Comprende versione **ebook**

M. Zani • P. Taroni • L. Duò

Esercizi di Fisica

Elettromagnetismo e Onde

F. Bottegoni
G. Bussetti
A. Calloni
M. Cantoni
D. Contini
A. Picone

EdiSES università

Accedi ai contenuti **digitali**

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore**!

COLLEGATI AL SITO
EDISES.IT

ACCEDI AL
MATERIALE DIDATTICO

SEGUI LE
ISTRUZIONI

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it**
e accedere ai contenuti digitali.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie

Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso ai contenuti digitali** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

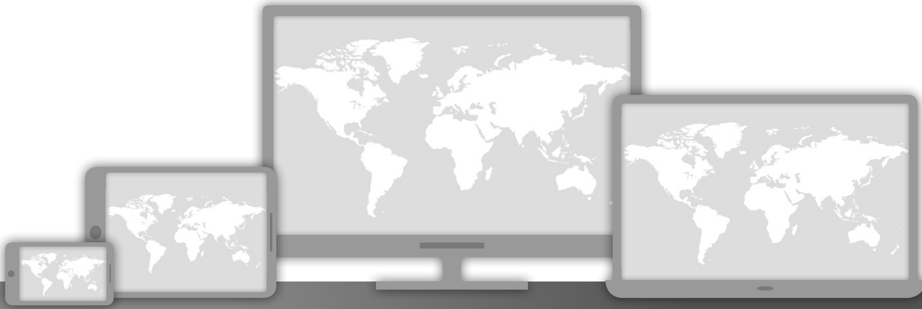
Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito **edises.it**
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

EdiSES università



I contenuti digitali sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere all'**Ebook**, ovvero la versione digitale del testo in formato epub, standard dinamico che organizza il flusso di testo in base al dispositivo sul quale viene visualizzato. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

EdiSES università

ESERCIZI DI FISICA
ELETTROMAGNETISMO E ONDE

Maurizio Zani • Paola Taroni • Lamberto Duò

EdiSES UNIVERSITÀ

Maurizio Zani, Paola Taroni, Lamberto Duò
ESERCIZI DI FISICA - ELETTROMAGNETISMO E ONDE

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2028 2027 2026 2025 2024

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Fotocomposizione: V colore di Francesco Omaggio

Stampato presso
Vulcanica s.r.l. - Nola (NA)

Per conto della
EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edises.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 176 8

Federico Bottegoni *Politecnico di Milano*

Gianlorenzo Bussetti *Politecnico di Milano*

Alberto Calloni *Politecnico di Milano*

Matteo Cantoni *Politecnico di Milano*

Davide Contini *Politecnico di Milano*

Andrea Picone *Politecnico di Milano*

COORDINAMENTO E REVISIONE A CURA DI:

Maurizio Zani *Politecnico di Milano*

Paola Taroni *Politecnico di Milano*

Lamberto Duò *Politecnico di Milano*

Abbiamo sempre pensato che la prefazione di un testo debba essere concisa e diretta, per cui partiamo subito da un punto che riteniamo importante: tutti gli esercizi che vengono presentati in questo testo sono svolti, semplicemente per non lasciare il lettore in balia di ipotesi risolutive senza un riscontro finale dei suoi ragionamenti e tentativi.

Il testo segue un ordine tematico con relativa suddivisione in capitoli che riprende quello del testo di teoria, così da darne una diretta utilità nell'uso combinato. Partendo quindi da un riepilogo di calcolo vettoriale, si passano a descrivere le interazioni elettriche nei diversi aspetti, per poi continuare con la corrente elettrica e quindi con le interazioni magnetiche e i fenomeni induttivi. Gli esercizi proposti proseguono dallo sviluppo delle equazioni di Maxwell nell'ambito delle onde elettromagnetiche e relativa propagazione, per poi affrontare l'ottica geometrica e quella ondulatoria, in particolare con l'interferenza e la diffrazione.

Gli esercizi sono svolti in forma analitica e solo nell'ultimo passaggio, che porta al risultato finale, vengono sostituiti i valori numerici dei parametri in gioco, così da avere un'idea chiara di come il risultato dipenda da questi ultimi. Non cadete però nell'errore di pensare di aver compreso l'esercizio e la fisica sottostante semplicemente perché avete visto la risoluzione e sapete riprodurla... Dovete invece capire quale sia l'ambito di validità delle relazioni che vengono presentate, così che possiate poi applicarle anche ad altri contesti.

