

Comprende versione

ebook



Luigi Verolino

Elementi di Reti Elettriche

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore!**



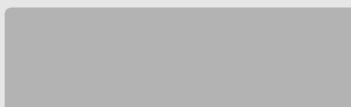
▼
COLLEGATI AL SITO
EDISES.IT

▼
ACCEDI AL
MATERIALE DIDATTICO

▼
SEGUI LE
ISTRUZIONI

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it**
e accedere alla **versione digitale** del testo e al **materiale didattico**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso al materiale didattico** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

▼
Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

▼
Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticali tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

LUIGI VEROLINO

Elementi di Reti Elettriche



Prof. Ing. Luigi Verolino

ELEMENTI DI RETI ELETTRICHE

Copyright © 2019, EdiSES S.r.l. – Napoli

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2025	2024	2023	2022	2021	2020	2019			

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata.

*A norma di legge è vietata la riproduzione,
anche parziale, del presente volume o di
parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

a cura di:

Prof. Ing. Luigi Verolino

Università Federico II di Napoli

Dipartimento di Ingegneria Elettrica Napoli

Fotocomposizione: doma book di Massimo Di Grazia – Napoli

Stampato presso la

Tipolitografia Petruzzi S.r.l.

Via Venturelli 7/B

06012 Città di Castello (PG)

per conto della

EdiSES s.r.l. – Piazza Dante, 89 – Napoli

Tel. 0817441706/07 Fax 0817441705

http://www.edises.it e-mail: info@edises.it

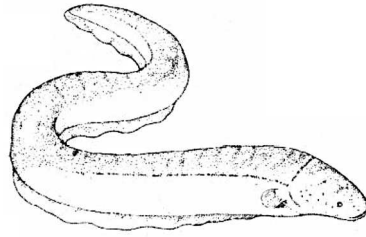
ISBN 978-88-33190136

I N T R O D U Z I O N E

L'ambiente quotidiano è pienissimo di cose che vengono comunemente chiamate *elettriche* oppure *elettroniche*. Basta guardarsi intorno: la lampada che illumina il tavolo, lo scaldabagno, il frigorifero, il ferro da stiro, il ventilatore sono tutti oggetti etichettati come elettrici; la radio, il televisore, il telefono, l'elaboratore elettronico vengono classificati, invece, come elettronici. Senza soffermarsi troppo sulla distinzione fra i due termini, elettrico ed elettronico, distinzione che sarà sempre più chiara man mano che lo studio di questo testo progredirà, uscendo di casa, le cose non cambiano molto: tram, treni, filobus, funivie, sono elettrici; le stesse automobili, che, purtroppo, elettriche ancora non sono del tutto, contengono fari, candele, motorino di avviamento e tutti quei dispositivi elettronici che fanno accendere spie e luci sul cruscotto. Non vi è proprio alcun dubbio: si vive in un mondo veramente ... elettrizzante.

Di notte, molte città diventano veri e propri spettacoli di luci sfavillanti: le insegne luminose utilizzano lampade al neon ed altri gas che si illuminano al passaggio della corrente elettrica. Per una grande città, l'elettricità è come il sangue che scorre nelle vene e nelle arterie: se per qualche incidente viene a mancare l'energia elettrica, tutto si paralizza e salta. I semafori si spengono, la metropolitana si ferma, gli ascensori si bloccano, le case restano senza illuminazione, le fabbriche sono costrette a fermare il ciclo produttivo. Ecco perché molti edifici importanti, come gli ospedali, tengono sempre dei generatori di elettricità autonomi che, in caso di *black-out*, entrano in funzione: cosa mai accadrebbe, se si interrompesse l'energia elettrica durante un delicato intervento chirurgico!

Molti animali inviano segnali elettrici per trasmettere dei messaggi. Alcuni pesci possono generare anche elettricità ad elevato potenziale: l'anguilla elettrica può produrre scariche a 500 *volt*, sufficienti ad immobilizzare un uomo. Di norma, questo pesce usa questa energia per catturare le sue prede ma, seppure ad intensità molto più basse, per orientarsi e comunicare con altri animali. Le torpedini producono tensioni di 200 *volt* con potenze di 2000 *watt*. È probabile che la funzione dell'organo elettrico sia stata primariamente di natura difensiva ed offensiva, con lo stordimento e la cattura delle prede, che si è poi evoluta come strumento in grado di fornire utili informazioni sull'ambiente circostante nei pesci con abitudini notturne o viventi in acque torbide. La capacità che hanno certi pesci di orientarsi attraverso variazioni del campo elettrico rappresenterebbe quindi una forma di convergenza evolutiva, sviluppatasi in specie sistematicamente lontane fra di loro che hanno però adottato la stessa soluzione per sopravvivere sui fondali melmosi, dove possono cacciare anche di notte. Il Gimnoto ha una struttura allungata, senza pinna dorsale né ventrali, e la maggior parte di essi è dotata di organi elettrici capaci di generare nell'acqua dei veri e propri campi elettrici, atti a favorire l'individuazione di eventuali nemici, prede od ostacoli, così da costituire un'efficace arma di difesa od offesa. La distribuzione geografica della cinquantina di specie che costituiscono il gruppo va complessivamente dal Guatemala al Rio de la Plata. Degli elettroforidi è unico rappresentante l'elettroforo elettrico (*Electrophorus Electricus*) dell'America meridionale, che assume ossigeno dall'aria, portandosi in superficie a respirare una volta ogni quarto d'ora. L'ossigeno atmosferico viene respirato tramite un tessuto vascolare presente nella bocca.



Gimnoto, anche conosciuto come anguilla elettrica.

Molti animali luminescenti scaricano all'esterno le loro sostanze generatrici di luce. I molluschi producono un muco luminoso che lasciano strisciando sul terreno; alcuni vermi terrestri espellono una sostanza vischiosa luminosa e alcuni calamari, quando sono disturbati, emettono una nuvola di fluido. Altri, come lucciole, protozoi, gamberi e pesci, generano la luce per mezzo di reazioni che avvengono all'interno delle loro cellule. Il meccanismo di emanazione della luce è complicato e non ancora ben spiegato; l'acqua sembra indispensabile, in quanto gli organismi fosforescenti perdono la luminosità quando sono troppo all'asciutto e la riacquistano con l'aggiunta di acqua. La maggior parte degli animali, poi, ha bisogno di ossigeno per produrre luce, anche se talvolta è sufficiente una minima quantità. L'emissione di luce è causata da due diverse sostanze: la luciferina, termoresistente, e la luciferasi, proteica e termolabile. La luce, che si manifesta quando queste due sostanze vengono mescolate in presenza di acqua e ossigeno, sarebbe l'espressione di un'azione ossidoriduttiva. La luce prodotta dagli organismi è caratterizzata da uno spettro continuo, ma notevolmente più corto ai due estremi, di quello solare. L'emissione di luce assume la colorazione giallo-verde, tuttavia in molti casi, specialmente nei cefalopodi e nei teleostei, provvisti di organi luminosi assai complessi, nell'effetto cromatico interviene l'azione di apparati riflettori, di lenti o di schermi di cromatofori, che modificano il colore iniziale, per fenomeni di interferenza o di assorbimento, in modo tale che un animale possa emettere diversi colori differenti.



