



Modellistica, Simulazione, Analisi,
Controllo e Tecnologie dei Sistemi Dinamici

Elementi di Controlli Automatici

Volume III

ELEMENTI DI
CONTROLLI AUTOMATICI

ELEMENTI DI
CONTROLLI AUTOMATICI

ELEMENTI DI
CONTROLLI AUTOMATICI

GIOVANNI CELENTANO

LAURA CELENTANO

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Facoltà di Ingegneria

MODELLISTICA, SIMULAZIONE, ANALISI,
CONTROLLO E TECNOLOGIE DEI SISTEMI DINAMICI

ELEMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI

VOL. III

Giovanni Celentano / Laura Celentano
Modellistica, Simulazione, Analisi, Controllo e Tecnologie dei Sistemi Dinamici
Elementi di Controlli Automatici – Vol. III
Copyright © 2015, EdiSES srl - Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2019 2018 2017 2016 2015

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo

L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES srl – Napoli

Stampato presso la: Officine grafiche Giannini - Napoli

Per conto della:

EdiSES srl – Piazza Dante 89 – 80135 Napoli
Tel. 081/7441706-07 Fax. 081/7441705

ISBN 978 88 7959 885 9

<http://www.edises.it>

E-mail: info@edises.it

Prefazione

Nonostante l'intensa attività di ricerca sui temi dell'automatica sviluppatasi negli ultimi decenni, la quasi totalità dei libri di testo di Controlli Automatici continua a dare molto peso ai sistemi di controllo SISO con riferimenti polinomiali e/o sinusoidali e con specifiche di progetto prevalentemente sull'errore a regime, sulla banda passante e sul margine di fase e/o di guadagno.

Inoltre, si considerano per lo più controllori costituiti da uno o due integratori con in serie reti correttive aventi poli e zeri reali negativi.

Per quanto concerne i controllori industriali, molto ricorrenti nella pratica ingegneristica, ci si limita quasi sempre ai controllori di tipo PID progettati secondo le tecniche classiche o mediante semplici regole empiriche, che in alcuni casi non garantiscono neanche la stabilità del sistema di controllo.

Inoltre, nella maggior parte di tali testi, si predilige l'approccio metodologico, con esempi astratti, rispetto a quello operativo, indispensabile per la formazione di un ingegnere e per indirizzare un ricercatore verso risultati innovativi e utili.

Un ricercatore dovrebbe partire da problemi concreti e non, viceversa, risolvere alcuni degli infiniti problemi matematici, che ammettono una qualche soluzione analitica, magari facendo delle ipotesi ad hoc, e poi sforzarsi di trovare "falsamente" un'applicazione dei risultati ottenuti, alimentando in tal modo infinite spirali.

Gli autori fanno notare che:

- se l'errore di controllo è in banda non è detto che tale errore risulti minore del 29%, ma può essere anche del 171%;
- la classe dei controllori che usano reti correttive con poli e zeri reali negativi è limitativa;
- al tempo d'oggi si cerca di forzare, sempre più, sistemi (si pensi ai numerosi sistemi manifatturieri, in particolare ai sistemi robotici, ai sistemi di trasporto, ecc.) a seguire riferimenti con andamenti qualsiasi, purché sufficientemente regolari (ad esempio, quelli generalmente continui e lineari a tratti, molto ricorrenti nella pratica ingegneristica e facilmente generabili mediante tecnologie digitali);
- molti sistemi meccanici, elettrici, elettromeccanici, termici, chimici, biologici, medicali, ecc., integrati con sistemi digitali, presentano ritardi interni ed esterni non trascurabili, variazioni parametriche non facilmente riconducibili a variazioni di fase e/o di ampiezza della risposta in frequenza e disturbi e/o non linearità limitate o con derivate limitate.

Sulla base delle considerazioni di cui sopra, gli autori hanno sviluppato diverse metodologie di progetto, alcune non ancora pubblicate, di controllori robusti di sistemi lineari e non lineari incerti SISO e MIMO continui e discreti con ritardi interni ed esterni e con riferimenti e disturbi non convenzionali.

Hanno deciso, pertanto, di scrivere un primo testo molto sintetico, ma completo per quanto riguarda la teoria classica del controllo, che riporta anche alcuni di tali risultati innovativi, fornendo una parziale risposta alle limitazioni messe in evidenza.

Il libro è composto dai seguenti dodici capitoli: 1. Introduzione e schemi di controllo; 2. Specifiche di progetto; 3. Risultati preliminari sulle tecniche di progetto; 4. Parametri caratteristici e legami globali di un sistema di controllo; 5. Progetto con il luogo delle radici ; 6. Progetto nel dominio della frequenza; 7. Sintesi modale; 8. Progetto di un controllore per l'inseguimento di un riferimento qualsiasi con velocità limitata; 9. Controllori a relè; 10. Controllori PID; 11. Sistemi di controllo non lineari; 12. Controllori fuzzy.

Alcuni elementi innovativi di tale testo riguardano:

- l'introduzione di nuovi parametri globali, quali la banda di inseguimento e la costante di guadagno generalizzata;
- l'introduzione del sistema maggiorante;
- nuovi legami globali analitici e grafici;
- la progettazione di controllori in grado di costringere un sistema a seguire, con prefissato errore massimo ed a partire da un prefissato istante di tempo, un qualsiasi riferimento con derivata (variazione se discreto) limitata, anche in presenza di un disturbo generico anch'esso con derivata (variazione) limitata;
- la progettazione rapida di controllori robusti PID e non solo, basata su rigorosi e innovativi teoremi, di sistemi lineari con ritardi interni ed esterni, sia a partire da un loro modello matematico che a partire da semplici prove sperimentali.

Tali tecniche di progettazione sono alla portata di qualsiasi ingegnere e tecnico delle aree dell'informazione e industriale e, molto probabilmente, sono destinate a soppiantare quelle storiche basate su regole empiriche.

I concetti più importanti sono illustrati con numerosi esempi realistici, alcuni sviluppati con nuovi programmi Matlab di utilità generale per gli studenti, gli ingegneri e i ricercatori.

La copertina del libro è ispirata ed illustra alcuni risultati presentati nel Capitolo 8.

Per una più rapida e democratica fruibilità dei risultati presentati in questo testo, si è scelto di pubblicarlo in formato *ebook* e di rinunciare ai brevetti ed alle pubblicazioni scientifiche ad esso correlati.