"La fisica non è la matematica."

Facciamo quindi nostra una delle tante frasi attribuite ad Albert Einstein: "*Non insegno mai nulla ai miei allievi. Cerco solo di metterli in condizione di poter imparare*". Questo sposta l'onere dell'impegno su di voi! Dovete pensare a questo testo di esercizi come a un'opportunità di ragionamento sulle tematiche proposte e non ad un ricettario di risoluzioni standard cui attingere in caso di necessità. Ancor meno l'eserciziario va pensato come il bigino del libro di testo; volutamente non abbiamo inserito all'inizio di ogni capitolo un richiamo alla teoria, così da non dar adito all'idea che l'eserciziario possa essere esaustivo e non richieda di aver compreso le basi che sottostanno all'argomento.

"Gli argomenti trattati si studiano sui libri."

Infine, dopo avervi proposto quale sia il contesto nel quale ci stiamo muovendo e quali siano le opportunità e i requisiti che questo testo offre, giova ricordare che il motore che può far fruttificare il vostro impegno sta nella passione che metterete e con la quale affronterete lo studio; concludiamo allora con la terza e ultima nota relativamente a come (per noi) si studia la Fisica:

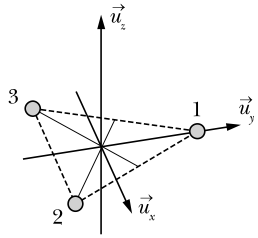
"*Non c'è scritto da nessuna parte che la Fisica sia noiosa.*"

Lasciatevi stupire dai fenomeni che vi circondano, *enjoy with Physics*!

I coordinatori

Maurizio Zani, Paola Taroni, Lamberto Duò

ESERCIZIO 3.3



Determinare l'espressione lungo l'asse $\vec{u}_z$ del campo elettrico generato da tre corpi puntiformi posti ai vertici del triangolo equilatero di lato L mostrato in figura. L'asse $\vec{u}_z$ passa per il baricentro del triangolo. Studiare in particolare il caso in cui:

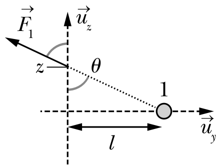
a) i corpi siano caricati con la stessa carica q;
b) il corpo 1 abbia carica q, mentre i corpi 2 e 3 abbiano ognuno carica $q' = -q/2$.

Soluzione

a) Il campo elettrico in un punto z dell'asse $\vec{u}_z$ può essere calcolato come il rapporto tra la forza elettrostatica agente su di un ipotetico corpo carico q' (carica di prova) posto in z ed il valore della carica stessa

$$\vec{\mathscr{E}} = \frac{\vec{F}_{elet}}{q'}$$

Nel caso a) tutti i corpi carichi q contribuirebbero in modo eguale alla forza elettrostatica; si consideri ad esempio il contributo della carica 1, mostrato nella figura sottostante



La forza di interazione elettrostatica $\vec{F}_1$ con un corpo carico q' posto in (0,0,z) è pari a

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}$$

dove $\vec{u}$ indica la direzione ed il verso della forza (è calcolabile, ad esempio, come $\vec{u} = \dfrac{z\vec{u}_z - l\vec{u}_y}{r}$) e $r = \sqrt{z^2 + l^2}$ distanza tra i due corpi. La distanza tra il corpo 1 ed il baricentro del triangolo lungo $\vec{u}_y$ è pari a $l = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$. Il campo elettrico generato dalla carica 1 è quindi:

$$\vec{\mathscr{E}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

La componente di $\vec{\mathscr{E}}_1$ lungo l'asse $\vec{u}_z$ è

$$\mathscr{E}_{1z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos(\theta)$$

con $\cos(\theta) = \dfrac{z}{r}$, mentre la componente in direzione perpendicolare all'asse $\vec{u}_z$ è

$$\mathscr{E}_{1\perp} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\sin(\theta)$$

con $\sin(\theta) = \dfrac{l}{r}$. Data la simmetria del problema, il componente del campo elettrico in direzione perpendicolare ad $\vec{u}_z$ si bilancerà con i rispettivi contributi dei corpi 2 e 3; i componenti in direzione di $\vec{u}_z$, invece, si sommano

$$\vec{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}_{1z} + \mathscr{E}_{2z} + \mathscr{E}_{3z})\vec{u}_z = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{z}{r}\vec{u}_z = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(3z^2+L^2)^{3/2}}z\vec{u}_z$$

Nel caso a) il campo elettrico generato dai tre corpi puntiformi è quindi diretto lungo l'asse $\vec{u}_z$.