Meduse luminescenti

Anche la vita dell'uomo è determinata da fenomeni elettrici. Senza dover incorrere in eccessi, si può dire che le esperienze cerebrali e nervose, la respirazione, il ritmo cardiaco sono controllati da organi che sono praticamente dei dispositivi elettrici.

L'elettricità illumina, riscalda, raffredda, muove gli oggetti, fa funzionare i calcolatori elettronici, consente di ricevere suoni ed immagini. È una forma di energia utilizzata in mille modi diversi e buona per tantissimi usi: è possibile produrla, trasformarla e trasportarla piuttosto facilmente, facendole svolgere tanti compiti utilissimi all'uomo. Insomma, l'elettricità è dovunque, dentro e fuori di noi.

Viene spontaneo, allora, domandarsi cosa abbiano in comune tutte queste cose e come funzionino. Purtroppo, non è facile dare risposte soddisfacenti a queste domande e ci vorrà molto impegno sia da parte di chi studia che da parte di chi scrive ed il desiderio reale di voler capire.

Per tentare di dare una prima, seppur parziale risposta, si cominci ad osservare i più semplici oggetti elettrici, tentando di scoprire se hanno qualcosa che li accomuni. Cosa hanno in comune la lampada che è sul tavolo ed uno scaldabagno? Ben poco, si dirà. A ben guardare, però, qualcosa di simile ce l'hanno. Hanno un involucro, sia pure di forma diversa, da cui esce un filo. A guardare meglio, si vede poi che questo filo, solitamente chiamato cavo, è a sua volta fatto di più fili più sottili, tenuti insieme da una sostanza plastica. Ma non basta: tanto il cavo della lampada quanto quello dello scaldabagno terminano con una spina da cui fuoriescono tre spinotti metallici; nelle vecchie case, a dire il vero, le spine hanno soltanto due spinotti e sono più pericolose. Un'altra cosa che hanno in comune lampada e scaldabagno è che queste spine vanno inserite in certe speciali cassette, dotate di tre fori, ed incassate nei muri, dette prese: molti le chiamano prese di corrente, ma sarebbe più corretto dire che sono prese di tensione, come si avrà modo di approfondire più avanti. Infine, un'ultima cosa in comune fra lampada e scaldabagno è che entrambi hanno un pulsante, un tasto, o qualcosa di simile, comunemente interruttore, che serve ad accendere e spegnere l'oggetto. A questo punto, si potrebbe concludere che gli oggetti elettrici sono tutti dotati di un cavo, che questo cavo termina con una spina, che questa spina va inserita in una presa. Se a ciò si aggiunge che ciascun oggetto è dotato di un interruttore che provvede all'accensione ed allo spegnimento, il quadro sembra completo. Sarebbe già un bel passo avanti poter dire che tutti gli oggetti elettrici sono fatti così. Purtroppo, non è vero.

È, infatti, difficile spiegare il funzionamento di un telefonino portatile o di una radiolina, che funzionano nei posti più strani, lontano da qualsiasi presa. In questi casi, niente fili, niente spine, niente prese, eppure funzionano.

Già queste semplici osservazioni bastano a far capire che le cose sono in realtà abbastanza complicate e che non è possibile pretendere di affrontarle tutte insieme. Bisogna andare per gradi, distinguendo diversi tipi di oggetti, che vanno esaminati uno alla volta. Perciò si comincerà da quelli più semplici, come la lampada o lo scaldabagno, per passare poi, con gradualità, a quelli più complicati. In questo libro, senza utilizzare il complicato apparato delle equazioni del campo elettromagnetico, si tenterà di dare alcune spiegazioni, almeno quelle più semplici. Altri volumi spiegheranno dispositivi e funzionamenti più complessi, ma facendo uso di un apparato fisico-matematico più sviluppato.

Scopo del testo

Questo testo è pensato per un corso introduttivo sui circuiti elettrici per il nuovo ordinamento degli studi universitari e rappresenta il primo libro di Elettrotecnica. Ha, di conseguenza, lo scopo di portare l'allievo, che si suppone abbia già conoscenze universitarie di Matematica e Fisica, a comprendere come diversi oggetti del vivere quotidiano possano essere schematizzati secondo un modello elettrico. Si vuol conseguire tale obiettivo secondo lo spirito delle parole del grande matematico John von Neumann, uno dei padri della moderna informatica

le scienze non tentano di spiegare, e difficilmente anche tentano di interpretare, ma si occupano principalmente di costruire modelli.

Un modello è una costruzione matematica che, con l'aggiunta di certe interpretazioni fisiche, descrive alcuni fenomeni osservati nella realtà. Il resistore, il condensatore, l'interruttore e il trasformatore, di cui si parlerà diffusamente nel seguito, sono dispositivi elettrici con i quali si ha, forse, una certa familiarità; tuttavia, comprendere quando un dispositivo possa,



John von Neumann, nato János Lajos Neumann
Budapest, 28 dicembre 1903 – Washington, 8 febbraio 1957.

ad esempio, essere considerato un resistore, non è cosa banale. In particolare, verrà posto l'accento su tutti quegli aspetti che danno conto del funzionamento di sistemi apparentemente molto diversi tra di loro: dal tradizionale circuito elettrico, ai dispositivi integrati che sono alla base della moderna elettronica, dai componenti microscopici che hanno consentito l'incredibile sviluppo degli odierni elaboratori elettronici, agli impianti di grandi dimensioni che consentono la distribuzione dell'energia elettrica in modo capillare.

Ma questo libro vuole insegnare anche ad utilizzare le diverse tecniche per mezzo delle quali è possibile *risolvere un circuito*. Con questa espressione si intende dire calcolare la tensione e la corrente relative a ciascun bipolo del circuito e, per raggiungere questo obiettivo, è necessario:

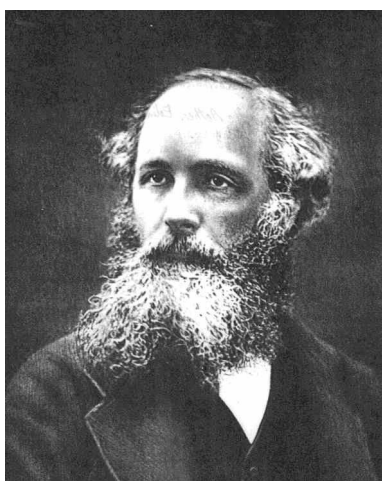
- sapere come è fatta la rete;
- conoscere le leggi da applicare;
- avere informazioni sulla 'natura' dei bipoli che costituiscono la rete;
- sapere come e quante volte applicare le leggi;
- trovare metodi rapidi ed efficienti per sviluppare i calcoli.