Tenendo presente i numerosi esempi completamente sviluppati (66), le numerosissime figure illustrate (358), l'evidenziatura dei concetti fondamentali, si intuisce come il testo sia di rapida consultazione e di grande aiuto per apprendere in tempi brevi alcuni importanti concetti di base della teoria del controllo sia classica che moderna.

Tale testo sarà a breve integrato con nuovi risultati che consentono di progettare controllori robusti in grado di costringere un dato sistema appartenente alla classe dei sistemi pseudo quadratici incerti (comprendente chiaramente i sistemi lineari incerti), sia continui che discreti, sia SISO che MIMO, a seguire, con prefissato errore massimo ed a partire da un prefissato istante di tempo, un qualsiasi riferimento con derivata (variazione se discreto) limitata, anche in presenza di un disturbo generico anch'esso con derivata (variazione) limitata.

Gli autori saranno grati a tutti coloro che vorranno comunicare osservazioni e suggerimenti per migliorare il testo.

Giovanni Celentano

Laura Celentano

INDICE DEI CONTENUTI

Cap. 1 – Introduzione e schemi di controllo	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Schema di controllo a ciclo o ad anello aperto	1
1.3 Schema di controllo a ciclo o ad anello chiuso	2
Cap. 2 – Specifiche di progetto	9
2.1 Classe funzionale dei segnali di riferimento	9
2.2 Classe funzionale dei segnali di disturbo	10
2.3 Specifiche sul segnale di errore	10
2.4 Specifiche sul segnale di controllo	11
Cap. 3 – Risultati preliminari sulle tecniche di progetto	13
3.1 Funzioni sensitività	13
3.2 Precisione a regime e tipo di un sistema	14
3.3 Stabilità asintotica a ciclo chiuso	21
Cap. 4 – Parametri caratteristici e legami globali di un sistema di controllo	27
4.1 Parametri caratteristici	27
4.2 Legami globali	29
4.3 Sistemi positivi esternamente	41
Cap. 5 – Progetto con il luogo delle radici	47
5.1 Il luogo delle radici	47
5.2 Principali tipi di processi e di controllori	51
5.3 Linee guida per il progetto di un controllore con il luogo delle radici	52
Cap. 6 – Progetto nel dominio della frequenza	87
6.1 Il criterio di Nyquist	87
6.2 Margini di stabilità e carta di Nichols	96
6.3 Progetto mediante i diagrammi di Nichols e/o di Bode	104
6.3.1 Algoritmo di progetto di un controllore nel dominio della frequenza	109
Cap. 7 – Sintesi modale	137
7.1 Sintesi mediante compensatore	137
7.2 Sintesi mediante reazione di stato	147
7.3 Sintesi del controllore ottimo	151
7.4 Sintesi mediante osservatore o filtro di Kalman	153
7.5 Un parametro di robustezza della stabilità e/o della velocità di risposta	164
Cap. 8 – Progetto di un controllore per l'inseguimento di un riferimento qualsiasi con velocità limitata	167
8.1 Formulazione del problema e risultati preliminari	167
8.2 Risultati fondamentali	172
Cap. 9 – Controllori a relè	191
9.1 Generalità sui controllori industriali	191
9.2 I controllori a relè	191

Cap. 10 – Controllori PID	211
10.1 Introduzione	211
10.2 Progetto di un controllore PD di un processo del secondo ordine senza zeri	213
10.3 Progetto di un controllore PID di un processo del secondo ordine senza zeri	214
10.4 Progettazione rapida dei controllori PID	220
10.4.1 Sistemi maggioranti	220
10.4.2 Determinazione sperimentale di un sistema maggiorante	231
10.4.3 Sistemi di controllo maggioranti di riferimento	236
10.4.4 Tecniche di progettazione rapida dei controllori	240
10.4.5 Tecniche di progettazione rapida dei controllori I, PI, PID e PIDR	241
10.4.6 Discretizzazione dei controllori PID	265
10.4.7 Desaturazione dell’azione integrale	273
Cap. 11 – Sistemi di controllo non lineari	279
11.1 Introduzione	279
11.2 Sistemi con nonlinearità additiva limitata	279
11.3 Stabilità assoluta e criteri di Popov	281
11.4 Metodo della funzione descrittiva	291
Cap. 12 – Controllori fuzzy	309
12.1 Introduzione	309
12.2 Regole di controllo fuzzy	311
Bibliografia	317

Capitolo 8

Progetto di un controllore per l'inseguimento di un riferimento qualsiasi con velocità limitata

I risultati precedenti consentono di progettare controllori di processi e impianti che *assicurano, a regime, l'inseguimento, con prefissato errore, di riferimenti di tipo polinomiale e/o sinusoidale ma non di riferimenti generici.*

Poiché al tempo d'oggi si cerca di forzare, sempre più, sistemi (si pensi ai numerosi sistemi manifatturieri, in particolare ai sistemi robotici, ai sistemi di trasporto, ecc.) a seguire riferimenti con andamenti qualsiasi, purché sufficientemente regolari (ad esempio quelli generalmente continui e lineari a tratti, molto ricorrenti nella pratica e facilmente generabili mediante tecnologie digitali), sono sicuramente molto utili per la comunità scientifica ed ingegneristica nuovi risultati teorici per la progettazione di sistemi di controllo con riferimenti e/o disturbi non convenzionali e/o con specifiche sempre più stringenti.

In [12], [13], [16] sono forniti dei nuovi teoremi che consentono di progettare controllori robusti in grado di costringere un dato sistema appartenente a classi di sistemi sufficientemente generali, sia continui che discreti, sia SISO che MIMO, pseudo quadratici incerti (comprendenti chiaramente i sistemi lineari *incerti*) a seguire, con prefissato errore massimo ed a partire da un prefissato istante di tempo, un qualsiasi riferimento con derivata (variazione se discreto) limitata, anche in presenza di un disturbo generico anch'esso con derivata (variazione) limitata.

In seguito, per brevità, verranno presentati in forma sintetica solo alcuni di tali risultati.

8.1. Formulazione del problema e risultati preliminari

Si consideri il processo lineare e stazionario SISO di ordine n descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + d, \quad (228)$$

ove $x \in R^n$ è lo stato, $u \in R^r$ è il segnale di controllo, $d \in R^l$ è il segnale di disturbo e $y \in R^m$ è l'uscita.

