore. Ciò torna formalmente con l'idea di considerare un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura all'infinito.

Il ragionamento svolto per il calcolo dell'energia del condensatore lega l'energia alle cariche, che la possiedono in quanto si trovano ad un certo potenziale: l'energia totale è la somma delle energie potenziali delle singole cariche. È però possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso.

Consideriamo per semplicità un condensatore piano, in cui il campo elettrostatico tra le armature è uniforme, **Figura 4.27**. Riprendiamo la (4.12) e la relazione $V = Eh$:

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico. Se facciamo l'ipotesi che l'energia elettrostatica sia distribuita nei punti in cui c'è campo elettrostatico e che questa distribuzione sia uniforme come il campo (trascurando cioè gli effetti ai bordi), possiamo dire che la **densità di energia elettrostatica**, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (4.18)$$

che risulta pertanto **proporzionale al quadrato del campo elettrostatico**.

La generalità di questa formula, in cui non compare alcun elemento caratteristico del sistema per cui il calcolo è stato eseguito, ma soltanto il valore del campo e una proprietà del mezzo (in questo caso il vuoto), suggerisce che (4.18) si possa applicare a qualsiasi situazione. In effetti si può dimostrare che in una regione in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo $d\tau$, al cui interno il campo elettrostatico vale E , **Figura 4.28**, è

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau;$$

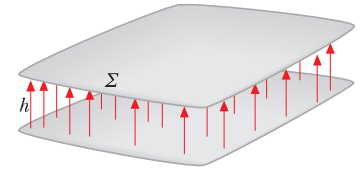
l'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando su tutto il volume in cui il campo elettrostatico è diverso da zero:

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau. \quad (4.19)$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo elettrostatico.

Le (4.18) e (4.19) valgono per qualsiasi campo elettrico, indipendentemente dalla sua natura. È importante sottolineare come l'equazione 4.19 implichi che l'energia potenziale di una distribuzione di carica sia sempre positiva. Nel paragrafo 2.3 abbiamo ricavato l'espressione per l'energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi, il cui valore poteva essere sia positivo che negativo. In effetti l'equazione 2.23 non è completa, è tuttavia l'espressione appropriata quando si considerano cariche puntiformi poiché l'integrale 4.19 in questo caso darebbe un risultato divergente. Utilizzeremo la (4.18) nel paragrafo 10.4 relativamente al campo elettrico di un'onda elettromagnetica.

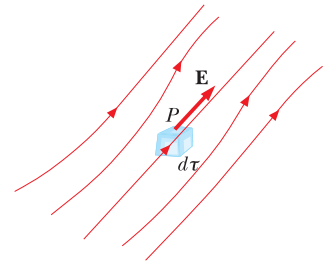
Nel SI l'unità di misura della densità di energia elettrostatica è joule/m³ (J/m³).



$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

▲ **Figura 4.27** Energia elettrostatica immagazzinata all'interno di un condensatore carico.

Densità di energia elettrostatica



$$dU_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

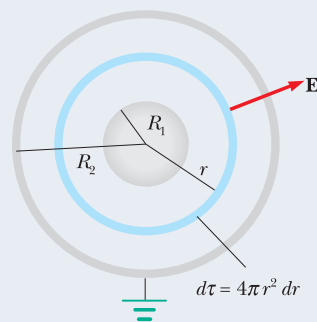
▲ **Figura 4.28** Energia elettrostatica nel volume infinitesimo $d\tau$, nell'intorno di un punto P .

ESEMPIO 4.8 Energia elettrostatica di un condensatore sferico

Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2 .

Soluzione

Impostiamo il calcolo sulla (4.19) utilizzando quanto visto nell'esempio 4.2: il campo tra le armature del condensatore vale $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$; il volume della cortecchia sferica infinitesima compresa tra il raggio r e il raggio $r + dr$ è $d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$ e pertanto l'integrale sul volume si riduce ad un integrale sull'unica coordinata r :



◀ **Figura 4.29**

ESEMPIO 4.8 *continua*

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.20)$$

Ricordando che la capacità di un condensatore sferico è data da (4.5), vediamo che (4.20) è pari a $q^2/2C$: quindi (4.19) e (4.17) portano allo stesso risultato.

Se facciamo tendere $R_2 \rightarrow \infty$, in modo da realizzare un conduttore sferico di raggio R_1 dalla (4.20) otteniamo

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 R_1} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

con $C = 4\pi \varepsilon_0 R_1$, capacità della sfera carica, come dato dalla (4.7).

ESEMPIO 4.9 **Energia elettrostatica di due condensatori in parallelo**

Riprendendo i condensatori dell'esempio 4.7 calcolare l'energia elettrostatica prima e dopo il collegamento in parallelo.

Soluzione

Le energie elettrostatiche iniziale e finale sono

$$U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2, \quad U_{e, \text{fin}} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) V$$

per cui la variazione di energia elettrostatica vale

$$\Delta U_e = U_{e, \text{fin}} - U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 (V - V_1) + \frac{1}{2} q_2 (V - V_2).$$

Ricorriamo all'espressione del potenziale finale trovata nell'esempio 4.6 e troviamo

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_2}{C_1 + C_2} (q_2 C_1 - q_1 C_2).$$

Siccome

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 C_2}$$

si ha infine

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2.$$

L'energia elettrostatica finale è minore di quella iniziale; evidentemente lo spostamento delle cariche richiede un lavoro della forza elettrica e l'energia elettrostatica diminuisce.

ESEMPIO 4.10 **La pressione elettrostatica**

Calcolare la forza tra due armature, di area Σ e distanti h , di un condensatore piano carico con una carica q , e il rapporto F/Σ , detto *pressione elettrostatica*.

Soluzione

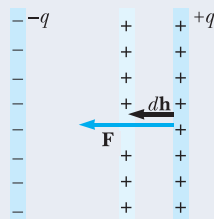
L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area Σ distanti h è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} h.$$

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza F attrattiva che per ragioni di simmetria è parallela a \mathbf{E} .

Per uno spostamento $d\mathbf{h}$ dell'armatura positiva ($dh < 0$) indicato in **Figura 4.30** l'energia elettrostatica diminuisce di

$$dU_e = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma dh$$



► **Figura 4.30**

e viene fornito dalla forza \mathbf{F} il lavoro

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{h} = -dU_e = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0} \Sigma dh > 0$$

positivo, per cui la forza \mathbf{F} è concorde a $d\mathbf{h}$ e vale:

$$F = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma. \quad (4.21)$$

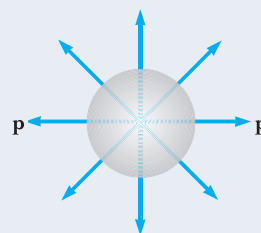
Esprimendo σ in funzione del campo elettrostatico E abbiamo in modulo:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma$$

e la forza per unità di superficie risulta

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad (4.22)$$

detta *pressione elettrostatica*.



◀ **Figura 4.31**

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Elementi di Fisica

Elettromagnetismo e Onde

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.



€ 35,00