Ancora qualche parola sull'importanza del saper risolvere un qualsiasi circuito. Quando si pensa ad un oggetto, costruito o da costruire, elettrico o non elettrico, quel che davvero interessa è che esso funzioni bene: questo vuol dire che risponda bene agli scopi per i quali è stato costruito, oppure si intende costruirlo. Ora, per riuscire, occorre innanzitutto che si abbia ben chiaro in mente come funziona, se è già costruito, oppure come si vuole che funzioni, se si deve ancora realizzarlo. Si pensi, per esempio, ad una bicicletta: è chiaro che, per funzionare, ci vogliono i pedali che fanno muovere la catena, la quale, a sua volta, trasmette il moto alle ruote, che fanno muovere l'intera bicicletta (incluso il guidatore che, seduto sul sellino, spinge i pedali). Dal punto di vista qualitativo, potrebbe bastare quanto appena detto, per comprendere il funzionamento della bici; se si vuole, però, progettare una bici nuova, oppure anche semplicemente capirne il funzionamento da un punto di vista non soltanto qualitativo, ma anche quantitativo, si ha bisogno di acquisire molte altre informazioni, tra le quali con che forza bisogna spingere sui pedali per avanzare ad una certa velocità, come cambia questa forza quando si va in salita, oppure in discesa, e così via. Si deve, insomma, saper 'risolvere' il problema del moto della bici, vale a dire calcolare tutte le grandezze di interesse, quali forze, velocità, peso, resistenza offerta dall'aria.

Per un qualsiasi circuito elettrico, si è in una situazione, per certi versi, analoga, ma, generalmente, più complicata. Analoga, perché per capire quantitativamente come funziona, si ha bisogno innanzitutto di sapere 'risolvere' il circuito, e cioè di saperne calcolare tutte le grandezze di un qualche interesse, vale a dire tensioni, correnti, potenze, energie; più complicata, perché gli elettroni che si muovono nei fili, le correnti e le tensioni, non si riesce materialmente a vederli, come si vedono le ruote oppure i pedali della bicicletta. Ne deriva che il saper 'risolvere' un dato circuito, già costruito oppure da progettare, non basterà per capire bene come funziona, o dovrebbe funzionare, secondo le nostre intenzioni. Quel che è certo, però, è che, se non si è capaci di risolvere correttamente il circuito, non si è nemmeno nelle condizioni di farlo funzionare come si vuole, né di progettarlo o ripararlo.

In questo testo, quel che si vuole ottenere è molto ambizioso: si vuole insegnare a risolvere qualsiasi circuito, fornendo tutti gli elementi per poterlo fare, partendo dalle leggi da applicare. Dopo aver introdotto gli elementi di base, cioè i bipoli, si imparerà a 'risolvere' gli insiemi di più bipoli comunque collegati tra loro, detti reti elettriche, esaminandone tutti i metodi di analisi. Dopo aver introdotto le variabili che ne descrivono il funzionamento, si esamineranno i fondamenti della teoria dei circuiti elettrici, dato che alcuni concetti e schemi caratteristici del modello circuitale trovano larga applicazione anche in campi in cui sembrerebbe difficile adattarli, come nella teoria dei cosiddetti circuiti a microonde, oppure in sistemi, come le antenne, in cui la propagazione delle onde è un fattore dominante.

Questo approccio ha certamente il pregio di possedere una certa sistematicità ed organicità, ma può allentare la connessione con i fenomeni fisici che quel modello descrive. Diviene quindi di grande importanza didattica non rinunciare, neppure in un corso introduttivo di Elettrotecnica, a fornire quegli elementi di connessione con il vasto campo di fenomeni che vengono detti elettromagnetici, così compiutamente descritti dal modello introdotto, nella seconda metà dell'ottocento dallo scienziato scozzese *James Clerk Maxwell* e racchiuso nel suo celeberrimo sistema di equazioni. Per questo motivo, laddove è sembrato più opportuno, sono state approfondite le connessioni tra teoria elettromagnetica e modello circuitale con brevi richiami di nozioni elementari di elettromagnetismo.



James Clerk Maxwell

Edimburgo, 3 giugno 1831 – Cambridge, 5 novembre 1879

Struttura del volume

Si passa ora ad esaminare sinteticamente come è organizzato il volume, in modo che almeno le istruzioni per l'uso siano le più chiare possibili. Questo testo è diviso in tredici capitoli, ciascuno dei quali rappresenta un'unità didattica e corrisponde mediamente a circa quattro ore di lezione frontale: La spina dorsale del testo è sostanzialmente rappresentata tre grossi argomenti:

- studio delle reti in regime stazionario, comunemente detto corrente continua;
- analisi delle reti in regime dinamico, comunemente detto transitorio;
- esame delle reti in regime sinusoidale, comunemente detto corrente alternata.

Più precisamente, si parte dal concetto di bipolo e dalle leggi circuitali, per arrivare allo studio dei metodi di soluzione delle reti in regime stazionario, laddove sussistono soltanto difficoltà algebriche. Si riprende poi passando dall'analisi delle reti in regime dinamico, laddove si presentano le equazioni differenziali, per concludere il volume con lo studio delle reti elettriche in regime sinusoidale e delle reti trifasi, il cui studio si fonda sulla conoscenza dei numeri complessi. Gli ultimi capitoli approfondiscono le tecniche per lo studio dei transitori per mezzo dell'applicazione del metodo della trasformata di Laplace, presentano i circuiti magnetici, indispensabili per una completa comprensione delle macchine elettriche, e l'equazione dei telegrafisti, tanto utile nello studio degli impianti elettrici.

Partendo dall'assunto che *sapere vuol dire saper fare*, ogni parte del testo è corredata di diversi esempi completamente svolti. Lo studente, prima di iniziare un nuovo capitolo, farebbe bene a leggere con attenzione gli obiettivi formativi, sintetizzati nelle righe iniziali dello stesso, allo scopo di trarre il massimo vantaggio dallo studio.

Prerequisiti

Un corso introduttivo sull'analisi dei circuiti richiede la conoscenza degli elementi dei corsi di analisi matematica e fisica, oltre all'immane volontà di capire e l'intelligenza di studiare. Le conoscenze di base sui sistemi di equazioni lineari, sui numeri complessi e sulle equazioni differenziali sono indispensabili per comprendere alcune parti di questo libro.

In questo testo verrà adoperato il Sistema Internazionale di misura (SI) e, per rendere più semplice la notazione usata, una tensione di 23.4 *volt* verrà semplicemente indicata come 23.4, senza riportare esplicitamente l'unità di misura. Qualora si tratti di multipli o sottomultipli, il valore della grandezza verrà riportato assieme all'unità di misura. In tal modo, si indicherà con 3.25 *kΩ* un valore di resistenza pari a 3250.