Per il caso più generale di processo MIMO *incerto* descritto da:

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t) + E(p)d(t), \quad y(t) = C(p)x(t) + D(p)d(t), \quad (229)$$

ove $x(t) \in R^n$ è lo stato, $u(t) \in R^r$ è il segnale di controllo, $d(t) \in R^l$ è il disturbo, $y(t) \in R^m$ è l'uscita e $A(p), B(p), E(p), C(p), D(p)$ sono matrici, di appropriate dimensioni, funzioni del vettore dei parametri incerti $p \in \varphi$, si consulti [12].

Si supponga che il processo (228) sia senza zeri e senza poli nell'origine, sia completamente controllabile e che lo stato sia misurabile.

Si supponga, inoltre, che il disturbo d ed il segnale di riferimento r da inseguire abbiano derivata prima limitata (cfr. [Figura 180](#)).

Si vuole progettare un controllore lineare e stazionario tale che il sistema controllato sia di tipo uno e, nell'ipotesi che lo stato iniziale del sistema di controllo sia nullo e che $r(0) - d(0) = 0$, l'errore di inseguimento $e(t)$ soddisfi la relazione

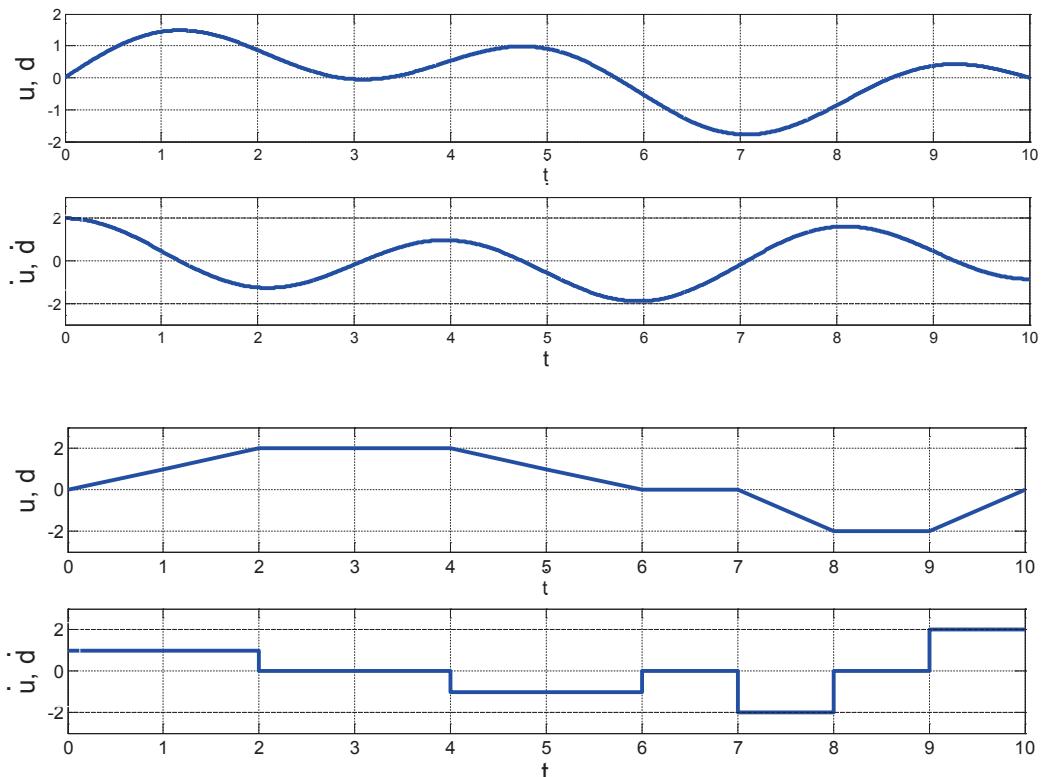


Figura 180. Possibili segnali di riferimento o di disturbo con derivata limitata

$$|e(t)| \leq \frac{1}{H_v} \mu_{\dot{r}-\dot{d}} \left(\geq \frac{1}{K_v} \mu_{\dot{r}-\dot{d}} \right), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall r(t), d(t): \max_{\sigma \in [0, t]} |\dot{r}(\sigma) - \dot{d}(\sigma)| \leq \mu_{\dot{r}-\dot{d}}, \quad (230)$$

con costante H_v preassegnata, detta **costante di guadagno generalizzata** (del primo ordine).

Osservazione 17. Chiaramente, se lo stato iniziale del sistema di controllo non è nullo e/o $r(0) - d(0) \neq 0$, l'errore $e(t)$ nella (230) va considerato a meno di una “evoluzione libera”, la cui durata pratica può essere resa minore di un preassegnato tempo di assestamento t_a , come sarà mostrato in seguito.

Inoltre, se il disturbo d non agisce direttamente sull'uscita y , detto y_d il suo effetto sull'uscita, nella (230) \dot{d} deve essere sostituito con \dot{y}_d .

Osservazione 18. Si noti che, se $r(t)$ è il riferimento di un sistema di produzione, volendo aumentare di un fattore a la sua velocità di produzione, il riferimento deve essere $r(at)$; di conseguenza $\dot{r}(at)$ diventa a volte più grande ed il suo spettro viene “amplificato” di a . Quindi, per avere la stessa precisione di inseguimento di $r(t)$, è necessario aumentare la costante di guadagno generalizzata H_v . Ciò comporta, come è facile intuire, un aumento dell'azione di controllo e , chiaramente, sono richiesti sensori più precisi ed a banda più larga. Pertanto è di fondamentale importanza, sia per dimensionare l'attuatore sia per valutare se il processo sopporta l'azione di controllo esercitata su di esso dall'attuatore, stimare il valore massimo dell'azione di controllo in funzione del massimo errore di inseguimento desiderato.

Un controllore in grado di soddisfare la specifica (230) (con un grado di libertà aggiuntivo per soddisfare anche qualche altra specifica) può essere il controllore a reazione di stato con azione proporzionale-integrale (PI) (cfr. [Figura 181](#)), anziché con azione integrale (I).