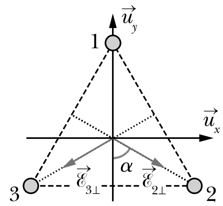
b) I corpi 2 e 3 generano ciascuno un campo elettrico con componente lungo $\vec{u}_z$ avente modulo

$$\mathscr{E}_{2,3z} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)}{r^2}\frac{z}{r}$$

I contributi lungo $\vec{u}_z$, quindi, si annullano

$$\mathscr{E}_{1z} + \mathscr{E}_{2z} + \mathscr{E}_{3z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{z}{r} + 2\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)}{r^2}\right)\frac{z}{r} = 0$$

I componenti in direzione perpendicolare a $\vec{u}_z$, invece, si sommano. La figura sottostante mostra $\vec{\mathscr{E}}_{3\perp}$ ed $\vec{\mathscr{E}}_{2\perp}$



Si ottiene

$$\vec{\mathscr{E}}_{2\perp} + \vec{\mathscr{E}}_{2\perp} = -2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)}{r^2}\sin(\theta)\cos(\alpha)\right)\vec{u}_y$$

Sostituendo $\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ si ricava

$$\vec{\mathscr{E}}_{2\perp} + \vec{\mathscr{E}}_{3\perp} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)}{r^2}\frac{l}{r}\right)\vec{u}_y$$

per cui complessivamente

$$\vec{\mathscr{E}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{l}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)}{r^2}\frac{l}{r}\vec{u}_y$$

ossia

$$\vec{\mathscr{E}} = -\frac{9}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Lq}{(3z^2+L^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

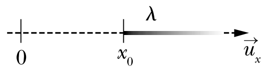
Nel caso b), quindi, il campo elettrico generato dai tre corpi puntiformi è diretto lungo $-\vec{u}_y$.

ESERCIZIO 3.4

Determinare il campo elettrico prodotto nell'origine del sistema di riferimento da una carica distribuita lungo il semiasse positivo $\vec{u}_x$ con $x \geq x_0$ e densità lineare di carica $\lambda = a/x$, con $a > 0$ espressa in coulomb e costante.

Soluzione

La distribuzione di carica elettrica ha l'aspetto mostrato in figura (linea nera continua).



Ogni tratto infinitesimo del semiasse positivo $\vec{u}_x$ (con $x \geq x_0$) contribuisce al campo elettrico nell'origine con un campo elettrico infinitesimo

$$d\vec{\mathscr{E}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2}\vec{u}_x$$

dove dq è la carica infinitesima posizionata in x

$$dq = \lambda dx = \frac{a}{x}dx$$

Il campo elettrico totale è ottenuto tramite un'operazione di integrazione

$$\vec{\mathscr{E}} = -\frac{\vec{u}_x}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{\lambda dx}{x^2} = -\frac{a\vec{u}_x}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$$

L'integrale definito è pari a

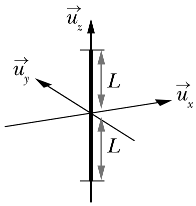
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_{x_0}^{\infty} = \frac{1}{2x_0^2}$$

Si ottiene quindi

$$\vec{\mathscr{E}} = -\frac{a}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_0^2}\vec{u}_x$$

ESERCIZIO 3.5

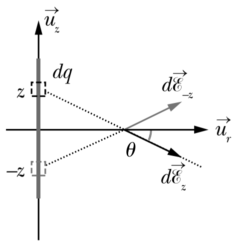
Determinare in un punto qualsiasi del piano (x, y) il campo elettrico (in modulo, direzione e verso) generato da un tratto di filo rettilineo di lunghezza $2L$ e carico con densità di carica λ_0 uniforme disposto come in figura. Si ripeta il calcolo considerando una densità di carica $\lambda = +|\lambda_0|$ per $z \geq 0$ e $-|\lambda_0|$ per $z < 0$.