INDICE GENERALE

CAPITOLO 1 I CIRCUITI E LE GRANDEZZE FONDAMENTALI

1.1	Carica elettrica e legge di Coulomb	1
1.2	Tensione e differenza di potenziale	5
1.3	Corrente elettrica	7
1.4	Bipoli e circuiti di bipoli	11
1.5	Misura della corrente e della differenza di potenziale	13
1.6	Potenza ed energia elettrica	17
1.7	Bipoli attivi e passivi	21
1.8	L'oscilloscopio a raggi catodici	21
1.9	La pila di Volta	27

CAPITOLO 2 LE LEGGI DI KIRCHHOFF

2.1	Definizioni preliminari	29
2.2	Leggi di Kirchhoff	30
2.3	Circuiti a parametri concentrati	31
2.4	Equazioni indipendenti	33
2.5	Matrice di incidenza	36
2.6	Conservazione delle potenze elettriche	36
2.7	Il giusto grafo	39

CAPITOLO 3 I BIPOLI E LE LORO CARATTERISTICHE

3.1	Caratteristica di un bipolo	45
3.2	Resistori	45
3.3	Generatori indipendenti	50
3.4	Condensatori	68
3.5	Induttori	72
3.6	Altri fenomeni di conduzione	82

CAPITOLO 4 CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO

4.1	Considerazioni preliminari	97
4.2	Circuiti elementari	97
4.3	Sovrapposizione degli effetti	102
4.4	Approccio sistematico	106
4.5	Metodi semplificati per la soluzione delle reti	108
4.6	Formula di Millman	113
4.7	Trasformazione triangolo - stella	120
4.8	Teoremi del generatore equivalente	124
4.9	Trasformazioni di sorgenti	128
4.10	Massimo trasferimento di potenza	134
4.11	Misure in regime stazionario	136
4.12	Le proprietà di non amplificazione	138
4.13	Simmetria nelle reti elettriche	150

CAPITOLO 5 DOPPI BIPOLI

5.1	Definizione e grandezze fondamentali	161
5.2	Caratteristiche dei doppi bipoli	161
5.3	Classificazione dei doppi bipoli	166
5.4	Doppi bipoli controllati in corrente	168
5.5	Doppi bipoli controllati in tensione	170
5.6	Rappresentazioni ibride	172
5.7	Caratteristiche di trasmissione	174

CAPITOLO 6 GENERATORI CONTROLLATI

6.1	Generatori dipendenti	179
6.2	Transistore bipolare a giunzione	179
6.3	Reciprocità nelle reti elettriche	192
6.4	Teorema di Cohn	194
6.5	Funzionamento di insieme di un calcolatore elettronico	195
6.6	Componenti elementari di un calcolatore elettronico	197

CAPITOLO 7
CIRCUITI IN EVOLUZIONE
DINAMICA

	205
7.1 Evoluzione libera	208
7.2 Evoluzione forzata	211
7.3 Risposta al gradino del circuito RLC	218
7.4 Altri esempi	222
7.5 Transitori in circuiti con generatori controllati	228
7.6 Circuiti sottoposti a forzamento sinusoidale	229
7.7 Transitori con elementi non lineari	232
7.8 Generatori di tensioni impulsive	233
7.9 Risposta all'impulso	236
7.10 Integrale di convoluzione	244

CAPITOLO 8
CIRCUITI IN REGIME
SINUSOIDALE

	247
8.1 Funzioni sinusoidali	247
8.2 Fasori	254
8.3 Caratteristiche dei bipoli in regime sinusoidale	258
8.4 Risoluzione di una rete in regime sinusoidale	261
8.5 Impedenza complessa	264
8.6 Circuito RLC	269
8.7 Strumenti in corrente alternata	273
8.8 Potenze in regime sinusoidale	274
8.9 Esempi di reti di bipoli e doppi bipoli in regime sinusoidale	281
8.10 Risonanza nei circuiti elettrici	295
8.11 Rifasamento	306
8.12 Massimo trasferimento di potenza attiva	309
8.13 Funzione di trasferimento in circuiti con eccitazione sinusoidale	311
8.14 Impianti di distribuzione	312
8.15 Il giusto collegamento	313
8.16 Trasformatore ideale	317
8.17 Giratore	323
8.18 Altri teoremi	325
8.19 Misure in regime sinusoidale	327
8.20 Oscilloscopio digitale	341
8.21 Accoppiamento mutuo	345

CAPITOLO 9
SISTEMI TRIFASI

	359
9.1 Considerazioni introduttive	360
9.2 Collegamenti fra generatori ed utilizzatori	367
9.3 Esame dei diversi tipi di configurazione	368
9.4 Un primo vantaggio dei sistemi trifasi	378
9.5 Potenze nei sistemi trifasi	381
9.6 Rifasamento dei sistemi trifasi	390
9.7 Altri vantaggi dei sistemi trifasi	392
9.8 Altri metodi per la misura delle potenze trifasi	394
9.9 Schemi unifilari	395
9.10 Codice colore CEI	396

CAPITOLO 10
IL METODO DELLA TRASFORMATATA
DI LAPLACE

	397
10.1 Un personaggio chiave	397
10.2 Calcolo operativo	398
10.3 Impulso di Dirac	399
10.4 Definizione della trasformata	402
10.5 Proprietà della trasformata	406
10.6 Trasformata di una funzione periodica	409
10.7 Trasformata delle derivate	410
10.8 Comportamento asintotico	413
10.9 Trasformata del prodotto di convoluzione	415
10.10 Tecnica parametrica	416
10.11 Metodo delle serie	416
10.12 Metodo delle equazioni differenziali	418
10.13 Sistemi di ordine superiore	419
10.14 Sistemi tempo-varianti	423
10.15 Equazione integrale di Volterra	426
10.16 Principali proprietà e trasformate notevoli	427

CAPITOLO 11
EVOLUZIONE DINAMICA
NEL DOMINIO DI LAPLACE

	431
11.1 Reti nel dominio di Laplace	432
11.2 Reti elementari	437
11.3 Risposta all'impulso	442
11.4 Forzamenti non usuali	451
11.5 Forzamento periodico	455
11.6 Doppi bipoli ed N -poli	458

11.7	Reti non a riposo	463
11.8	Teoremi del generatore equivalente	467
11.9	Reti con trasformatori	472
11.10	La funzione di trasferimento o di rete	481
11.11	Stabilità e reti	485
11.12	Considerazioni finali	489

CAPITOLO 12

EQUAZIONE DEI TELEGRAFISTI **491**

12.1	Introduzione	492
12.2	Linea senza perdite	494
12.3	I parametri per unità di lunghezza	498
12.4	La propagazione	499
12.5	Linea con perdite	501

CAPITOLO 13

I CIRCUITI MAGNETICI **503**

13.1	Introduzione	503
13.2	I materiali ferromagnetici	505
13.3	Fenomeni di isteresi magnetica	509
13.4	Circuiti magnetici e loro leggi	513
13.5	Applicazioni	518
13.6	Circuiti con permeabilità variabile	523
13.7	Progetto di magneti permanenti	526
13.8	Misura del flusso e dell'induzione	528

Indice analitico **531**

4

CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO

In questo capitolo si esamineranno alcuni dei principali metodi usati per ‘risolvere’ circuiti, sia semplici che complessi. Come al solito, si comincerà dai metodi che possono essere utilizzati ‘a mano’, vale a dire adoperando solo la carta, la penna ed il cervello, per i casi più semplici, con l’obiettivo di arrivare, alla fine del capitolo, a spiegare come si usa Spice, che rappresenta il più moderno ed efficace strumento di risoluzione al computer dei circuiti complicati.