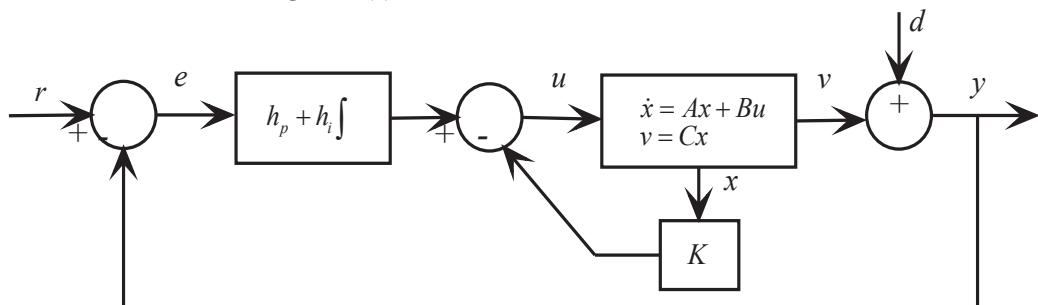


Figura 181. Schema di controllo a reazione di stato con PI

Ponendo

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (231)$$

è facile dimostrare che, nel dominio della variabile s , lo schema di controllo di Figura 181 diventa quello di Figura 182, in cui la relazione tra k_1, k_2, \dots, k_n e K è data da

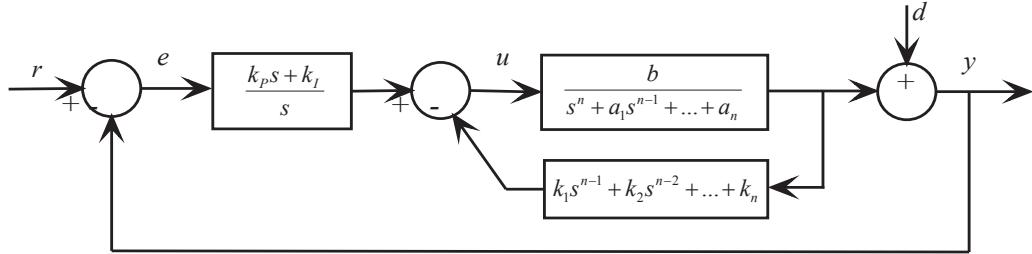


Figura 182. Schema di controllo a reazione di stato con PI nel dominio di Laplace

$$K = [k_n \ k_{n-1} \ \dots \ k_1] \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdot & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} b. \quad (232)$$

Osservazione 19. E' importante notare che, spesso, il modello del processo (228) è già nella corrispondente forma (231) (tale caso, ad esempio, è quello in cui il modello è stato ottenuto per via sperimentale con l'ausilio del comando Matlab invfreqs). Inoltre, si noti che quasi sempre il controllore viene alimentato con un amplificatore di guadagno g_a ; in tal caso bisogna porre $b \leftarrow bg_a$.

Dallo schema di controllo di Figura 182 si ricava facilmente che

$$\begin{aligned} E(s) &= s \frac{s^n + (a_1 + bk_1)s^{n-1} + \dots + (a_n + bk_n)}{s^{n+1} + (a_1 + bk_1)s^n + \dots + (a_n + bk_n + bk_P)s + bk_I} (R(s) - D(s)) = \\ &= S(s)(R(s) - D(s)). \end{aligned} \quad (233)$$

Se si pone

$$d(s) = s^{n+1} + (a_1 + bk_1)s^n + \dots + (a_n + bk_n + bk_P)s + bk_I = s^{n+1} + d_1s^n + \dots + d_ns + d_{n+1}, \quad (234)$$

dalla (233) e notando che la f.d.t. a ciclo aperto vale

$$F(s) = \frac{k_p s + k_I}{s} \frac{b}{s^n + (a_1 + bk_1)s^{n-1} + \dots + (a_n + bk_n)} = \frac{k_p b s + d_{n+1}}{s(s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + h d_n)}, \quad (235)$$

ove

$$h = \frac{a_n + bk_n}{a_n + bk_n + bk_p}, \quad (236)$$

si ha che la funzione sensitività $S(s)$ dell'errore e la costante di guadagno K_v risultano:

$$S(s) = s \frac{s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + h d_n}{s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_n s + d_{n+1}} \quad (237)$$

$$K_v = \frac{d_{n+1}}{h d_n} = \frac{b k_I}{a_n + b k_n}. \quad (238)$$

Inoltre la $W(s)$ vale

$$W(s) = \frac{d_n(1-h)s + d_{n+1}}{s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_n s + d_{n+1}}. \quad (239)$$

Sia ora

$$\bar{d}(s) = s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1} \quad (240)$$

il polinomio avente per radici un preassegnato insieme simmetrico di $n+1$ numeri complessi a parte reale negativa $\bar{P} = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{n+1}\}$ normalizzati in modo che $\prod_{i=1}^{n+1} (-\bar{p}_i) = 1$. Scegliendo i poli P del sistema di controllo pari a $\rho \bar{P}$, con ρ fattore positivo, si ha

$$d(s) = s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_n s + d_{n+1} = s^{n+1} + \rho \bar{d}_1 s^n + \dots + \rho^n \bar{d}_n s + \rho^{n+1} \bar{d}_{n+1}. \quad (241)$$

Detta, inoltre, $s_p(t)$ la risposta impulsiva del sistema con f.d.t.

$$S_p(s) = \frac{1}{s} S(s) = \frac{s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + h d_n}{s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_n s + d_{n+1}}, \quad (242)$$

dalle (233) e (237) si ha

$$|e(t)| \leq \int_0^t |s_p(\tau)| |\ddot{r}(t-\tau) - \dot{d}(t-\tau)| d\tau, \quad s_p(t) = \mathcal{F}^{-1}(S_p(s)), \quad (243)$$

da cui, se tutti i poli di $S_p(s)$ sono a parte reale negativa, si ha

$$|e(t)| \leq \frac{1}{H_v} \delta_{\dot{r}-\dot{d}}, \quad (244)$$

ove

$$H_v = \frac{1}{\int_0^\infty |s_p(\tau)| d\tau}, \quad \delta_{\dot{r}-\dot{d}} = \max_{\sigma \in [0, t]} |\dot{r}(\sigma) - \dot{d}(\sigma)|. \quad (245)$$

Per poter fornire dei metodi per scegliere i poli \bar{P} , ρ ed h e stabilire sotto quale ipotesi la costante di guadagno generalizzata H_v risulta uguale alla costante di guadagno K_v , sono necessari i risultati sui sistemi positivi esternamente stabiliti nel Capitolo 4 e i seguenti risultati preliminari.