Soluzione

Nel caso in cui la densità di carica sia uniforme su tutto il filo, il campo elettrico avrà direzione radiale rispetto al centro del sistema di riferimento, in quanto dovrà rispettare la stessa simmetria della distribuzione di carica.

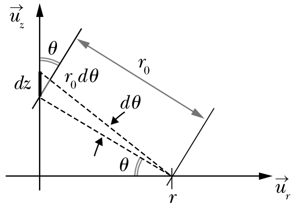
La figura sottostante mostra il contributo $d\vec{\mathscr{E}}$ di due infinitesimi di carica simmetrici rispetto al piano (x, y) in un punto del piano che si trova ad una distanza r dall'origine del sistema di riferimento.



Il campo elettrico infinitesimo risultante è

$$d\vec{\mathscr{E}}(z) = d\vec{\mathscr{E}}_z + d\vec{\mathscr{E}}_{-z} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_0^2}\cos(\theta)\vec{u}_r$$

con $r_0 = \sqrt{z^2 + r^2} = \dfrac{r}{\cos(\theta)}$ e $dq = \lambda_0\, dz$. È conveniente considerare l'angolo θ come variabile di integrazione; considerando la figura sottostante



si ricava la relazione

$$dz \cdot \cos(\theta) = r_0 d\theta$$

da cui

$$dz = \frac{r_0}{\cos(\theta)}d\theta$$

Quindi sostituendo tutti i termini si ha

$$\vec{\mathscr{E}} = 2\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_0^2}\cos(\theta)\vec{u}_r = 2\int_0^{\overline{\theta}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\cos(\theta)d\theta\vec{u}_r$$

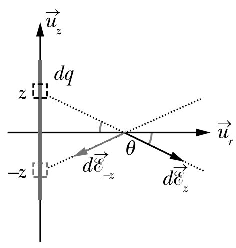
e il risultato dell'integrazione è

$$\vec{\mathscr{E}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{r}\sin(\overline{\theta})\vec{u}_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{r}\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}\vec{u}_r$$

Osservazione: per punti molto distanti dall'origine del sistema di riferimento, ossia per $r >> 0$

$$\lim_{r\to\infty}\vec{\mathscr{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2L\lambda_0}{r\sqrt{L^2 + r^2}}u_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

pari al campo elettrico generato da una distribuzione di carica $Q = 2L\lambda_0$ concentrata nell'origine del sistema di riferimento.
Se la densità di carica ha segno $\lambda = +|\lambda_0|$ per $z \geq 0$ e $\lambda = -|\lambda_0|$ per $z < 0$, il contributo di due infinitesimi di carica simmetrici rispetto al piano (x, y) si annulla in direzione radiale, ma non in direzione $\vec{u}_z$, come mostrato in figura.



Considerando gli infinitesimi di carica dq si ricava la seguente espressione per il campo elettrico infinitesimo:

$$d\vec{\mathscr{E}}(z) = d\vec{\mathscr{E}}_z + d\vec{\mathscr{E}}_{-z} = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dq|}{r_0^2}\sin(\theta)\vec{u}_z$$

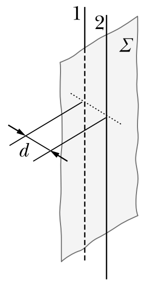
In questo caso è più conveniente adottare z come variabile di integrazione ed esprimere $\sin(\theta) = \frac{z}{r_0}$, da cui

$$\vec{\mathscr{E}} = -2\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\lambda_0|}{r_0^{3/2}} z dz\,\vec{u}_z = -2\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\lambda_0|}{(r^2+z^2)^{3/2}} z dz\,\vec{u}_z$$

Il risultato dell'integrale è

$$\vec{\mathscr{E}} = -\frac{|\lambda_0|}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^L \vec{u}_z = -\frac{|\lambda_0|}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[1-\frac{r}{\sqrt{r^2+L^2}}\right]\vec{u}_z$$

ESERCIZIO 3.6



Due lunghi fili rettilinei e paralleli sono entrambi carichi con densità di carica $\lambda > 0$. La distanza tra i due fili è d. Calcolare il valore massimo del campo elettrico nel piano di simmetria del sistema mostrato in figura.