Allo scopo di rendere più semplice la comprensione dei diversi metodi proposti, verranno trattati i circuiti in regime stazionario, che, quale che sia il ramo considerato, sono caratterizzati da tensioni e correnti costanti nel tempo. Si tratta di un caso particolare in cui la dinamica temporale è assente, ma che ha, tuttavia, diverse applicazioni pratiche e consente di risolvere le reti prese in esame utilizzando soltanto metodi algebrici. Per rendere anche simbolicamente evidente che si tratta di una grandezza che non varia nel tempo, una corrente, invece che con $i(t)$, verrà indicata con la lettera maiuscola I ; similmente, una tensione, invece che con $v(t)$, verrà etichettata con la maiuscola V .

4.1 Considerazioni preliminari

Prima di iniziare lo studio dei metodi che consentono la risoluzione delle reti, è opportuno rivedere la definizione di passività, per chiarire in che modo questo concetto si specifichi e si semplifichi per le reti operanti in regime stazionario. Dal momento che, in regime stazionario, potenza ed energia sono proporzionali, a

SOMMARIO

- 4.1 Considerazioni preliminari
- 4.2 Circuiti elementari
- 4.3 Sovrapposizione degli effetti
- 4.4 Approccio sistematico
- 4.5 Metodi semplificati per la soluzione delle reti
- 4.6 Formula di Millman
- 4.7 Trasformazione triangolo - stella
- 4.8 Teoremi del generatore equivalente
- 4.9 Trasformazioni di sorgenti
- 4.10 Massimo trasferimento di potenza
- 4.11 Misure in regime stazionario
- 4.12 Le proprietà di non amplificazione
- 4.13 Simmetria nelle reti elettriche

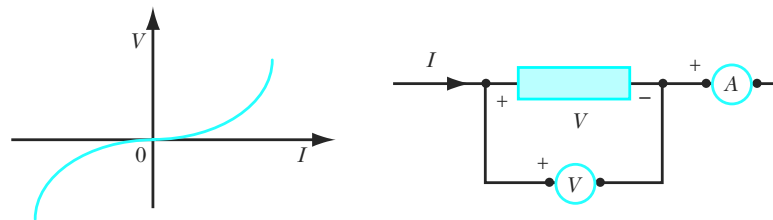
meno dell'intervallo di tempo, si dirà che un bipolo è passivo se la potenza assorbita risulta sempre positiva, tutt'al più nulla, in qualsiasi condizione di funzionamento del bipolo stesso, vale a dire

$$P_{ASS} \geq 0, \text{ per ogni condizione di funzionamento considerata.}$$

Ciò vuol dire che, se sul bipolo è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore, la sua caratteristica risulta interamente contenuta nel primo e terzo quadrante del piano tensione - corrente. È facile concludere allora che il bipolo rappresentato in Figura 4.1 è un esempio di bipolo passivo, poiché ogni punto della curva si trova nel primo o nel terzo quadrante. Ora, un punto che giace nel primo quadrante ha l'ascissa e l'ordinata entrambe positive ed il loro prodotto è, di conseguenza, positivo; un punto del terzo quadrante, invece, ha l'ascissa e l'ordinata entrambe negative ed il loro prodotto resta pur sempre positivo.

FIGURA 4.1 ►

Caratteristica di un bipolo passivo (convenzione standard).



Vale la pena notare che spesso è lo stesso costruttore a fornire la caratteristica statica del bipolo. In ogni caso, per determinare questa caratteristica si può far ricorso ad un metodo semplice: avendo a disposizione un opportuno 'generatore' elettrico che consenta di fissare ad arbitrio, almeno entro certi limiti, il valore della tensione applicata al bipolo, oppure della corrente che lo attraversa, si colleghi un amperometro ed un voltmetro al bipolo, come mostrato in Figura 4.1, nella quale non è indicato, per semplicità, il generatore di cui si parlava e che consente la circolazione della corrente nel bipolo. L'amperometro indicherà il valore di corrente che circola, il voltmetro misurerà la tensione ai suoi capi. In tal modo è possibile, almeno per alcune condizioni di funzionamento, eseguire il rilievo della caratteristica statica del bipolo in esame.

• **Cosa cambia se, per lo stesso bipolo passivo, è stata fatta la convenzione del generatore, invece che quella dell'utilizzatore?**

È semplice: la caratteristica statica deve essere, questa volta, interamente contenuta nel secondo e quarto quadrante, poiché la potenza elettrica assorbita è data, questa volta, da

$$P_{ASS} = -VI.$$

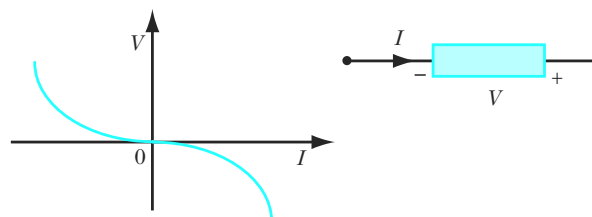
Ora, dovendo essere, per un bipolo passivo, in ogni caso

$$P_{ASS} \geq 0,$$

si conclude che la tensione V e la corrente I hanno sempre segno opposto. Tutto ciò è riassunto in Figura 4.2.

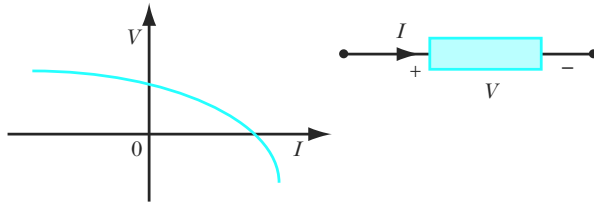
FIGURA 4.2 ►

Caratteristica statica di un bipolo passivo (convenzione non standard).



• **Quando è che, invece, un bipolo è attivo?**

Un bipolo è attivo se esso non è passivo. Infatti, si dirà che un bipolo è attivo quando esiste almeno un tratto della sua caratteristica per cui la potenza elettrica erogata è positiva, oppure, equivalentemente, la potenza elettrica assorbita è negativa.



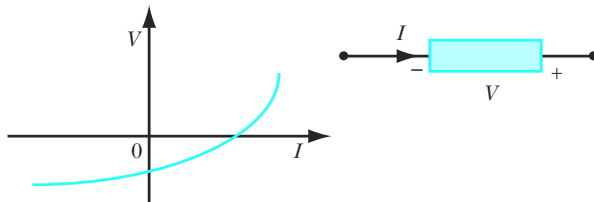
◀ FIGURA 4.3

Un esempio di bipolo attivo (convenzione standard).

Ciò vuol dire che, se si adottasse la convenzione dell'utilizzatore, la caratteristica non potrebbe essere interamente contenuta nel primo e terzo quadrante, ma deve esistere un tratto che passa o per il secondo, o per il quarto quadrante. Nel secondo e quarto quadrante, infatti, la potenza assorbita risulta negativa: ciò vuol dire che, in questi punti, il bipolo sta erogando energia elettrica al resto della rete. Per il bipolo mostrato in Figura 4.3, sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore, esiste un tratto della caratteristica, quello dei valori negativi delle correnti, contenuto nel secondo quadrante.