Teorema 11. Per un fissato h , siano \bar{s}_h , \bar{t}_{sh} , \bar{t}_{ah} , $\bar{\omega}_{sh}$ la sovraelongazione, il tempo di salita, il tempo di assestamento e la pulsazione di taglio superiore di

$$\bar{W}_h(s) = \frac{\bar{d}_n(1-h)s + \bar{d}_{n+1}}{s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1}} \quad (246)$$

e

$$\bar{K}_{vh} = \frac{\bar{d}_{n+1}}{h\bar{d}_n}, \quad \bar{H}_{vh} = \frac{1}{\int_0^\infty |\bar{s}_{ph}(\tau)| d\tau}, \quad \bar{s}_{ph}(t) = \mathfrak{E}^{-1} \left(\frac{s^n + \bar{d}_1 s^{n-1} + \dots + h\bar{d}_n}{s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1}} \right), \quad (247)$$

allora i corrispondenti valori di $s_h, t_{sh}, t_{ah}, \omega_{sh}, K_{vh}, H_{vh}$ per $\rho \neq 1$ risultano:

$$s_h = \bar{s}_h, \quad t_{sh} = \frac{\bar{t}_{sh}}{\rho}, \quad t_{ah} = \frac{\bar{t}_{ah}}{\rho}, \quad \omega_{sh} = \rho \bar{\omega}_{sh}, \quad K_{vh} = \rho \bar{K}_{vh}, \quad H_{vh} = \rho \bar{H}_{vh}. \quad (248)$$

Dimostrazione. Si può trovare in [16] ■

8.2. Risultati fondamentali

Vale il seguente primo fondamentale risultato.

Teorema 12. Dato il processo (231), si considerino un polinomio

$$\bar{d}(s) = s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1}, \quad (249)$$

avente per radici un preassegnato insieme simmetrico di $n+1$ numeri complessi a parte reale negativa $\bar{P} = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{n+1}\}$ normalizzati in modo che $\prod_{i=1}^{n+1} (-\bar{p}_i) = 1$, un preassegnato fattore $\rho > 0$ ed una preassegnata costante di guadagno $K_v > 0$. Allora, mediante il controllore a reazione di stato con azione PI con:

$$k_i = \frac{\bar{d}_i \rho^i - a_i}{b}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad k_n = \frac{\bar{d}_{n+1} \rho^{n+1}/K_v - a_n}{b} \quad (250)$$

$$k_p = \frac{\bar{d}_n \rho^n}{b} \left(1 - \frac{\bar{d}_{n+1} \rho}{K_v \bar{d}_n} \right), \quad k_I = \frac{\bar{d}_{n+1} \rho^{n+1}}{b}, \quad (251)$$

il sistema di controllo di [Figura 182](#) è di tipo uno con costante di guadagno K_v e poli $P = \rho \bar{P}$.

Inoltre la $W_h(s)$ risulta

$$\begin{aligned} W_h(s) &= \frac{d_n(1-h)s + d_{n+1}}{s^{n+1} + d_1 s^n + \dots + d_n s + d_{n+1}} = \\ &= \frac{\bar{d}_n \rho^n (1-h)s + \bar{d}_{n+1} \rho^{n+1}}{s^{n+1} + \bar{d}_1 \rho s^n + \dots + \bar{d}_n \rho^n + \bar{d}_{n+1} \rho^{n+1}}, \quad h = \frac{\bar{d}_{n+1} \rho}{\bar{d}_n K_v}. \end{aligned} \quad (252)$$

Dimostrazione. Si può trovare in [16] ■

Osservazione 20. Si noti che

$$K_v = \frac{d_{n+1}}{d_n} \frac{1}{h} = \frac{\bar{d}_{n+1}}{\bar{d}_n} \frac{\rho}{h}. \quad (253)$$

Pertanto **con lo schema di controllo proposto è possibile assegnare come si vuole sia i poli del sistema di controllo a ciclo chiuso che la costante di guadagno K_v** . Se $h = 1$ ($\Rightarrow K_v = \bar{d}_{n+1} \rho / \bar{d}_n$) allora l'azione proporzionale k_p è nulla e la $W_h(s)$ non ha zeri, se invece $h < 1$ ($\Rightarrow K_v > \bar{d}_{n+1} \rho / \bar{d}_n$) allora la $W_h(s)$ ha uno zero positivo; infine, se $h > 1$ ($\Rightarrow K_v < \bar{d}_{n+1} \rho / \bar{d}_n$) allora la $W_h(s)$ ha uno zero negativo.

Osservazione 21. Vi sono diversi modi per fissare i poli \bar{P} . Da essi dipendono i parametri caratteristici $s_h, t_{sh}, t_{ah}, w_{sh}$ di $W_h(s)$.

Nella Figura 183 sono riportate le risposte indiciali $\bar{w}_{-1h}(t)$ e in frequenza $M_h(\omega)$ nel caso di impianto da controllare del secondo ordine (sistema di controllo del terzo ordine), $\bar{P} = \{-1, -1+i, -1-i\}/\sqrt[3]{2}$ (poli con τ uguale) ed $h = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

Nelle Figure 184, 185 sono riportate le risposte indiciali $\bar{w}_{-1h}(t)$ per $n=2, 3, 4$ nell'ipotesi di poli di Bessel normalizzati e di poli coincidenti in -1 ed $h = 0.2, 0.5$.