Soluzione

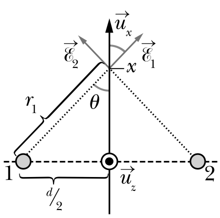
Il campo elettrico prodotto da un filo infinito di carica ad una distanza r dal filo stesso può essere calcolato sfruttando il risultato del problema precedente (campo elettrico generato da un tratto di conduttore di lunghezza $2L$)

$$\vec{\mathscr{E}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}\vec{u}_r$$

Facendo tendere $L \to \infty$, si ottiene quindi

$$\vec{\mathscr{E}}_{filo} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}\vec{u}_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r$$

Il campo elettrico in un punto qualsiasi del piano di simmetria Σ mostrato in figura è la somma dei campi elettrici $\vec{\mathscr{E}}_1$ ed $\vec{\mathscr{E}}_2$ generati dai due fili. I due contributi sono mostrati nella figura sottostante, in cui l'asse $\vec{u}_z$ è parallelo ai due fili e l'asse $\vec{u}_x$ è perpendicolare ai fili ed appartiene al piano Σ



L'origine del sistema di riferimento è posta nel punto medio del segmento che congiunge i due fili. Considerato un punto P sull'asse $\vec{u}_x$, i contributi $\vec{\mathscr{E}}_1$ ed $\vec{\mathscr{E}}_2$ sono uguali in modulo e la loro somma è un vettore diretto lungo $\vec{u}_x$ avente modulo

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{1,x} + \mathscr{E}_{2,x} = 2\mathscr{E}_{1,x}$$

Le espressioni dei campi elettrico e magnetico sono

$$\vec{B} = B_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_y = 10^{-8}\,\mathrm{T}\sin\left(1.26\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}\,x - 377\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}t\right)\vec{u}_y$$

$$\vec{\mathscr{E}} = \vec{B}\times\vec{v} = B_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_y \times c\vec{u}_z = \mathscr{E}_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_x, \text{ con } \mathscr{E}_0 = B_0\, c = 3 \text{ V/m}$$

b) Il vettore di Poynting vale

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathscr{E}}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathscr{E}_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_x \times B_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_y = \frac{cB_0^2}{\mu_0}\sin^2(kx - \omega t)\vec{u}_z$$

c) L'intensità dell'onda è pari al modulo del vettore di Poynting

$$I = \left|\vec{S}\right| = \frac{cB_0^2}{\mu_0}\sin^2(kx - \omega t)\vec{u}_z$$

L'intensità massima vale quindi

$$I_{max} = S_{max} = \frac{cB_0^2}{\mu_0} = 2.39\cdot 10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}$$

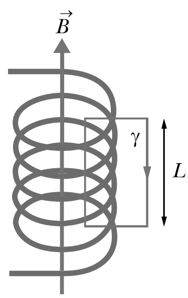
d) L'intensità efficace si determina come media su un periodo dell'intensità istantanea, e risulta uguale alla metà dell'intensità massima

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{cB_0^2}{\mu_0}\sin^2(kx - \omega t)\,dt = \frac{1}{2}S_{max} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} = 1.19\cdot 10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}$$

ESERCIZIO 14.3

Si consideri un solenoide di lunghezza L e sezione circolare di raggio $R << L$, costituito da N spire nelle quali viene fatta circolare una corrente elettrica di intensità variabile secondo l'espressione $I = I_0 \sin(\omega t)$. Si assuma ω sufficientemente piccola da poter assumere il campo elettrico come quasi statico. Si determinino, all'interno del solenoide, le seguenti espressioni:

a) campo magnetico;
b) campo elettrico;
c) vettore di Poynting.



Soluzione

a) Il solenoide può essere considerato infinito, dal momento che $R << L$: $\vec{B}$ è pertanto parallelo all'asse del solenoide e costante in modulo al suo interno, e nullo al suo esterno. Si consideri una linea γ chiusa rettangolare con un lato di lunghezza L' interno al solenoide. In base all'ipotesi di quasi staticità di $\vec{\mathscr{E}}$, si trascuri il termine di corrente di spostamento nella legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL' = \mu_0 N'I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi(\vec{\mathscr{E}})}{dt} \approx \mu_0 N'I \longrightarrow B = \frac{\mu_0 N'I}{L'} = \frac{\mu_0 N I_0 \sin(\omega t)}{L}$$

dove N' è il numero di spire concatenate con la linea γ, e $\dfrac{N}{L} = \dfrac{N'}{L'}$ è il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide

b) Per simmetria, le linee di campo di $\vec{\mathcal{E}}$ all'interno del solenoide sono circonferenze concentriche rispetto al suo asse. Si consideri quindi una circonferenza di raggio $r < R$ e concentrica con il solenoide, e si applichi la legge di Faraday