• **Che cosa succede se, per lo stesso bipolo attivo, viene fatta la convenzione del generatore?**

Una semplice riflessione suggerirà la corretta risposta: la caratteristica statica non deve essere interamente contenuta nel secondo e quarto quadrante, ma ci può essere qualche tratto anche nel primo e terzo quadrante. Queste considerazioni sono mostrate in Figura 4.4.



◀ FIGURA 4.4

Un esempio di bipolo attivo (convenzione non standard).

Per convincersi, si ricordi che, con la convenzione del generatore, la potenza elettrica assorbita vale

$$P_{ASS} = -VI.$$

mentre quella erogata è pari a

$$P_{ERO} = +VI.$$

Il caso più semplice che si può immaginare è quello in cui un tale bipolo presenti sempre la stessa d.d.p. ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente che il bipolo 'eroga'. Un bipolo di questo tipo prende il nome di *generatore ideale di tensione*. La sua caratteristica può essere scritta molto semplicemente, dopo aver compiuto le operazioni 'di rito' sul bipolo, vale dire aver deciso di fare la convenzione del generatore ai suoi capi ed aver indicato in qualche modo la corrispondente tensione. La caratteristica è, infatti, semplicemente del tipo

$$V = E,$$

dove E è un numero, espresso in volt e fornito dal costruttore, che può essere positivo o negativo, e prende anche il nome di forza elettromotrice (f.e.m.) del generatore. Ad esempio, per la batteria dell'auto, E è di solito 12 volt. Si nota che un tale bipolo è certamente attivo, ma eroga una potenza elettrica positiva

$$P_{ERO} = +EI,$$

soltanto nel tratto della sua caratteristica che si trova nel primo quadrante, perché ivi risulta

$$E > 0, I > 0 \rightarrow EI > 0.$$

Nel secondo quadrante, invece, risulta

$$E > 0, I < 0 \rightarrow P_{ERO} = EI < 0$$

ed il bipolo, in queste condizioni, pur essendo attivo, assorbe potenza elettrica positiva, e non funziona da 'erogatore di energia', bensì da 'assorbitore', o meglio 'utilizzatore' di energia elettrica.

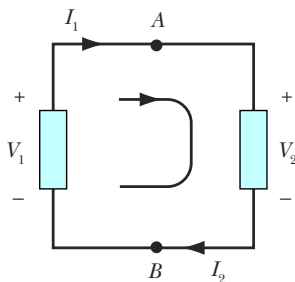
Un caso del tutto analogo è quello del bipolo che per qualsiasi valore della tensione ai morsetti eroga sempre la stessa corrente I_0 . È naturale chiamare un tale bipolo *generatore ideale di corrente*. La caratteristica di un generatore ideale di corrente è quindi del tipo

$$I = I_0,$$

dove I è la corrente indicata ad arbitrio nel bipolo ed I_0 è un numero, espresso in amperes e fornito solitamente dal costruttore, che può essere positivo oppure negativo.

Sono stati in tal modo introdotti in condizioni stazionarie i due tipi di generatori, le cui definizioni vengono qui di seguito riassunte.

- Il generatore ideale di tensione è caratterizzato da un solo numero: la sua d.d.p. ai morsetti, E , indicata esplicitamente nel simbolo, che può essere positiva o negativa e deve essere il costruttore a specificarla. Si noti che, invece, a seconda del circuito in cui è inserito, la corrente erogata da uno stesso assegnato generatore può essere tanto maggiore che minore di zero.
- Il generatore ideale di corrente è caratterizzato anch'esso da un unico numero I_0 , esplicitamente indicato nel simbolo: la corrente erogata può essere positiva o negativa e sarà il costruttore a fornire questa specifica. Si noti che, invece, la tensione ai morsetti dello stesso generatore può essere maggiore o minore di zero, a seconda del circuito in cui è inserito.



▲ FIGURA 4.5

Semplice circuito costituito da due bipoli.

Alla luce delle definizioni date di bipolo attivo e passivo, si prenda in esame il semplice circuito di Figura 4.5: esso è costituito da due bipoli, due nodi ed una sola maglia. Ciascun bipolo è stato etichettato secondo le due operazioni di rito: su ciascuno sono stati riportati i segni '+' e '-' per la tensione ed è stato stabilito un verso arbitrario per le due correnti. Vale la pena notare che per il primo bipolo è stata fatta la convenzione del generatore, per il secondo quella dell'utilizzatore. Scrivendo la LKC al nodo A, si trova subito che

$$I_2 - I_1 = 0 \rightarrow I_2 = I_1.$$

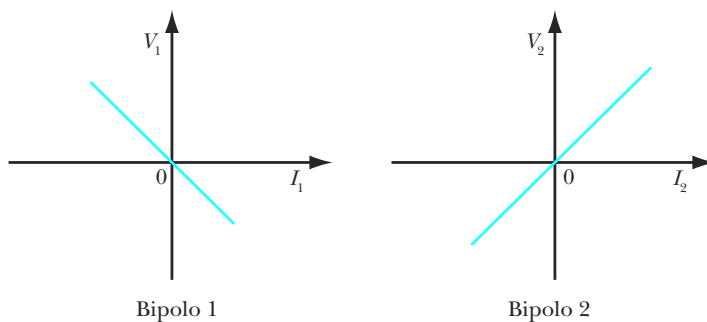
Se si prova, poi, ad applicare la stessa legge al nodo B, si giunge alla stessa conclusione: le due correnti sono uguali. Applicando, allora, la LKT all'unica maglia che costituisce il circuito, si ha che

$$V_{AB} + V_{BA} = 0 \rightarrow V_2 = V_1.$$

In sostanza, le due leggi di Kirchhoff, indipendentemente dalla natura dei bipoli 1 e 2, impongono che il circuito funzioni in maniera tale che le correnti che circolano attraverso i due bipoli e le rispettive tensioni siano uguali. Per sapere, tuttavia, quanto valgono queste correnti e tensioni, è necessario aggiungere informazioni relative ai due bipoli: ‘chi sono’ o, più precisamente, quali legami intercorrono tra la tensione e la corrente di ciascun lato. Bisogna, in ultima analisi, assegnare le caratteristiche dei due bipoli.

Ricordando che per il bipolo 1 è stata fatta la convenzione del generatore e per il bipolo 2 quella dell’utente, si cominci ad assegnare le due caratteristiche mostrate in Figura 4.6. Esse indicano che si sono scelti due bipoli passivi: la caratteristica del primo, infatti, è tutta contenuta nel secondo e quarto quadrante, quella del secondo, nel primo e terzo. Ora, le LK impongono che, per funzionare, il circuito deve realizzare le condizioni

$$V_1 = V_2, \quad I_1 = I_2.$$



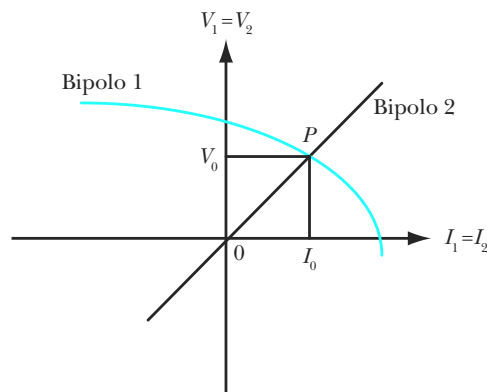
◀ FIGURA 4.6

Una possibile scelta delle caratteristiche dei due bipoli.