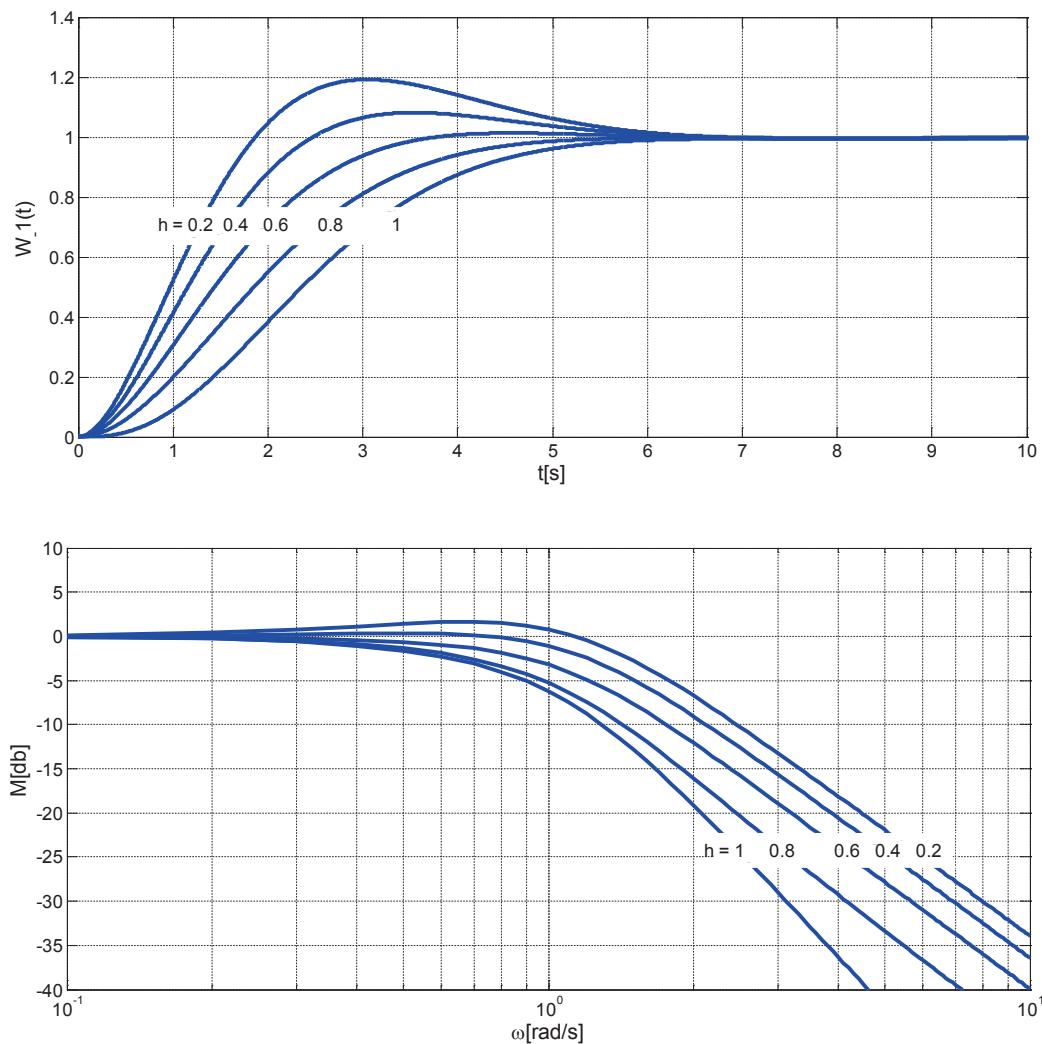


Figura 183. Risposte indiciali e in frequenza per $n+1=3$,
 $\bar{P} = \{-1, -1+i, -1-i\}/\sqrt[3]{2}$ e $h = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

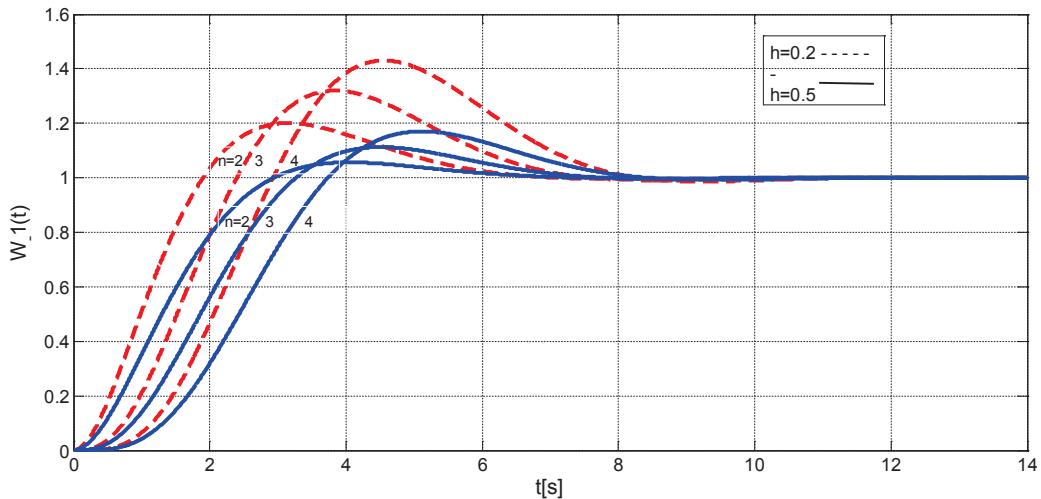


Figura 184. Risposte indiciali per $n+1 = 3, 4, 5$, poli di Bessel normalizzati e $h = 0.2, 0.5$

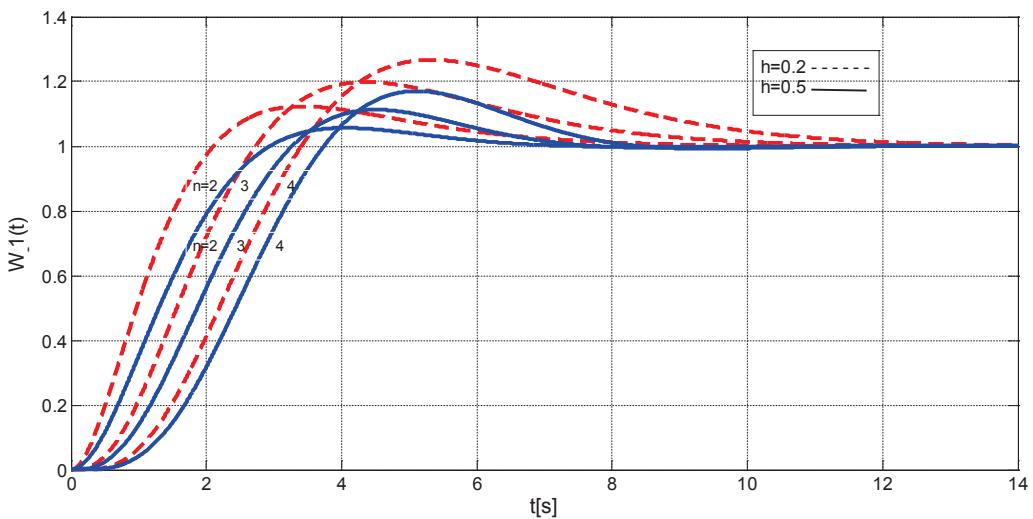


Figura 185. Risposte indiciali per $n+1 = 3, 4, 5$, poli coincidenti in -1 e $h = 0.2, 0.5$

Osservazione 22. Poiché per la (253) $K_{vh} = \frac{\bar{d}_{n+1}}{\bar{d}_n} \frac{\rho}{h}$ si ha che un valore elevato

della costante di guadagno K_v può essere ottenuto sia con un elevato valore di ρ (ciò comporta un elevato valore della banda passante ed elevati valori dei guadagni del controllore) sia con un piccolo valore di h (ciò, per la presenza di uno zero positivo relativamente piccolo, comporta un grande valore della sovraelongazione). Qualora non sia richiesta un'elevata banda passante ma si richiede un valore elevato di K_v , per ridurre la sovraelongazione si può porre in ingresso al sistema di controllo di Figura 181 un prefiltro.