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}\, 2\pi r = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 N I_0 \omega \cos(\omega t)}{L} \pi r^2 \longrightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 N I_0 \omega r \cos(\omega t)}{2L}$$

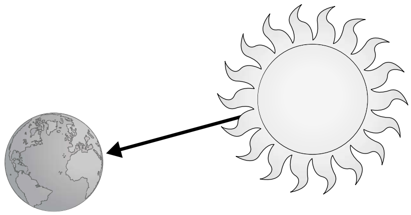
c) Il vettore di Poynting è diretto radialmente rispetto all'asse del solenoide. Il suo modulo vale

$$S = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{E} B = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 N I_0 \omega r \cos(\omega t)}{2L} \frac{\mu_0 N I_0 \sin(\omega t)}{L} = -\frac{\mu_0 N^2 I_0^2 \omega r \sin(2\omega t)}{4L^2}$$

ESERCIZIO 14.4

La luce solare appena fuori dall'atmosfera terrestre ha un'intensità media pari a 1.4 kW/m^2. Assumendo che la luce si comporti come un'onda piana, si calcolino:

a) i valori efficaci dei campi elettrico e magnetico;
b) la pressione di radiazione media esercitata dal Sole sulla Terra.



Soluzione

a) L'ampiezza del campo elettrico si ricava a partire dall'intensità media:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \longrightarrow \mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{2\bar{I}}{c\varepsilon_0}} = 1.027 \text{ kV/m}$$

Il valore efficace del campo elettrico è pari all'ampiezza divisa per $\sqrt{2}$:

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\bar{I}}{c\varepsilon_0}} = 726 \text{ V/m}$$

Analogamente, si può determinare il valore efficace del campo magnetico a partire dalla sua ampiezza:

$$B_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} = 3.423 \cdot 10^{-6}\,\text{T} \longrightarrow B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} = 2.421 \cdot 10^{-6}\,\text{T}$$

b) La pressione di radiazione è espressa dalla seguente relazione

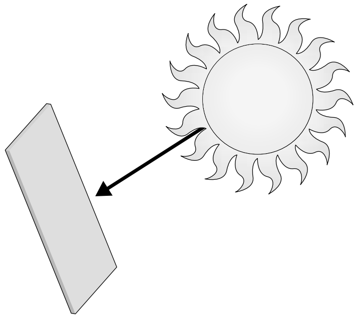
$$P = \frac{I}{c}$$

Il corrispondente valore medio si ricava a partire dal valore medio dell'intensità

$$\bar{P} = \frac{\bar{I}}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

ESERCIZIO 14.5

Una vela solare di forma rettangolare e spessore uniforme d è costituita di grafite, di densità $\rho = 2.27$ g/cm^3, ed è perfettamente riflettente. La vela è disposta perpendicolarmente ai raggi solari, ed è soggetta alla sola attrazione del Sole (gli altri corpi celesti non influiscono sensibilmente). Conoscendo l'intensità media della radiazione solare sulla Terra (1.4 kW/m^2), la distanza Terra-Sole ($1.5 \cdot 10^{11}$ m), la massa del Sole ($2 \cdot 10^{30}$ kg) e la costante di gravitazione universale ($6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), si calcoli lo spessore massimo che dovrebbe avere la vela per poter sfuggire all'attrazione del Sole.



Soluzione

La vela è soggetta a due forze, eguali e opposte: (i) la forza dovuta alla pressione di radiazione del Sole; (ii) la forza di attrazione gravitazionale del Sole.