Ciò comporta che, se si sovrappongono le due caratteristiche, il circuito funzionerà nel punto in cui esse si incontrano. Nell’esempio, si tratta dell’origine degli assi ed il circuito funzionerà per i seguenti valori di corrente e tensione:

$$V_1 = V_2 = 0, \quad I_1 = I_2 = 0.$$

C’era da aspettarselo: nella rete vi sono due bipoli passivi, capaci soltanto di assorbire energia elettrica, e mancano bipoli attivi. Come avrebbe potuto circolare una corrente, oppure instaurarsi una tensione ai capi dei bipoli, se nessun elemento fornisce energia elettrica?



◀ FIGURA 4.7

Un’altra possibile scelta delle caratteristiche dei due bipoli.

Per fare in modo che le due caratteristiche si incontrino in un punto diverso dall’origine degli assi, è necessario che almeno uno dei due bipoli sia attivo. Ad esempio, in Figura 4.7 si è riportato in un solo grafico entrambe le caratteristiche: il bipolo 1 è ora attivo ed il punto *P* di intersezione tra le due caratteristiche, individuato dalle

due coordinate I_0 e V_0 , fornisce i valori di corrente e tensione per i quali il circuito funziona. Il punto P rappresenta il punto di funzionamento, anche detto punto 'di lavoro', della rete.

In conclusione, per ottenere che il punto di funzionamento non sia banale, si dice così quando coincide con l'origine degli assi, è necessario inserire nella rete almeno un bipolo attivo. Ciò peraltro conferma quanto è stato detto all'inizio di questo paragrafo e rafforza un'intuizione che, forse, già preesisteva: in una rete, per quanto grande e complicata, vi devono essere sempre delle parti che forniscono energia elettrica ad altre parti che, in qualche modo, la utilizzano, realizzando in tal modo il compito per cui erano state progettate.

4.2 Circuiti elementari

Prima di mostrare come affrontare lo studio di circuiti complessi, è utile prendere in esame qualche semplice esempio di circuito elettrico che possa essere studiato molto facilmente, per familiarizzare anche con queste soluzioni veloci.

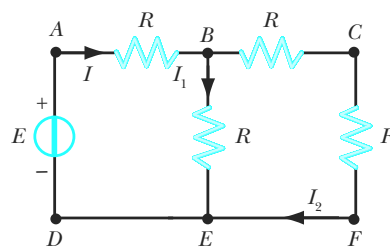
Il primo esempio consiste nella ricerca delle correnti che fluiscono nei rami di un circuito, sfruttando, per semplificare i calcoli, la regola del partitore di corrente.

ESEMPIO 4.1

Si determinino le correnti nel circuito di figura.

DATI:

$$E = 10, R = 2 \text{ k}\Omega.$$



Si vogliono determinare le correnti nei vari rami secondo le orientazioni, peraltro arbitrarie, indicate. Le resistenze dei rami BC e CF sono in serie e, pertanto, possono essere ricondotte ad un unico resistore equivalente di valore $2R$; questa nuova resistenza è, poi, in parallelo con quella del ramo BE . Ancora una volta è opportuno sottolineare il fatto che la corrente che passa per i rami ED , DA ed AB , così come nei rami EF , FC e CB , è la stessa essendo rami in serie: pertanto, essa verrà riportata una sola volta sullo schema della rete.

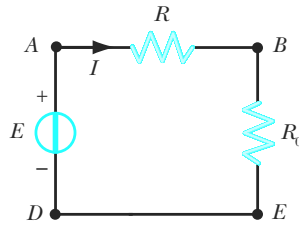
È chiaro che, una volta nota la corrente I , risulta semplice determinare le correnti I_1 e I_2 adoperando la regola del partitore di corrente, secondo le formule:

$$I_1 = I \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3} I, \quad I_2 = I \frac{R}{2R+R} = \frac{1}{3} I.$$

Il problema è trovare la corrente I . Adoperando la resistenza equivalente vista dai morsetti BE

$$R_0 = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3} R = \frac{4}{3} \text{ k}\Omega,$$

la rete può semplificarsi nello schema riportato nella figura che segue.



È, dunque, possibile determinare la corrente

$$I = \frac{E}{R + R_0} = \frac{3E}{5R} = 3 \text{ mA},$$

e, da essa, le correnti I_1 ed I_2

$$I_1 = \frac{2}{3} I = 2 \text{ mA}, \quad I_2 = \frac{1}{3} I = 1 \text{ mA}.$$

Le tensioni su tutti i rami della rete si ricavano facilmente, una volta note le correnti (si riguardi la rete originaria):

$$V_{AD} = E = 10, \quad V_{AB} = RI = 6, \quad V_{BD} = RI_1 = 4, \\ V_{BC} = RI_2 = 2, \quad V_{CD} = R I_2 = 2.$$

È interessante controllare i risultati ottenuti verificando le leggi di Kirchhoff per tutti i nodi e le maglie della rete. Nei due nodi della rete la LKC stabilisce che

$$I = I_1 + I_2 = (2 + 1) \text{ mA} = 3 \text{ mA}.$$

Si verifichi, poi, la LKT per tutte le maglie della rete, immaginando di esprimere in volt tutte le tensioni:

– maglia A - B - D - generatore

$$V_{AB} + V_{BD} + V_{DA} = 6 + 4 - 10 = 0;$$

– maglia B - C - D

$$V_{BC} + V_{CD} + V_{DB} = 2 + 2 - 4 = 0;$$

– maglia A - B - C - D - generatore

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 6 + 2 + 2 - 10 = 0.$$

Avendo controllato i risultati ottenuti, si può essere sicuri di aver risolto bene la rete ed è possibile controllare la *conservazione della potenza elettrica*. Per fare ciò, si valuti la potenza assorbita da ciascun resistore

$$P_{AB} = RI^2 = 18 \text{ mW}, \quad P_{BC} = RI_2^2 = 2 \text{ mW}, \\ P_{CD} = RI_2^2 = 2 \text{ mW}, \quad P_{BD} = RI_1^2 = 8 \text{ mW},$$

e la potenza erogata dal generatore di tensione

$$P_E = EI = 30 \text{ mW}.$$

Ebbene, il teorema di conservazione della potenza elettrica stabilisce che la potenza erogata dal generatore è pari alla somma di quelle assorbite dai resistori. Si può verificare la validità dell'affermazione fatta per il circuito esaminato controllando che la potenza erogata dal generatore di tensione è pari proprio

alla somma delle potenze assorbite da tutti i resistori, vale a dire

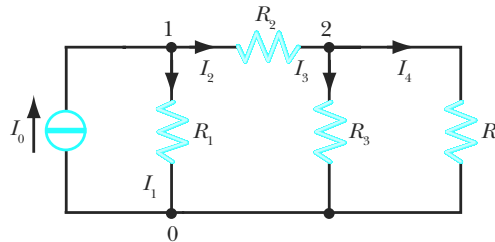
$$P_E = P_{AB} + P_{BC} + P_{CD} + P_{BD} = 30 \text{ mW}.$$

Il secondo esempio presentato verrà risolto facendo sempre uso della regola del partitore di corrente.