Vale il secondo risultato fondamentale.

Teorema 13. Si consideri il processo (231). Nell'ipotesi che lo stato iniziale del sistema di controllo di Figura 181 (con controllore progettato secondo il Teorema 12) sia nullo e che $r(0) - d(0) = 0$, l'errore d'inseguimento $e(t)$ soddisfa la relazione

$$|e(t)| \leq \frac{1}{H_{vh}} \delta_{\dot{r}-\dot{d}}, \quad \forall t \geq 0, \quad \delta_{\dot{r}-\dot{d}} = \max_{\sigma \in [0, t]} |\dot{r}(\sigma) - \dot{d}(\sigma)|, \quad (254)$$

dove:

$$\begin{aligned} H_{vh} &= \rho \bar{H}_{vh}, \quad \bar{H}_{vh} = \frac{1}{\int_0^\infty |\bar{s}_{ph}(\tau)| d\tau}, \quad \bar{s}_{ph}(t) = \mathfrak{L}^{-1}(\bar{S}_{ph}(s)), \\ \bar{S}_{ph}(s) &= \frac{s^n + \bar{d}_1 s^{n-1} + \dots + h \bar{d}_n}{s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1}}. \end{aligned} \quad (255)$$

Inoltre se nel Teorema 12 i poli \bar{P} vengono scelti in modo che la risposta impulsiva del sistema

$$\bar{W}(s) = \frac{\bar{d}_{n+1}}{s^{n+1} + \bar{d}_1 s^n + \dots + \bar{d}_n s + \bar{d}_{n+1}} \quad (256)$$

è non negativa, ossia se $\bar{W}(s)$ è un sistema positivo esternamente, allora $\forall h \geq 1$

$$\bar{H}_{vh} = \bar{K}_{vh} = \frac{\bar{d}_{n+1}}{h \bar{d}_n}. \quad (257)$$

Dimostrazione. La (254) segue facilmente dalla (244) e dal Teorema 11. Per dimostrare la (257) si noti che

$$\bar{S}_{ph}(s) = \frac{1}{s} (1 - \bar{W}(s)) + (h-1) \bar{W}(s). \quad (258)$$

Pertanto

$$\bar{s}_{ph}(t) = 1 - \bar{w}_{-1}(t) + (h-1) \bar{w}(t). \quad (259)$$

Dato che $\bar{w}(t)$ è non negativa si ha che $\bar{w}_{-1}(t) = \int_0^t \bar{w}(\tau) d\tau$ è non decrescente con valore finale pari a $\bar{W}(s)|_{s=0} = 1$. Quindi $\forall h \geq 1$ sicuramente $\bar{s}_{ph}(t)$ è non negativa. Da ciò segue che

$$\bar{H}_{vh} = \frac{1}{\int_0^\infty |\bar{s}_{ph}(\tau)| d\tau} = \frac{1}{\int_0^\infty \bar{s}_{ph}(\tau) d\tau} = \frac{1}{\bar{S}_p(s)|_{s=0}} = \frac{1}{h \bar{d}_n / \bar{d}_{n+1}} = \frac{\bar{d}_{n+1}}{h \bar{d}_n} = \bar{K}_{vh}. \quad (260)$$

■

I teoremi precedenti e quelli del Paragrafo 4.3 forniscono dei metodi per scegliere i poli in modo che $\bar{H}_{vh} = \bar{K}_{vh}, \forall h \geq 1$.

Nelle Figure 186÷189 vengono riportati i valori di $1/K_v$ e $1/H_v$ in funzione di h nel caso in cui $n_c = n+1 = 3$, $\rho = 1$ e poli di Bessel, Butterworth, poli coincidenti e poli con uguale τ :

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= \{-1, -1\} \\ \bar{P}_3 &= \left\{ -1, -1 + \tan(\pi/4)i, -1 - \tan(\pi/4)i \right\} / \sqrt[3]{2} \\ \bar{P}_4 &= \left\{ -1, -1, -1 - \tan(\pi/3)i, -1 + \tan(\pi/3)i \right\} / \sqrt[4]{4} \\ \bar{P}_5 &= \left\{ -1, -1 - \tan(\pi/8)i, -1 + \tan(\pi/8)i, -1 - \tan(3\pi/8)i, -1 + \tan(3\pi/8)i \right\} / \sqrt[5]{8} \\ \bar{P}_6 &= \left\{ -1, -1, -1 - \tan(\pi/8)i, -1 + \tan(\pi/8)i, -1 - \tan(3\pi/8)i, -1 + \tan(3\pi/8)i \right\} / \sqrt[6]{8}. \end{aligned} \quad (261)$$

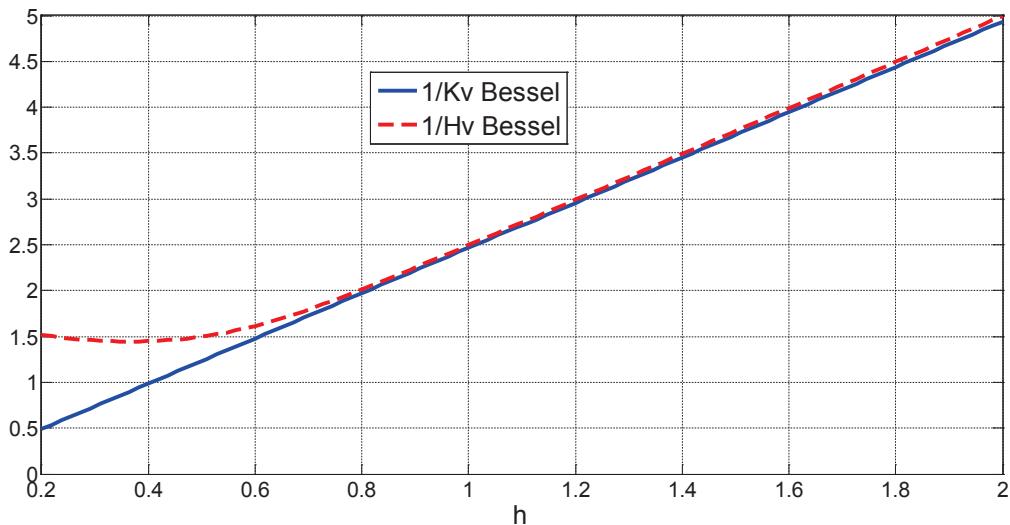


Figura 186. Valori di $1/K_v$ e $1/H_v$ in funzione di h nel caso in cui $n_c = 3$