(i) La potenza W irradiata dal Sole è costante, non essendoci attenuazione nello spazio vuoto. Assumendo che si distribuisca uniformemente su una superficie sferica di raggio r, l'intensità (potenza per unità di superficie) su tale superficie si ottiene come:

$$W = I(r) 4\pi r^2 \longrightarrow I(r) = \frac{W}{4\pi r^2}$$

Confrontando due superfici sferiche di raggio r e R, dove R è la distanza Terra-Sole, e passando ai valori medi, si ottiene l'intensità media a distanza r, nota l'intensità media in prossimità della Terra:

$$\overline{W} = \overline{I}(r) 4\pi r^2 = \overline{I}(R) 4\pi R^2 \longrightarrow \overline{I}(r) = \overline{I}(R)\frac{R^2}{r^2}$$

La pressione di radiazione media dovuta alla luce solare a distanza r dal Sole risulta

$$\overline{P} = \frac{\overline{I}(r)}{c} = \frac{\overline{I}(R)}{c}\frac{R^2}{r^2}$$

La corrispondente forza media, agente su una vela di area A perpendicolare alla direzione di propagazione della luce, vale

$$\overline{F}_P = 2\overline{P}A = 2\frac{\overline{I}(R)}{c}\frac{R^2}{r^2}A$$

dove il fattore 2 deriva dal fatto che la vela è completamente riflettente.

(ii) La forza di attrazione gravitazionale dovuta al Sole agente sulla vela a distanza r da esso vale

$$\overline{F}_g = G\frac{Mm}{r^2} = \frac{GM\rho A d}{r^2}$$

dove M è la massa del Sole e $m = \rho A d$ è la massa della vela, assunta di densità ρ, area A e spessore d.

In condizioni di equilibrio tra pressione di radiazione e attrazione gravitazionale, la vela resta ferma a distanza r dal Sole (ossia non viene attratta da esso, come sarebbe se la forza di attrazione gravitazionale prevalesse, né viene respinta, come avverrebbe se la pressione di radiazione fosse preponderante):

$$\overline{F}_P = 2\frac{\overline{I}(R)}{c}\frac{R^2}{r^2}A = \overline{F}_g = \frac{GM\rho Ad}{r^2}$$

Fissati gli altri parametri, lo spessore della vela per cui questo avviene è

$$d = \frac{2\overline{I}(R)R^2}{GM\rho c} = 0.693\ \mu\text{m}$$

Se lo spessore della vela fosse inferiore a tale valore, la pressione di radiazione prevarrebbe e la vela potrebbe sfuggire all'attrazione del Sole. Se invece fosse superiore, la forza di attrazione gravitazionale prevarrebbe e la vela verrebbe attratta dal Sole. Si noti che tale risultato non dipende dall'area della vela.

ESERCIZIO 14.6

La pressione di radiazione esercitata dalla radiazione solare sulle particelle di pulviscolo che compongono le code delle comete produce la classica "coda luminosa", disposta sempre in direzione opposta al Sole. Si assumano le particelle come sfere perfettamente assorbenti, di densità $3 \cdot 10^3$ kg/m^3. Sapendo l'intensità media della radiazione solare sulla Terra (1.4 kW/m^2), la distanza Terra-Sole ($1.5 \cdot 10^{11}$ m), la massa del Sole ($2 \cdot 10^{30}$ kg) e la costante di gravitazione universale ($6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), si calcoli il raggio massimo delle particelle che formano la coda.

Soluzione

La condizione di equilibrio per le particelle dipende dall'equilibrio tra la pressione di radiazione e la forza di attrazione gravitazionale.
Per una particella sferica di raggio a, l'area efficace "vista" dalla radiazione solare è quella di una sezione circolare (la proiezione di una sfera su un piano è una circonferenza con lo stessa raggio), ossia $A = \pi a^2$. Il suo volume è invece $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, da cui la massa risulta $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

La condizione di equilibrio tra attrazione gravitazionale del Sole e pressione di radiazione della luce solare è espressa dalla seguente eguaglianza (si veda uno degli esercizi precedenti per il calcolo della pressione di radiazione a distanza r dal Sole a partire dall'intensità della luce solare sulla Terra e della distanza Terra-Sole, a meno del fattore 2 in quanto in questo caso la particella è assorbente e non riflettente):

$$\overline{F}_P = \overline{P}A = \frac{\overline{I}(R)}{c}\frac{R^2}{r^2}\pi a^2 = \overline{F}_g = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{M}{r^2}\rho\frac{4}{3}\pi a^3$$

M. Zani • P. Taroni • L. Duò

Esercizi di Fisica

Elettromagnetismo e Onde

Accedi ai **contenuti digitali** › **Espandi** le tue risorse › con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**

All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai **contenuti digitali**.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

EdiSES università

ISBN - 978-88-3623-176-8

9 788836 231768