ESEMPIO 4.2

Si calcoli la potenza assorbita dal resistore R_4 .

DATI: $I_0 = 10$, $R_1 = 16$, $R_2 = 1.6$, $R_3 = 4$, $R_4 = 6$.



La potenza assorbita dal resistore R_4 è data dalla relazione

$$P_4 = R_4 I_4^2.$$

Per calcolarla, è sufficiente, dunque, trovare la sola corrente I_4 . Non vi è dubbio che questa corrente sia collegata alla corrente I_2 che alimenta il 'cappio' formato dal parallelo delle resistenze R_3 e R_4 ; applicando la regola del partitore di corrente, non è difficile scrivere che

$$I_4 = I_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{2}{5} I_2.$$

Anche la corrente I_2 è una parte della corrente erogata dal generatore I_0 , il quale deve alimentare il parallelo tra R_1 e R_2

$$R = R_2 + R_3 \parallel R_4 = \frac{8}{5} + \frac{24}{10} = 4.$$

Pertanto, applicando una seconda volta la regola del partitore, si ottiene

$$I_2 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R} = \frac{4}{5} I_0 = 8.$$

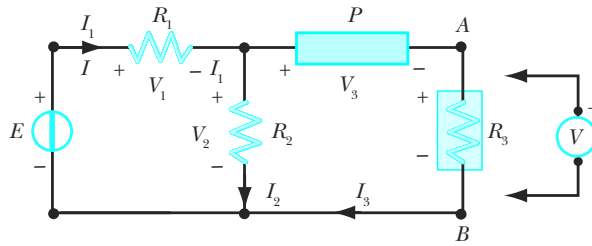
Sostituendo questo valore nell'espressione della corrente I_4 , risulta $I_4 = 3.2$, ovvero

$$P_4 = R_4 I_4^2 = 61.44.$$

ESEMPIO 4.3

Si calcoli la tensione E sapendo che il voltmetro indica una tensione pari a $V_{AB} = 100$.

DATI: $R_1 = 5$, $R_2 = 10$, $R_3 = 5$, $P = 2 \text{ kW}$ (assorbita).



La lettura della tensione ai capi della resistenza R_3 , eseguita per mezzo del voltmetro, in cui il segno '+' indica il verso di riferimento per la tensione indicata dal voltmetro, consente di calcolare la corrente che passa attraverso questa resistenza che, per la legge di Ohm, vale

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = 20.$$

Il 'carico' (indicare un bipolo generico con il nome di carico è un gergo molto usato tra gli elettrotecnici) in serie a R_3 , indicato graficamente con un bipolo non meglio specificato, assorbe una potenza pari a P . Questa informazione fornisce anche la tensione V_3 , come risulta dall'espressione

$$V_3 = \frac{P}{I_3} = 100.$$

Quali maglie cui applicare la LKT si adopereranno i due anelli che costituiscono la rete, cioè la maglia $E - R_1 - R_2$ e l'altra $R_2 - \text{carico} - R_3$.

L'applicazione della legge di Kirchhoff per le tensioni alla seconda maglia della rete consente di scrivere la relazione

$$V_2 = V_3 + V_{AB} = 100 + 100 = 200.$$

Dunque, ancora la legge di Ohm fornisce la corrente I_2

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = 20.$$

Infine, la legge di Kirchhoff per le correnti, applicata ad uno qualunque dei due nodi della rete, stabilisce che

$$I_1 = I_2 + I_3 = 40.$$

La tensione V_1 risulta, allora, pari a

$$V_1 = R_1 I_1 = 200,$$

e da questo valore discende, applicando la LKT alla prima maglia della rete, la tensione incognita del generatore

$$E = V_1 + V_2 = 400.$$

Si noti come su tutti i resistori della rete è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore, mentre per il generatore di tensione si è adottata la convenzione del generatore, ma questo non era affatto obbligatorio: è soltanto comodo.

4.3 Sovrapposizione degli effetti

In questo paragrafo verrà introdotto un metodo molto semplice, generale e potente per facilitare la risoluzione dei sistemi di equazioni *lineari*. Come si mostrerà, si tratta di un metodo che può essere applicato sempre: non soltanto nella Teoria dei Circuiti, ma in qualsiasi altro campo in cui ci sia da risolvere un sistema di equazioni, purché lineari. Il paragrafo costituisce, quindi, una breve parentesi matematica che, si spera, riuscirà facilissima da ... digerire.

Si consideri, per rendere concrete le idee, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 2y = 20. \end{cases}$$

Per risolverlo, adoperando il metodo di sostituzione, si ricava immediatamente che la soluzione è

$$x = 6, \quad y = -7.$$

Si può controllare la correttezza di questo risultato sostituendo i valori trovati nel sistema di partenza. Il procedimento seguito è quello che, con molta probabilità, viene usualmente adoperato quando si è chiamati a risolvere un sistema di equazioni lineari, costituito da non molte equazioni.

Si vuole qui proporre un altro metodo, un po' diverso, ma che, in molti casi, semplifica l'analisi delle reti elettriche. Il nuovo metodo funziona così: a partire dal sistema assegnato, se ne costruiscano due, in tutto uguali a quello di partenza, tranne che per i termini noti

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 5, \\ x_1 - 2y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 + y_2 = 0, \\ x_2 - 2y_2 = 20. \end{cases}$$

Primo sistema Secondo sistema

Per distinguere i due sistemi, si è aggiunto ad x ed y il pedice 1 per il primo sistema ed il pedice 2 per il secondo. Questi due sistemi sono caratterizzati dal fatto che il termine noto, che figura nella seconda equazione del primo sistema, è nullo e che, inoltre, il termine noto che appare nella prima equazione del secondo sistema è nullo, mentre gli altri termini noti sono quelli di partenza: il tutto risulta più facile a capirsi, guardando i due sistemi, che non a dirsi a parole. Se si prova a risolvere il primo sistema, si otterrà rapidamente

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1.$$

Analogamente, per il secondo sistema, si troverà

$$x_2 = 4, \quad y_2 = -8.$$

A questo punto, se si sommano le due soluzioni così trovate, si otterrà subito che

$$x_1 + x_2 = 2 + 4 = 6, \quad y_1 + y_2 = 1 - 8 = -7.$$

La conclusione è che $x = 6$ ed $y = -7$ rappresentano proprio la soluzione del sistema di partenza!

Il metodo può essere esteso subito al caso generale di un sistema di N equazioni in N incognite: occorrerà risolvere, però, N sistemi ciascuno dei quali abbia un solo termine noto diverso da zero e tutti gli altri nulli ed, alla fine, sommare le N soluzioni così ottenute. La loro somma darà la soluzione del sistema di partenza.



Luigi Verolino

Elementi di Reti Elettriche

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