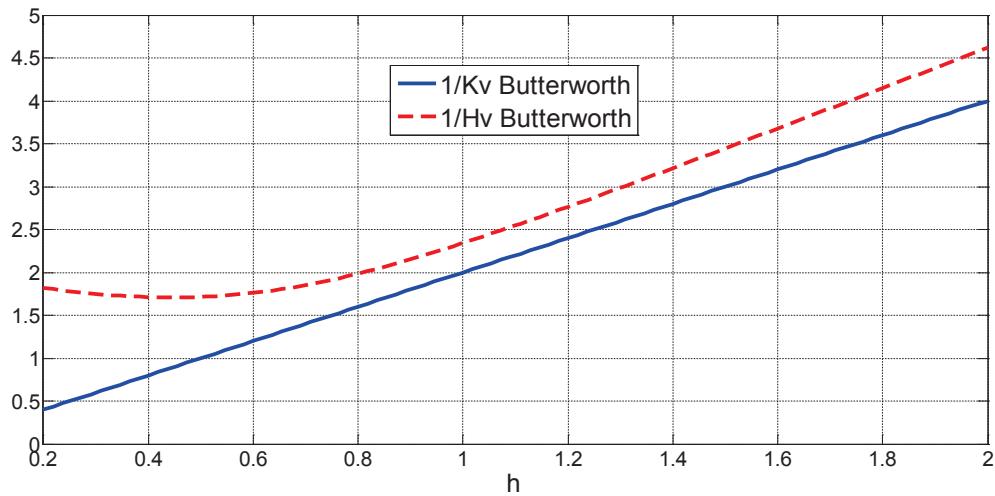


Figura 187. Valori di $1/K_v$ e $1/H_v$ in funzione di h nel caso in cui $n_c = 3$

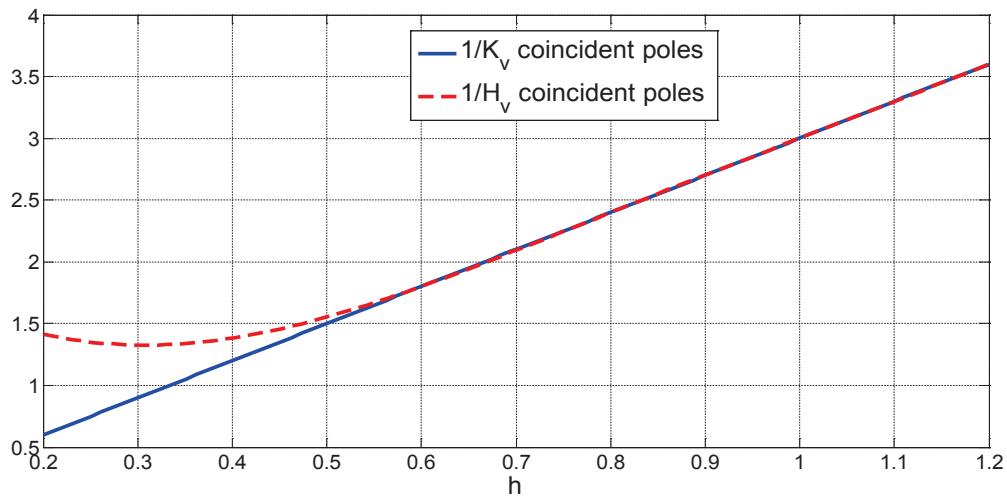


Figura 188. Valori di $1/K_v$ e $1/H_v$ in funzione di h nel caso in cui $n_c = 3$

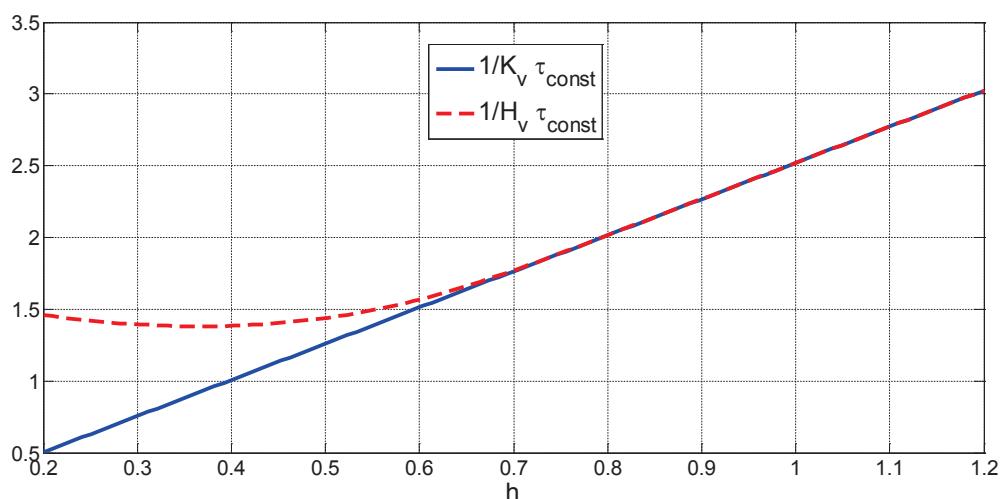


Figura 189. Valori di $1/K_v$ e $1/H_v$ in funzione di h nel caso in cui $n_c = 3$

Giovanni Celentano • Laura Celentano

Modellistica, Simulazione, Analisi,
Controllo e Tecnologie dei Sistemi Dinamici

Elementi di Controlli Automatici

Volume III

Accedi all'**ebook** e ai
contenuti digitali ➤ **Espandi le tue risorse** ➤ con un libro che **non pesa** e si **adatta**
alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.



€ 32,00

